Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

В. Э. Петров

ОБОБЩЕННОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

С открытия преобразования Фурье известен способ решения интегральных уравнений методом интегральных преобразований. Метод основан на том, что интегральный оператор, ядро которого зависит от разности аргументов, после действия преобразования Фурье становится оператором умножения на функцию. Иными словами, интегральный оператор

$$v(y) = \mathbf{K}[u](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, k(y-x)\, dx \tag{$*$}$$

интегральным преобразованием

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u](\xi) \equiv \widehat{u}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\,(\cos y\xi + i \sin y\xi)\, dy \\ u(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi)\big(\cos \xi x - i \sin \xi x\big)\, d\xi \end{aligned} \tag{$**$}$$

диагонализуется:

$$\widehat{v}(\xi) = V(\xi)\, \widehat{u}(\xi),$$

где шляпкой обозначены Фурье-образы соответствующих функций. По счастливому стечению обстоятельств, $V(\xi) = \widehat{k}(\xi)$. Между тем, интегральное преобразование $(**)$, конечно, важный, но далеко не единственный случай среди преобразований на оси, что имеют важное значение для приложений.

В работе [2] изучено преобразование Хартли. Идеи Хартли состояли в том, что преобразование Фурье “избыточно”, поскольку Фурье-образ несет в себе информацию как о четной/нечетной, так и действительной/мнимой частях оригинала. В то время, как для восстановления оригинала должно быть достаточно чего-то одного. Отсюда

Ключевые слова: интегральные преобразования; интегральные уравнения, оператор свертки.

появилось преобразование с вещественными коэффициентами:

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y)\bigl(\cos\xi y + \sin\xi y\bigr)\, dy,$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\xi)\bigl(\cos\xi x + \sin\xi x\bigr)\, d\xi.$$

В работе [6] изучается преобразование Френеля и его приложение к оптике. Это преобразование в одномерном случае (в “раскрытой” форме) имеет вид (см., также, ниже (37)):

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y)\left(e^{-ix^2/2}e^{-iy^2/2}\cos xy + ie^{-ix^2/2}e^{-iy^2/2}\sin xy\right) dy,$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(x)\left(e^{ix^2/2}e^{it^2/2}\cos xt - ie^{ix^2/2}e^{it^2/2}\sin xt\right) dt.$$

В настоящей заметке мы существенно обобщим эти преобразования и приведем новые типы операторов-сверток, диагонализуемых новыми преобразованиями. Наши построения будут связаны с функциональным произволом в ядре преобразования. В то же время, следует отметить, что другие обобщения преобразования Фурье были предложены ранее (см., например, [8]), как двусторонние преобразования Ватсона с ядрами Фурье, что также приводит к весьма богатым примерам. Утверждение теоремы 1 настоящей работы (формулы (2) и (3)) можно вывести из [8]. Однако далее наше исследование идет существенно в другом направлении. Кроме этого, по нашему мнению, мало написать взаимно-обратные формулы, как бы красивы они не были. Для целей приложений важно указать равенство Парсеваля и операторы свертки. Именно на это направлены некоторые общие утверждения настоящей статьи (формулы (10), (15) и лемма 3), а также их применение к конкретным преобразованиям. Отметим, что, обычно, в литературе, посвященной построению сверток для конкретных интегральных преобразований (см., например, [4,5,7]), под сверткой понимают несколько иное, чем это принято в настоящей статье. Именно, говорят, что $u * v$ является сверткой (с весом w) для преобразования Φ, если $\Phi[u * v](t) = w(t) \cdot \Phi[u](t) \cdot \Phi[v](t)$. Мы, однако, будем называть ядро интегрального оператора "сверточным" относительно преобразования Φ, если после действия этого преобразования интегральный оператор с таким ядром становится оператором умножения на функцию, т.е. диагонализуется:

$$\Phi\left[\int K(x,y)u(y)\,dy\right](t) = V(t)\cdot\Phi[u](t).$$

При этом сама функция V не обязана быть чьим-либо Φ-образом. Таким образом, традиционная схема "заточена" под классическую теорию коммутативных нормированных колец Микусинского, тогда как наш интерес – конструктивная схема приложения теории к решению интегральных уравнений.

Присутствие произвольных функций в ядрах преобразований практически лишает нас возможности указать функциональные пространства, где определены прямые и обратные преобразования. Однако в приложениях, в каждом конкретном случае, это нетрудно сделать, опираясь на известные функциональные теоремы о преобразованиях Фурье (см., например, [1]). Автор попытался обозначить этот момент, указывая в соответствующих формулировках, что та или иная комбинация функций, содержащая оригинал, может быть преобразована по Фурье. То есть, вместо указания конкретных пространств, автор предлагает рецепт для их определения.

Ввиду сказанного, автор осознает, что практически все приведенные ниже утверждения формальны и не являются теоремами в строгом смысле этого слова. Чтобы это подчеркнуть, соответствующие утверждения, содержащие новые прямые и обратные преобразования, будут взяты в кавычки.

Несколько слов об обозначениях:

- Интегральные преобразования, обычно, обозначаются через Φ. Так обозначается *текущее* преобразование, о котором идет речь в данном месте. Таким образом на протяжении всего текста появится множество преобразований Φ, но это не должно вызвать путаницу.
- Оригиналы обозначаются строчными, а Φ-образы прописными буквами. По умолчанию функции $\{u, U\}$ образуют Φ-пару: $\Phi[u](\xi) = U(\xi)$. При этом, конечно, $\{U, u\}$ Φ-пару не образуют (вообще, говоря). Этот набор образует Φ^{-1}-пару.

- Мы часто будем рассматривать четную и нечетную части функций, например, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. При этом по умолчанию через $f_1(x)$ обозначается нечетная, а через $f_2(x)$ – четная часть функции $f(x)$. Кроме того, снабжение той или иной функции этими индексами также будет означать нечетность или четность этой функции.
- Гладкость в смысле Гельдера понимается в традиционном смысле [3]:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le c(f)|x_1 - x_2|^\rho, \ \forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le c(f)\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right|^\rho, \ \forall |x_1|,\, |x_2| > 1, \quad 0 < \rho < 1.$$

В частности, для гельдеровых функций мы (формально) полагаем

$$f(x_1)\,\delta(x_1 - x_2) = f(x_2)\,\delta(x_1 - x_2). \tag{1}$$

Также, для нас будет важно, что произведение гельдеровых (класса ρ) функций будет опять функцией класса ρ. Гельдеровы функции ограничены, в том числе, на бесконечности. Если функция f гельдерова и отделена от нуля ($|f(x)| \ge c_1$), то, очевидно, и $1/f$ тоже гельдерова. Для функции нескольких переменных гельдеровость будет означать гельдеровость по каждому аргументу равномерно по всем остальным.

1. Рассмотрим следующее преобразование на оси:

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\big(a\cos\xi y + b\sin\xi y\big)\,dy \tag{2}$$

для некоторых постоянных (в том числе, комплексных) $a,\ b$.

“Теорема” 1. *Для преобразования* (2) *справедлива формула обращения*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\left(\frac{1}{a}\cos x\xi + \frac{1}{b}\sin x\xi\right)\,d\xi. \tag{3}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(a\cos\xi y + b\sin\xi y\big)\left(\frac{1}{a}\cos x\xi + \frac{1}{b}\sin x\xi\right)\,d\xi = \delta(x - y).$$

Действительно, раскрыв скобки, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\cos\xi(x-y)+\frac{a}{b}\cos\xi y\,\sin\xi x+\frac{b}{a}\sin\xi y\,\cos\xi x\right)d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\xi(x-y)\,d\xi=\delta(x-y),$$

поскольку интегралы от остальных слагаемых равны нулю в силу нечетности. Также проверяется обратное равенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(a\cos\xi x+b\sin\xi x)\left(\frac{1}{a}\cos x\omega+\frac{1}{b}\sin x\omega\right)dx=\delta(\xi-\omega).$$

□

Преобразование (2), (3), как и преобразование Фурье, оставляет инвариантным пространство $L_2(\mathbb{R})$. Это легко увидеть, представляя оригинал $f(y)=f_2(y)+f_1(y)$ и образ $F(\xi)=F_2(\xi)+F_1(\xi)$ в виде суммы четной и нечетной частей. Однако, вообще говоря, при произвольных коэффициентах ни об унитарности, ни о самосопряженности преобразования говорить не приходится. В силу явных формул для прямого и обратного преобразования получаем, что преобразование будет унитарным, если $|a|=|b|=1$ и самосопряженным при вещественных коэффициентах.

Положив $a=1,\ b=i$, мы получим преобразование Фурье [1]

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(y)\big(\cos\xi y+i\sin\xi y\big)\,dy,\\ u(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(\xi)\big(\cos\xi x-i\sin\xi x\big)\,d\xi.\end{aligned}\tag{4}$$

Положив $a = 1,\ b = 1$, получим преобразование Хартли [2]

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y)\bigl(\cos \xi y + \sin \xi y\bigr)\, dy,$$
$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\xi)\bigl(\cos \xi x + \sin \xi x\bigr)\, d\xi. \tag{5}$$

Отметим, что в [2] для вещественного сдвига $\alpha \neq \frac{\pi m}{2}$ приведено преобразование

$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y) \sin(\xi y + \alpha)\, dy,$$
$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\bigl(\operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \sin x\xi + \operatorname{tg}^{1/2}\alpha \cos x\xi\bigr)\, d\xi,$$

которое неверно. Правильная формула для обратного преобразования имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ \sin 2\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\xi) \cos(\xi x - \alpha)\, d\xi.$$

Рассмотрим следующее обобщение преобразования (2):

$$F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\ \bigl(a\ \cos(\beta \xi y) + b\ \sin(\gamma \xi y)\bigr)\, dy, \tag{6}$$

где β и γ – некоторые вещественные постоянные.

“Теорема” 2. *Для преобразования* (6) *справедлива формула обращения:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \left(\frac{|\beta|}{a} \cos(\beta x \xi) + \frac{|\gamma|}{b} \sin(\gamma x \xi) \right)\, d\xi. \tag{7}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1 следует проверить равенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a\cos(\beta\xi y)+b\sin(\gamma\xi y)\right)\cdot\left(\frac{|\beta|}{a}\cos(\beta x\xi)+\frac{|\gamma|}{b}\sin(\gamma x\xi)\right)d\xi=\delta(x-y).$$

Раскрывая скобки и оставляя только четные члены, получим:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(|\beta|\cos(\beta\xi y)\,\cos(\beta\xi x)+|\gamma|\sin(\gamma\xi x)\sin(\gamma\xi y)\big)\,d\xi\\&=\frac{|\beta|}{2}\Big(\delta\big(\beta(x-y)\big)+\delta\big(\beta(x+y)\big)\Big)+\frac{|\gamma|}{2}\Big(\delta\big(\gamma(x-y)\big)-\delta\big(\gamma(x+y)\big)\Big)\\&\hspace{28em}=\delta(x-y),\end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством

$$\delta(\gamma\, x)=\frac{1}{|\gamma|}\delta(x).$$

Подобным образом проверяется и обратное равенство. □

Следующим шагом будет определить оператор свертки для введенных преобразований. Для этого приведем общие формулы, которыми будем постоянно пользоваться и далее. Пусть дано прямое преобразование

$$U(\xi)=\Phi[u](\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(y)\,\varphi(\xi,y)\,dy,\quad \xi\in\mathbb{R},\tag{8}$$

и обратное преобразование

$$u(x)=\Phi^{-1}[U](x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(\xi)\psi(x,\xi)\,d\xi.\tag{9}$$

Формальной записью, что эти преобразования взаимообратны, являются формулы:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,y)\,\psi(x,\xi)\,d\xi = \delta(x-y),\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,x)\,\psi(x,\omega)\,dx = \delta(\xi-\omega).\end{gathered}\tag{10}$$

Именно эти равенства мы проверяли выше для преобразований (2), (3). Отметим, что если справедливо только одно из равенств (10), то это означает, что преобразования не взаимнооднозначны. Равенства (10) можно считать формальной записью полноты и ортогональности соответствующих преобразований. Мы вынесем за скобки обсуждение вопроса, в каком смысле понимаются интегралы (10). Отметим лишь, что в этих равенствах вообще не участвуют преобразуемые функции. Стало быть, определяя пространство $\mathcal{H}$, где рассматривается преобразование (8) и пространство $\mathcal{G}$, где рассматривается обратное преобразование (9), мы по умолчанию полагаем справедливость условий теоремы Фубини и соответствующих интегральных представлений:

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,y)\psi(x,\xi)\,d\xi\right) f(y)\,dy, \quad f\in\mathcal{H}, \tag{11}$$

$$F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x,\omega)\varphi(\xi,x)\,dx\right) F(\omega)\,d\omega, \quad F\in\mathcal{G}. \tag{12}$$

Наряду с преобразованием (8) полезно также рассмотреть преобразование

$$U^*(\xi) = \Psi[u](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y)\,\overline{\psi(y,\xi)}\,dy \quad u\in\mathcal{H}^* \tag{13}$$

и его обратное

$$u(x) = \Psi^{-1}[U^*] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U^*(\xi)\,\overline{\varphi(\xi,x)}\,d\xi, \quad U^*\in\mathcal{G}^*. \tag{14}$$

Пространства $\mathcal{H}^*$ и $\mathcal{G}^*$, конечно, не обязаны совпадать с пространствами $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$. Однако между ними существует глубокая связь. Прежде всего, отметим, что введенные преобразования связаны очевидным соотношением, называемым равенством Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,\overline{v(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\xi)\,\overline{V(\xi)}\,d\xi. \tag{15}$$

Следовательно, выбрав в качестве базовых пространств $L_2(-\infty,\,\infty)$ (как по переменной x, так и по переменной ξ), мы можем записать равенство Парсеваля в терминах скалярного произведения:

$$(u,\,v) = \big(\Psi[u],\,\Phi[v]\big) = \big(U^*,\,V\big), \quad \Psi = (\Phi^{-1})^*. \tag{16}$$

Здесь $u \in \mathcal{H}^*$, $v \in \mathcal{H}$, $U^* \in \mathcal{G}^*$, $V \in \mathcal{G}$. Поэтому можно утверждать, что в нашем случае – пространства $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^*$ и $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ – двойственные относительно скалярного произведения в $L_2(-\infty,\,\infty)$. Эта схема позволяет определять преобразование Φ и на функциях, для которых интеграл (8) формально не существует, как функционалы над основным пространством $\mathcal{H}^*$ (см., также, [9]).

Лемма 3. *Интегральный оператор* $\mathbf{K}$ *на оси с ядром* $K(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{K}[u](x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)\,u(y)\,dy$$

является сверточным для преобразования Φ *(т.е. диагонализуется этим преобразованием) тогда и только тогда, когда ядро имеет вид:*

$$K(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\,\varphi(\xi,y)\,\psi(x,\xi)\,d\xi \tag{17}$$

для некоторой функции $V(\xi)$, *для которой существует интеграл. Другими словами, справедливо равенство:*

$$\Phi\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(y)K(x,y)\,dy\right](\xi) = V(\xi)\cdot\Phi[u](\xi).$$

Аналогично, интегральный оператор на оси с ядром $T(\xi,\omega)$, $\xi,\omega \in \mathbb{R}$ является сверточным для преобразования Φ^{-1} тогда и только тогда, когда

$$T(\xi,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\,\varphi(\xi,x)\,\psi(x,\omega)\,dx, \tag{18}$$

т.е.

$$\Phi^{-1}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\,T(\xi,\omega)\,d\omega\right](y) = w(y)\cdot\Phi^{-1}[U](y).$$

Доказательство прямо вытекает из соотношений ортогональности (10). Отметим, при этом, что утверждение леммы вытекает из представления оператора в виде: $\mathbf{K} = \Phi^{-1}V\Phi$, то есть, как композиции трех операторов. Поэтому при выкладках следует быть аккуратным при оправдании замены порядка интегрирования. Например, если ядра $\varphi(\xi,\,y)$, $\psi(x,\,\xi)$ – сингулярные, то при перемене порядка интегрирования возникает δ-функция (см, например, [4]) по правилу Пуанкаре–Бертрана. Особо подчеркнем, что лемма носит характер критерия. То есть, если оператор $\mathbf{K}$ диагонализуется преобразованием Φ, то его ядро необходимо имеет вид (17). Непосредственно из этой леммы следует, что если оператор $\mathbf{K}$ диагонализуется преобразованием Φ, то сопряженный ему $\mathbf{K}^*$

$$\mathbf{K}^*[u](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{K(y,x)}\,u(y)\,dy$$

диагонализуется преобразованием Ψ.

“Теорема” 4. *Сверточное ядро для преобразования* (2) *имеет вид:*

$$\begin{aligned} K(x,y) = k_2\bigl(|x-y|\bigr) + c_1\,\mathrm{sign}(x-y)\,k_1\bigl(|x-y|\bigr)\\ +c_2\,\mathrm{sign}(x+y)\,k_1\bigl(|x+y|\bigr), \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right),\quad c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right),$$

а k_1, k_2 – произвольные функции своих аргументов.

Доказательство. Действительно, в силу (17), сверточное ядро имеет вид:

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\left(a\cos\xi y + b\sin\xi y\right)\left(\frac{1}{a}\cos x\xi + \frac{1}{b}\sin x\xi\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\Big(\cos\xi(x-y) + c_1\,\sin\xi(x-y) + c_2\,\sin\xi(x+y)\Big)\,d\xi.$$

Таким образом, обозначив через k_2 – обратное cos-преобразование Фурье от четной части функции V, а через k_1 – обратное sin-преобразование Фурье от нечетной части функции V, получим (19). □

Говоря о "произвольности" функций k_1, k_2, мы имееем в виду, что они являются прообразами соответсвующих преобразований Фурье. Например, одно из точных утверждений может быть таким: k_1, k_2 – произвольные функции из $L_1(0,\infty)$.

Положим $a = 1$, $b = i$ и получим, что сверткой для преобразования Фурье на оси является функция

$$K(x,y) = k_2\big(|x-y|\big) + i\,\mathrm{sign}(x-y)\,k_1\big(|x-y|\big) = k(x-y),$$

где k – произвольная функция на оси, а k_2 и k_1 – ее, соответственно, четная и нечетная части.

Положив $a = 1$, $b = 1$, получим свертку для преобразования Хартли:

$$K(x,y) = k_2\big(|x-y|\big) + \mathrm{sign}(x+y)\,k_1\big(|x+y|\big). \tag{20}$$

Таким образом, например, интегральное уравнение на всей оси

$$u(x) + \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(y)\,\mathrm{sign}(x+y)\,k\big(|x+y|\big)\,dy = f(x)$$

непосредственно решается применением преобразования Хартли:

$$\tilde{u}(\xi)\big(1 + \lambda\tilde{v}(\xi)\big) = \tilde{f}(\xi),$$

$$u(x) = f(x) - \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\,R(x,y)\,dy,$$

где ядро резольвенты имеет вид:

$$R(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{v}(\xi)}{1+\lambda\tilde{v}(\xi)}\Big(\cos\xi(x-y) + \sin\xi(x+y)\Big)\,d\xi.$$

“Теорема” 5. *Сверточное ядро для преобразования* (6) *имеет вид:*

$$K(x,y) = \frac{1}{2}\Big(|\beta|\,k_2\big(|\beta|\,|x-y|\big) + |\gamma|\,k_2\big(|\gamma|\,|x-y|\big)\Big)$$
$$+\frac{1}{2}\Big(|\beta|\,k_2\big(|\beta|\,|x+y|\big) - |\gamma|\,k_2\big(|\gamma|\,|x+y|\big)\Big)$$
$$+\frac{a|\beta|}{2b}\Big(\operatorname{sign}(\beta y+\gamma x)k_1\big(|\beta y+\gamma x|\big)+\operatorname{sign}(-\beta y+\gamma x)k_1\big(|-\beta y+\gamma x|\big)\Big)$$
$$+\frac{b|\gamma|}{2a}\Big(\operatorname{sign}(\gamma y+\beta x)k_1\big(|\gamma y+\beta x|\big)+\operatorname{sign}(-\gamma y+\beta x)k_1\big(|-\gamma y+\beta x|\big)\Big).$$

2. Рассмотрим некоторые обобщения преобразования (2).

“Теорема” 6 (Внешние коэффициенты в оригинале)**.** *Пусть для гельдеровых функций* $\lambda(\xi)$, $\mu(\xi)$ *выполнены следующие условия:*

$$\lambda(\xi)\mu(-\xi)+\lambda(-\xi)\mu(\xi)\neq 0, \quad \lambda(\xi)\neq 0, \quad \mu(\xi)\neq 0$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}$. *Пусть, далее, для оригинала* $f(y)$ *существует прямое преобразование Фурье. Тогда следующие преобразования взаимообратны*

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(\lambda(\xi)\,\cos\xi y+\mu(\xi)\,\sin\xi y\big)\,f(y)\,dy,\\ f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\alpha(\xi)\cos\xi x+\beta(\xi)\sin\xi x\big)\,F(\xi)\,d\xi, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\alpha(\xi)=\frac{2\mu(-\xi)}{\lambda(\xi)\mu(-\xi)+\lambda(-\xi)\mu(\xi)}, \quad \beta(\xi)=\frac{2\lambda(-\xi)}{\lambda(\xi)\mu(-\xi)+\lambda(-\xi)\mu(\xi)}. \tag{22}$$

В частности, когда функции $\lambda(\xi)$ *и* $\mu(\xi)$ *– четные, вид обратного преобразования упрощается:*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda(\xi)}\cos\xi x+\frac{1}{\mu(\xi)}\sin\xi x\right)\,F(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично формулируется

“Теорема” 7 (Внутренние коэффициенты оригинала). *Пусть для гельдеровых функций $a(y)$, $b(y)$ выполнены следующие условия:*

$$a(y)b(-y)+a(-y)b(y)\neq 0, \quad a(y)\neq 0, \quad b(y)\neq 0$$

при всех $y\in\mathbb{R}$. Пусть, далее, для функции $a_1f_1+a_2f_2$ существует $\cos$-преобразование Фурье, а для функции $b_1f_2+b_2f_1$ существует $\sin$-преобразование Фурье. Например, $a_1f_1+a_2f_2,\ b_1f_2+b_2f_1\in L_1(0,\infty)$. Тогда следующие преобразования взаимообратны:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(a(y)\cos y\xi+b(y)\sin y\xi\big)\,f(y)\,dy,\\ f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(c(x)\cos x\xi+d(x)\sin x\xi\big)\,F(\xi)\,d\xi, \end{aligned}\tag{23}$$

где

$$c(y)=\frac{2\,b(-y)}{a(y)b(-y)+a(-y)b(y)}, \quad d(y)=\frac{2\,a(-y)}{a(y)b(-y)+a(-y)b(y)}\cdot\tag{24}$$

Формулы (21) и (23) доказываются непосредственной проверкой равенств (10). При этом существенно используются свойство (1). Заметим также, что гельдеровы пары (λ,μ) и (a,b) преобразованиями (22) и (24) переходят в опять гельдеровские пары (α,β) и (c,d), причем (λ,μ) и (a,b) выражаются через (α,β) и (c,d) теми же формулами (22) и (24).

Приведем теперь формулы свертки для преобразования (21). По общему правилу (17)

$$\begin{aligned} &K(x,y)\\ &=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(\xi)\Big(\big(\lambda(\xi)\,\cos\xi y+\mu(\xi)\,\sin\xi y\big)\cdot\big(\alpha(\xi)\sin\xi x+\beta(\xi)\cos\xi x\big)\Big)\,d\xi\\ &\qquad=\operatorname{sign}(x+y)k_1\big(|x+y|\big)+\operatorname{sign}(y-x)k_2\big(|y-x|\big)\\ &\qquad\qquad+k_3\big(|x+y|\big)+k_4\big(|x-y|\big), \end{aligned}$$

где

$$
\begin{aligned}
k_1(x) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(\xi)\lambda(-\xi)+\mu(\xi)\mu(-\xi)}{\lambda(\xi)\mu(-\xi)+\lambda(-\xi)\mu(\xi)} V_1(\xi)\,\sin\xi x\,d\xi,\\
k_2(x) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(\xi)\lambda(-\xi)-\mu(\xi)\mu(-\xi)}{\lambda(\xi)\mu(-\xi)+\lambda(-\xi)\mu(\xi)} V_1(\xi)\,\sin\xi x\,d\xi,\\
k_3(x) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(\xi)\mu(-\xi)-\lambda(-\xi)\mu(\xi)}{\lambda(\xi)\mu(-\xi)+\lambda(-\xi)\mu(\xi)} V_1(\xi)\,\cos\xi x\,d\xi,\\
k_4(x) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_2(\xi)\,\cos\xi x\,d\xi.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Известно [1], что уравнения с ядром (25) явно решаются применением преобразования Фурье и заменой знака в уравнении для образов. Однако, и для преобразования (21) мы можем предъявить уравнения, которые прежде не считались "сверточными". Для этого рассмотрим обратное преобразование и выпишем для него ядро свертки:

$$
\begin{aligned}
&K(\xi,\omega)\\
&=\frac{1}{\Delta(\omega)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\big(\lambda(\xi)\cos\xi x+\mu(\xi)\sin\xi x\big)\big(\lambda(-\omega)\sin\omega x+\mu(-\omega)\cos\omega x\big)dx\\
&=\frac{1}{\Delta(\omega)}\bigg(\frac12\big(\lambda(\xi)\mu(-\omega)+\mu(\xi)\lambda(-\omega)\big)k_2\big(|\xi-\omega|\big)\\
&\quad+\frac12\big(\lambda(\xi)\mu(-\omega)-\mu(\xi)\lambda(-\omega)\big)k_2\big(|\xi+\omega|\big)\\
&\quad+\frac12\big(\lambda(\xi)\lambda(-\omega)+\mu(-\omega)\mu(\xi)\big)\,\mathrm{sign}(\xi+\omega)k_1\big(|\xi+\omega|\big)\\
&\quad+\frac12\big(\lambda(\xi)\lambda(-\omega)-\mu(-\omega)\mu(\xi)\big)\,\mathrm{sign}(\omega-\xi)k_1\big(|\omega-\xi|\big)\bigg),
\end{aligned}
$$

где $\Delta(\omega)=\lambda(\omega)\mu(-\omega)+\lambda(-\omega)\mu(\omega)$, а k_2, k_1 – произвольные функции своих аргументов (соответственно, cos-преобразование Фурье от четной части функции $w(x)$ и sin-преобразование Фурье от нечетной части). Например, к этому типу относится интегральный оператор с ядром

$$K(\xi,\,\omega) = \frac{\lambda(\xi)+\lambda(-\omega)}{\lambda(\omega)+\lambda(-\omega)}k(|\xi-\omega|) + \frac{\lambda(\xi)-\lambda(-\omega)}{\lambda(\omega)+\lambda(-\omega)}k(|\xi+\omega|),$$

который диагонализуется интегральным преобразованием

$$\Phi^{-1}[U](z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{\lambda(\xi)+\lambda(-\xi)}\cos\xi z + \frac{2\lambda(-\xi)}{\lambda(\xi)+\lambda(-\xi)}\sin\xi z\right)U(\xi)d\xi.$$

3. Дальнейшее обобщение

“Теорема” 8. *В предположении обычных условий существования* $\sin/\cos$*-преобразований Фурье оригинала и гельдеровости функций* a, b, λ, μ, *следующие преобразования на оси взаимообратны:*

$$\Phi[f](\xi) = F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(a(y)\,\lambda(\xi)\,\cos\xi y + b(y)\,\mu(\xi)\,\sin\xi y\big)\,f(y)\,dy, \quad (26)$$

$$\Phi^{-1}[F](x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(c(x)\,\alpha(\xi)\,\cos\xi y + d(x)\,\beta(\xi)\,\sin\xi y\big)\,F(\xi)\,d\xi, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{2\,b(-x)}{a(x)b(-x)+a(-x)b(x)}, \quad & d(x) &= \frac{2\,a(-x)}{a(x)b(-x)+a(-x)b(x)}, \\ \alpha(\xi) &= \frac{2\,\mu(-\xi)}{\lambda(\xi)\mu(-\xi)+\lambda(-\xi)\mu(\xi)}, \quad & \beta(\xi) &= \frac{2\,\lambda(-\xi)}{\lambda(\xi)\mu(-\xi)+\lambda(-\xi)\mu(\xi)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Как и в случае (21)*, если все коэффициенты, входящие в* (26) *четные, то формула обращения упрощается:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a(x)\lambda(\xi)}\cos\xi x + \frac{1}{b(x)\mu(\xi)}\sin\xi x\right)\,F(\xi)\,d\xi. \quad (29)$$

Доказательство. В этом разделе мы дадим прямое доказательство формулы обращения без апеллирования к (10). Рассмотрим (26), как интегральное уравнение и решим его. Для этого представим функции

f, F, a, b, λ, μ как сумму четной и нечетной части. Тогда уравнение (26) распадается на систему:

$$F_1(\xi) = \lambda_1(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(a_1(y)f_1(y)+a_2(y)f_2(y)\big)\,\cos\xi y\,dy$$

$$+\,\mu_2(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(b_1(y)f_2(y)+b_2(y)f_1(y)\big)\,\sin\xi y\,dy = \lambda_1(\xi)\cdot X+\mu_2(\xi)\cdot Y,$$

$$F_2(\xi) = \lambda_2(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(a_1(y)f_1(y)+a_2(y)f_2(y)\big)\,\cos\xi y\,dy$$

$$+\,\mu_1(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(b_1(y)f_2(y)+b_2(y)f_1(y)\big)\,\sin\xi y\,dy = \lambda_2(\xi)\cdot X+\mu_1(\xi)\cdot Y.$$

Разрешая эту систему относительно X, Y и обращая соответствующие sin-/cos-преобразования Фурье, получим:

$$\begin{aligned} b_1(x)f_2(x)+b_2(x)f_1(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1\lambda_2-F_2\lambda_1}{\mu_2\lambda_2-\mu_1\lambda_1}\,\sin\xi x\,d\xi,\\ a_2(x)f_2(x)+a_1(x)f_1(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{-F_1\mu_1+F_2\mu_2}{\mu_2\lambda_2-\mu_1\lambda_1}\,\cos\xi x\,d\xi. \end{aligned} \tag{30}$$

Поскольку знаменатель в подынтегральных выражениях (30) четен, то мы можем в этих выражениях заменить везде F_1 и F_2 на F, так как значения интегралов от этого не изменится. Следовательно, систему (30) можно записать в виде:

$$b_1(x)f_2(x)+b_2(x)f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda(-\xi)}{\mu(\xi)\lambda(-\xi)+\mu(-\xi)\lambda(\xi)}\,F(\xi)\,\sin\xi x\,d\xi,$$

$$a_2(x)f_2(x)+a_1(x)f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(-\xi)}{\mu(\xi)\lambda(-\xi)+\mu(-\xi)\lambda(\xi)}\,F(\xi)\,\cos\xi x\,d\xi.$$

Найдя отсюда f_1 и f_2, после некоторых вычислений получим (27).

Из самого доказательства видно, что теорему можно строго сформулировать в классах $\{0\}$, $\{\{0\}\}$ (см. [3]). Именно, обозначив через

$\{\{0\}\}$ пересечение $L_2(-\infty,\infty)$ и пространства Гельдера, а через $\{0\}$ – Фурье-прообраз $\{\{0\}\}$, с учетом замечаний к теореме 7, получим: $\Phi:\{0\}\to\{\{0\}\}$, где Φ – это преобразование (27). $\square$

4. Выпишем теперь преобразование Φ^*, сопряженное к Φ:

$$F^*(\xi)=\Phi^*[f](\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\overline{a(\xi)\lambda(y)}\,\cos\xi y+\overline{b(\xi)\mu(y)}\,\sin\xi y\right)f(y)\,dy \tag{31}$$

или:

$$\Phi^*[f](x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\overline{a(x)\lambda(\xi)}\,\cos\xi x+\overline{b(x)\mu(\xi)}\,\sin\xi x\right)f(\xi)\,d\xi. \tag{32}$$

“Теорема” 9. *Преобразование Φ будет самосопряженным относительно $L_2(-\infty,\infty)$, при*

$$a(x)=\overline{\lambda(x)},\quad b(x)=\overline{\mu(x)},$$

и унитарным при

$$a(x)=e^{i\,h_2(x)},\quad b(x)=e^{i\,g_2(x)},\quad \lambda(\xi)=e^{i\,\gamma_2(\xi)},\quad \mu(\xi)=e^{i\,\zeta_2(\xi)}, \tag{33}$$

где h_2, g_2, γ_2, ζ_2 – произвольные вещественные четные функции своих аргументов.

Доказательство. Первое утверждение очевидно из сравнения (26) и (31). Докажем унитарность. Приравнивая операторы (27) и (32), имеем:

$$\frac{2\,b(-x)}{a(x)b(-x)+a(-x)b(x)}=\overline{a(x)},\quad \frac{2\,a(-x)}{a(x)b(-x)+a(-x)b(x)}=\overline{b(x)}. \tag{34}$$

Система для функций λ, μ аналогична. Поэтому решим лишь систему (34). Для этого поделим равенства системы друг на друга и обозначим $w(x)=b(x)/a(x)$. Имеем, следовательно,

$$\overline{w(x)}=\frac{1}{w(-x)}.$$

Легко понять, что общий вид такой функции есть

$$w(x)=e^{u_1(x)+i\,u_2(x)}, \tag{35}$$

где u_1 – произвольная вещественная нечетная, а u_2 – произвольная вещественная четная функции. Тот же самый вид имеют и функции

a и b. Действительно, для того, чтобы их отношение имело вид (35) необходимо, чтобы эти функции выражались в виде:

$$a(x) = e^{\alpha_2(x)+i\,\beta_1(x)} \cdot e^{h_1(x)+i\,h_2(x)}, \quad b(x) = e^{\alpha_2(x)+i\,\beta_1(x)} \cdot e^{g_1(x)+i\,g_2(x)}, \tag{36}$$

при этом общий множитель можно опустить, поскольку он не влияет на само преобразование (26) и сокращается в равенствах (34). Запишем, далее, первое из равенств (34) в виде:

$$\frac{2}{1+|w(x)|^2} = |a(x)|^2$$

и подставим сюда выражения (35) и (36):

$$\frac{2}{1+e^{2u_1(x)}} = e^{2h_1(x)}.$$

Поменяем знак аргумента $x \to -x$ и сложим оба равенства. В результате получим: $\operatorname{ch} 2h_1(x) = 1$, откуда $h_1(x) = 0$ и $a(x) = e^{i\,h_2(x)}$. Остальные равенства (33) доказываются аналогично. $\square$

Таким образом, оператор

$$\Phi[u](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(a(x)\,\overline{a(\xi)}\,\cos\xi x + b(x)\,\overline{b(\xi)}\,\sin\xi x \Big)\,u(x)\,dx$$

– самосопряжен.

Оператор

$$\Phi[u](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{i(h_2(x)+\gamma_2(\xi))}\cos\xi x + e^{i(g_2(x)+\zeta_2(\xi))}\sin\xi x \Big)\,u(x)\,dx$$

– унитарен. В частности, при $h_2 = \gamma_2 = g_2 = 0,\ \zeta_2 = \pi/2$ мы получаем преобразование Фурье. При

$$h_2(x) = \frac{x^2}{2},\quad \gamma_2(\xi) = \frac{\xi^2}{2},\quad g_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4},\quad \zeta_2(\xi) = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\pi}{4}$$

получим преобразование Френеля:

$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{i}{2}\big(x-\xi\big)^2 \right\} u(x)\,dx, \tag{37}$$

имеющее важное приложение к оптике.

Оператор

$$\Phi[u](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(h_2(x)-h_2(\xi))}\cos\xi x + e^{i(g_2(x)-g_2(\xi))}\sin\xi x\right) u(x)\,dx$$

– одновременно самосопряжен и унитарен. В частности, при $g_2(x) =$ const, $h_2(x) =$ const мы получаем преобразование Хартли.

5. Матричные обобщения.

“Теорема” 10. *Для произвольных квадратных постоянных невырожденных матриц a, b, имеющих обратные, соответственно, c, d, справедливы равенства:*

$$F_j(\xi) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(a_{jk}\cos y\xi + b_{jk}\sin y\xi\right) f_k(y)\,dy, \quad j = 1\dots N,$$

$$f_m(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(c_{mj}\cos\xi x + d_{mj}\sin\xi x\right) F_j(\xi)\,d\xi, \quad m = 1,\dots N.$$

Действительно, проверка равенств (10) здесь вполне аналогична одномерному случаю. В случае матриц, зависящих от переменных x и ξ ситуация усложняется. Для произвольных матриц формулы весьма громоздки и трудно обозримы. Поэтому мы приведем соответствующие результаты лишь для четных матриц. Пусть элементы матриц $\lambda(\xi) = \|\lambda_{jk}(\xi)\|$ и $\mu(\xi) = \|\mu_{jk}(\xi)\|$ – четные. Обозначим их обратные через $\zeta(\xi) = \|\zeta_{mj}(\xi)\|$ и $\eta(\xi) = \|\eta_{mj}(\xi)\|$. Тогда справедлива

“Теорема” 11. *Следующие преобразования взаимообратны:*

$$F_j(\xi) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda_{jk}(\xi)\cos y\xi + \mu_{jk}(\xi)\sin y\xi\right) f_k(y)dy, \quad j = 1\dots N,$$

$$f_m(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\zeta_{mj}(\xi)\cos\xi x + \eta_{mj}(\xi)\sin\xi x\right) F_j(\xi)d\xi, \quad m = 1,\dots N.$$

Для коэффициентов, зависящих от обеих переменных важен порядок:

“Теорема” 12. *Следующие преобразования взаимообратны:*

$$F_j(\xi) = \sum_{k,p=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \big(\lambda_{jp}(\xi) a_{pk}(y) \cos y\xi + \mu_{jp}(\xi) b_{pk}(y) \sin y\xi\big)\, f_k(y)\, dy,$$

$$f_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,p=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \big(c_{mp}(x) \zeta_{pj}(\xi) \cos \xi x + d_{mp}(x) \eta_{pj}(\xi) \sin \xi x\big)\, F_j(\xi)\, d\xi,$$

где $\zeta = \lambda^{-1}$, $\eta = \mu^{-1}$, $c = a^{-1}$, $d = b^{-1}$. *Все матричные элементы считаются четными и гельдеровыми.*

Для преобразования

$$F_j(\xi) = \sum_{k,p=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \big(a_{jp}(y) \lambda_{pk}(\xi) \cos y\xi + b_{jp}(y) \mu_{pk}(\xi) \sin y\xi\big)\, f_k(y)\, dy \qquad (38)$$

вообще говоря, для произвольных коэффициентов найти обратное не удалось. Более или менее содержательный результат можно сформулировать так: уравнение (38) явно решается в случае, если все его матричные коэффициенты являются треугольными одного типа (например, верхнетреугольными). Действительно, тогда элементы вектора $f_k(x)$ вычисляются последовательно по теореме 8.

6. Многомерные обобщения.

Обобщения на многомерный случай можно вести по разным направлениям. Мы приведем здесь преобразование, обобщающее (6).

“Теорема” 13. *Пусть* λ_k *и* μ_k $(k = 1, \ldots, n)$ *– вещественные векторы с компонентами произвольного знака. Следующие преобразования взаимообратны:*

$$F(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(a \cos \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j y_j + b \sin \sum_{j=1}^{n} \mu_j \xi_j y_j \right) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|\Lambda|}{a} \cos \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j x_j + \frac{|\mathrm{M}|}{b} \sin \sum_{j=1}^{n} \mu_j \xi_j x_j \right) F(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi},$$

где

$$|\Lambda| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k|, \quad |\mathrm{M}| = \prod_{k=1}^{n} |\mu_k|.$$

Доказательство. Начнем со следующего элементарного утверждения:

Лемма 14. *Разложение косинуса суммы n аргументов в сумму простейших произведений имеет вид:*

$$\cos\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{j=1}^{2^n}\left(\pm\prod_{k=1}^{n} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} x_j\right),$$

где количество синусов в каждом простейшем произведении четно. Разложение синуса суммы имеет тот же вид, но количество синусов в каждом произведении нечетно.

Доказательство легко проводится индукцией. В частности, из этой леммы следует, что среди слагаемых косинуса суммы обязательно есть член

$$\prod_{k=1}^{n} \cos x_k,$$

а среди остальных есть хотя бы два сомножителя $\sin x_p \sin x_m$, $1 \le p$, $m \le n$, $p \ne m$. Аналогично, среди сомножителей каждого из слагаемых синуса суммы обязательно есть хотя бы один сомножитель $\sin x_m$. Таким образом, мы имеем следующие равенства:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \cos\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \xi_j\right) d\boldsymbol{\xi} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda_k x_k \xi_k \, d\xi_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_k|}\delta(x_k).$$

Интеграл от синуса такой суммы равен нулю. Далее все следует из прямой проверки равенств (10) на основе леммы 14. □

"Теорема" 15. *Пусть $\beta = \|\beta_{jk}\|$ и $\gamma = \|\gamma_{jk}\|$ числовые вещественные матрицы, одна из которых положительно определена, а вторая симметрична и невырождена. Пусть, далее, a, b – произвольные не равные нулю числа, в том числе, возможно, комплексные. Тогда следующие преобразования взаимообратны:*

$$F(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(a\cos\sum_{j,\,k=1}^{n} \beta_{jk}\xi_j y_k + b\sin\sum_{j,\,k=1}^{n} \gamma_{jk}\xi_j y_k\right) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\det\beta|}{a}\cos\sum_{j,k=1}^{n}\beta_{jk}\xi_j x_k+\frac{|\det\gamma|}{b}\sin\sum_{j,k=1}^{n}\gamma_{jk}\xi_j x_k\right)\times F(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi},$$

где $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$.

Доказательство этой теоремы не трудно, но очень громоздко. Оно связано с возможностью одновременного приведения к сумме квадратов двух билинейных форм $(\beta y,\xi)$ и $(\gamma y,\xi)$ одной вещественной матрицей и сведением соответствующих формул к теореме 13.

Литература

1. И. Снеддон, *Преобразования Фурье.* М., ИЛ, 1955.
2. Р. Брейсуэлл, *Преобразование Хартли. Теория и приложения.* М., Мир, 1994.
3. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки.* М., Наука, 1978.
4. В. А. Какичев, *О свертках для интегральных преобразований* Известия АН БССР, сер. физмат наук, No. 2, 1967.
5. С. Б. Якубович,*Об одном конструктивном методе построения интегральных сверток.* — ДАН БССР, **34**, No. 7 (1990).
6. Е. Г. Абрамочкин, В. Г. Волостников, *Современная оптика гауссовских пучков.* Из-во Физматлит, 2010.
7. Н. Я. Виленкин, *Матричные элементы неприводимых и унитарных представлений группы движений пространства Лобачевского и обобщенные преобразования Фока–Мелера.* — ДАН СССР, **118**, No. 2 (1958).
8. Vu Kim Tuan, S. B. Yakubovich, *A criterion for a two-sided integral transform to be unitary.* — Ukr. Mat. Zhur., **44**, No. 5 (1992), 697–699.
9. Ю. А. Брычков, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования обобщенных функций.* М., Наука, 1977.

Petrov V. E. Generalized trigonometric integral transformations.

We study some generalizations of the Fourier and Hartley transformations on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$. These transformations involve functional coefficients. The Parceval identities, convolution formulas, conditions of selfadjointness and unitary property for new transformations are obtained.

ООО “ТВЭЛЛ”,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: petrov@twell.ru

Поступило 10 ноября 2015 г.