

М. А. Лялинов

**ЯВЛЕНИЕ ВЕЙЛЯ–ВАН ДЕР ПОЛЯ В
АКУСТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ НА КЛИНЕ ИЛИ
КОНУСЕ С ИМПЕДАНСНЫМИ КРАЕВЫМИ
УСЛОВИЯМИ**

**Василию Михайловичу Бабичу
с уважением и признательностью**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая формула Вейля–Ван дер Поля (ВВдП) описывает волновое поле от источника, расположенного вблизи хорошо проводящего полупространства (см., например, [1, 2, глава 11]). Если источник расположен в точности на границе, формула для волнового поля принимает вид

$$U(R, \chi) = 2 \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{\sqrt{2kR}}{n} e^{i\pi/4 - w^2} \int_w^{i\infty} e^{t^2} dt \right), \quad (1)$$

где

$$w = \left[\frac{ikR}{2n^2} (1 + 2n\chi) \right]^{1/2},$$

kR – безразмерное расстояние от источника до точки наблюдения ($kR \gg 1$), χ – угол между границей и направлением наблюдения, n – большой показатель преломления ($|n| \gg 1$) для хорошо проводящего полупространства. Интеграл Френеля в формуле (1) появляется в результате асимптотической оценки интегрального представления для волнового поля в условиях, когда полюс подынтегрального выражения находится в малой окрестности седловой точки.

Во многих ситуациях влияние проводящего (поглощающего) полупространства на дифракционную картину может быть адекватно моделировано подходящими импедансными краевыми условиями, что

Ключевые слова: дифракция на клине или конусе, явление Вейля–Ван дер Поля.
В процессе выполнения данного исследования автор был поддержан грантами РФФИ 13-01-00165а и СПбГУ N11.38.215.2014.

приводит к новым возможностям в изучении соответствующих волновых явлений, см., например, [3]. Существуют различные версии формулы Вейля–Ван дер Поля [2, глава 11], в частности, для двумерного или трехмерного случаев, когда источники находятся вблизи импедансной плоскости. Однако, насколько нам известно из литературы, во всех случаях используется интеграл Френеля для вывода равномерной асимптотики интегрального представления дальнего поля вблизи поверхности. С физической точки зрения явление ВВдП может быть интерпретировано во многих случаях как результат интерференции сферической волны от источника и поверхностной волны, распространяющейся от источника вдоль границы. В таком случае фазы этих волн оказываются близкими и волны в действительности не могут быть разделены в асимптотике. Среди многочисленных публикаций в данной тематике стоит упомянуть также работы, посвященные приложениям явления ВВдП в акустике [4, 5], а также [6]. Дополнительное обсуждение и ссылки могут быть найдены в монографии [7]. Совсем недавно версия формулы ВВдП была получена в случае движущегося источника над импедансной плоскостью земли [8].

В данной работе мы изучаем некоторые новые версии явления ВВдП, которые при определенных условиях возникают в задаче дифракции плоской волны на импедансном клине или конусе. В первом случае мы имеем дело с двумерной задачей дифракции на клине (угле).¹ Это хорошо известная каноническая задача решена явно Г. Д. Малюжинцем [9, 10] с использованием интегрального представления Зоммерфельда для волнового поля. Во втором параграфе мы кратко обсуждаем решение Малюжинца и показываем простыми средствами, что для малого импеданса поверхности клина дальнее поле вблизи этой поверхности описывается интегралом Френеля. В этом случае мы называем выражение для соответствующей компоненты в асимптотике формулой ВВдП.

Наиболее содержательный анализ начинается в третьем параграфе, в котором мы изучаем дифракцию плоской волны на круговом импедансном конусе. Мы формулируем задачу и (для удобства читателя) напоминаем основные шаги ее редукции, основанной на неполном разделении переменных, см., например, [11, 12]) так, что мы отчасти следуем материалу Главы 5 в [13]. Дальнейшие преобразования ведут к

¹Нетрудно получить похожие результаты в электромагнитной задаче дифракции плоской волны, наклонно падающей на ребро импедансного клина.

интегральному представлению Зоммерфельда для решения, которое является основным средством изучения асимптотики дальнего поля. Точки перевала и сингулярности подынтегрального выражения в интеграле Зоммерфельда, которое является аналитической функцией, захватываются при деформации контура Зоммерфельда в перевальные и приводят к различным компонентам в асимптотике дальнего поля. Комплексные сингулярности (типа точек ветвления) ответственны за поверхностные волны, распространяющиеся от вершины конуса к бесконечности. Эти особенности наиболее важны для наших целей. В случае малого поверхностного импеданса эти сингулярности могут быть близки к седловым точкам. Соответствующий “равномерный” вариант метода перевала приводит к искомому выражению для дальнего поля, а именно к новой версии формулы ВВдП, описывающей явление ВВдП при дифракции на импедансном конусе. В этом случае поведение волнового поля в пограничном слое выражается в терминах функций параболического цилиндра (функций Вебера). Полученная формула может быть интерпретирована как трехмерный вариант формулы ВВдП, полученной в параграфе 2 для двумерной задачи дифракции на импедансном клине.

В настоящей работе мы обсуждаем появление упомянутого пограничного слоя вблизи импедансной поверхности, возникающего благодаря интерференции пространственной волны (сферической или цилиндрической) с поверхностной волной при рассеянии плоской падающей волны на клине или конусе. Такого сорта эффект естественно назвать явлением Вейля–Ван дер Поля по аналогии с классическими результатами, см. [2, глава 11].

§2. ДИФРАКЦИЯ НА ИМПЕДАНСНОМ КЛИНЕ И ФОРМУЛА ВЕЙЛЯ–ВАН ДЕР ПОЛЯ

Пусть плоская волна $U_i(kr, \varphi) = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}$ падает на импедансный клин (Fig. 1) и освещает полностью его грани $\varphi = \pm\Phi$, (r, φ) – полярные координаты с полярной осью, совпадающей с биссектрисой угла величины 2Φ .² Полное поле (падающее плюс рассеянное) $U(kr, \varphi)$

²Считаем, что зависимость e^{-ikt} от времени опущена в данной работе

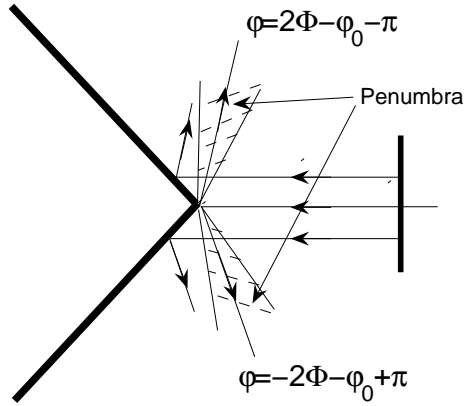


Рис. 1. Дифракция на импедансном клине

удовлетворяет уравнению Гельмгольца и импедансным краевым условиям на сторонах клина

$$\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mp ik \sin \theta_{\pm} U|_{\varphi=\pm\Phi} = 0,$$

где $Z_{\pm} = \sin \theta_{\pm}$ поверхностные импедансы, $\text{Im } \theta_{\pm} < 0$, $\text{Re } \theta_{\pm} = 0$, а также условию излучения и условию Мейкснера. Полная формулировка и обсуждение задачи могут быть найдены, например, в [13, глава 1].

Рассмотрим решение задачи Малюжинца в виде интеграла Зоммерфельда

$$U(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos z} s(z + \varphi) dz, \quad (2)$$

$$s(z) = \frac{\Psi_0(z)}{\Psi_0(\varphi_0)} \frac{\mu \cos \mu \varphi_0}{\sin \mu z - \sin \mu \varphi_0}, \quad \mu = \frac{\pi}{2\Phi},$$

$\Psi_0(z)$ произведение функций Малюжинца $\psi_{\Phi}(z)$, (см. [13], Параграф 1.5.6)

$$\begin{aligned} \Psi_0(z) = & \psi_{\Phi}(z + \Phi + \pi/2 - \theta_+) \psi_{\Phi}(z + \Phi - \pi/2 + \theta_+) \\ & \times \psi_{\Phi}(z - \Phi + \pi/2 - \theta_-) \psi_{\Phi}(z - \Phi - \pi/2 + \theta_-) \end{aligned}$$

и $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ контур Зоммерфельда, состоящий из двух петель (Рис. 3). Хорошо известно, что трансформанта Зоммерфельда $s(z + \varphi)$ является мероморфной, имеющей вещественные и комплексные полюсы (показаны на Рис. 2). Далее, для того, чтобы вычислить асимптотику дальнего поля ($kr \gg 1$) решения (2) двухпетлевой контур Зоммерфельда деформируется в перевальные контуры ($\text{SDC}_{\pm\pi}$) на Рис. 2 и некоторые из упомянутых особенностей могут быть захвачены [13]. Точки перевала $\pm\pi$ порождают цилиндрическую волну от ребра, тогда как вещественные полюсы $z = -2\Phi n - \varphi - (-1)^n \varphi_0$, $n = 0, \pm 1$ отвечают за геометрооптический вклад U_n , то есть за падающую и отраженные волны. Комплексные полюсы в $z_+ = \pi + \Phi + \theta_+ - \varphi$ и $z_- = -\pi - \Phi - \theta_- - \varphi$ в общем случае порождают поверхностные волны с использованием теоремы о вычетах. Однако, мы здесь предполагаем, что импеданс \mathcal{Z}_+ является малым, то есть

$$0 < |\theta_+| \leq O([kr]^{-1/2}). \quad (3)$$

Рассмотрим окрестность грани $\varphi = \Phi$ такую, что

$$0 \leq |\varphi - \Phi| \leq O([kr]^{-1/2+\epsilon}), \quad (4)$$

где ϵ положителен и мал. В этих условиях полюс z_+ близок к седловой точке π и их вклад в асимптотику не может быть разделен.

Рассмотрим интеграл по SDC_π , подынтегральное выражение которого содержит полюс z_+ в окрестности точки перевала π ($z_+ \sim \pi$)

$$U_{WP}(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{SDC}_\pi} e^{-ikr \cos z} s(z + \varphi) dz, \quad (5)$$

где

$$s(z + \varphi) = \frac{c_+}{z - z_+(\varphi)} + \dots,$$

считая $z \sim z_+(\varphi)$, $z_+(\varphi) = \pi + \Phi + \theta_+ - \varphi$. Вычет c_+ находится явно (см., например, (1.150), стр. 37 в [13]). Преобразуем тождественно подынтегральное выражение в (5)

$$U_{WP}(kr, \varphi) = \frac{e^{ikr}}{2\pi i} \int_{\text{SDC}_\pi} e^{-2ikr \cos^2(z/2)} g(z - \pi + \varphi, \theta_+) \times \frac{\sin(z/2)}{\cos(z/2) - \cos(z_+(\varphi)/2)} dz, \quad (6)$$

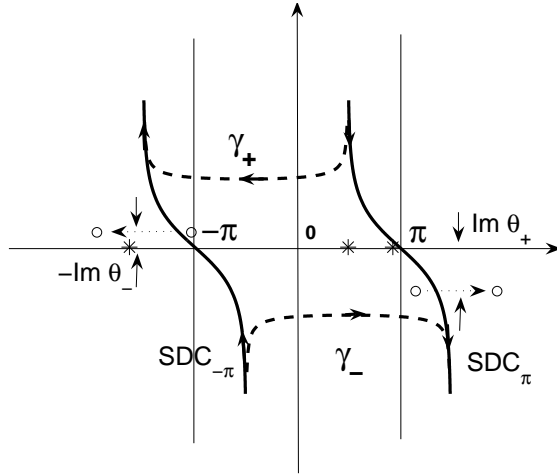


Рис. 2. Контуры Зоммерфельда и полюсы в задаче дифракции на импеданском клине

где

$$g(z - \pi + \varphi, \theta_+) = s(z + \varphi) \frac{\cos(z/2) - \cos(z_+(\varphi)/2)}{\sin(z/2)}.$$

В малой окрестности (порядка $O([kr]^{-1/2})$) точки $z = \pi$ функция $g(z - \pi + \varphi, \theta_+)$ регулярна по z , что справедливо равномерно по φ и θ_+ при ограничениях (3) и (4). Аппроксимируем функцию $g(z - \pi + \varphi, \theta_+)$ старшим членом $g(\varphi, \theta_+)$ ее ряда Тейлора в упомянутой окрестности. Таким образом, мы приходим к выражению

$$U_{WP}(kr, \varphi) = g(\varphi, \theta_+) \frac{e^{ikr}}{2\pi i} \int_{SDC_{\pi}} e^{-2ikr \cos^2(z/2)} \times \frac{\sin(z/2)}{\cos(z/2) - \cos(z_+(\varphi)/2)} dz (1 + O([kr]^{-1/2})), \quad (7)$$

где $g(\varphi, \theta_+) = s(\pi + \varphi) \sin[(\Phi - \varphi + \theta_+)/2]$ непрерывна по совокупности переменных (φ, θ_+) в произведении множеств, описываемых (3), (4). Очевидно, что предел этой функции в точке $(\Phi, 0)$ выражается в терминах c_+ .

Старший член асимптотики интеграла в (7) определяется интегрированием вдоль SDC_π в круге с центром в π и радиусом порядка $O([kr]^{-1/2+\epsilon})$.³ В данном круге мы сделаем замену переменной интегрирования $\tau = \sqrt{2i} \cos(z/2)$, где $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$. После простых преобразований, в старшем приближении находим

$$U_{WP}(kr, \varphi) = \frac{i}{\pi} g(\varphi, \theta_+) e^{ikr} \Psi(kr, \tau_+(\varphi)) (1 + O([kr]^{-1/2})), \quad (8)$$

где $\tau_+(\varphi) = \sqrt{2i} \cos[z_+(\varphi)/2]$ и

$$\Psi(z, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z\tau^2}}{\tau - \varepsilon} d\tau.$$

Функция Ψ (см. [15], параграф 3 Главы 6) регулярна по (z, ε) в области $D \times C$, где $D = \{z : C \setminus (-\infty, 0]\}$. Она выражается в терминах интеграла Френеля

$$\Psi(z, \varepsilon) = \pi i \exp(-\varepsilon^2 z) [1 - F(-i\varepsilon\sqrt{z})],$$

где $F(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-\tau^2} d\tau$. Полезно отметить, что при условиях $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$ и $z \rightarrow \infty$, справедлива асимптотика

$$\Psi(z, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right).$$

В результате, принимая во внимание условия (3), (4), асимптотика полного поля имеет вид

$$U(kr, \varphi) = U_{GO}(kr, \varphi) + e^{i\pi/4} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2\pi kr}} s(-\pi + \varphi) (1 + O([kr]^{-1})) + U_{WP}(kr, \varphi), \quad (9)$$

где $U_{GO}(kr, \varphi)$ сумма падающей и отраженной волн [13], второе слагаемое это цилиндрическая волна от ребра. Слагаемое $U_{WP}(kr, \varphi)$, задаваемое выражением (8), естественно назвать компонентой Вейля–Ван дер Поля в асимптотике волнового поля.

³Интегрирование по остальной части контура дает экспоненциально малую поправку при $kr \rightarrow \infty$.

§3. ДИФРАКЦИЯ НА КРУГОВОМ ИМПЕДАНСНОМ КОНУСЕ

3.1. Постановка. Рассмотрим дифракцию плоской падающей волны, которая освещает целиком поверхность кругового конуса C (Рис. 3). Пусть коническая поверхность C вырезает область Σ (круг) на единичной сфере S^2 (не показана на (Рис. 3)) с центром в вершине T конуса (см. подробности в Главе 5, [13]). Точки ω_0 и ω на единичной сфере соответствуют направлению, из которого приходит падающая волна, а также направлению наблюдения \vec{r} , $\vec{\omega} = \vec{r}/r$.

Пусть $\widehat{\theta}(\omega, \omega_0)$ геодезическое расстояние между ω и ω_0 на единичной сфере, $\cos \widehat{\theta}(\omega, \omega_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$, $\omega = (\theta, \varphi)$ традиционные сферические координаты на единичной сфере, $\omega_0 = (\theta_0, \varphi_0)$, k волновое число. Падающая плоская волна имеет вид

$$U^i = e^{-ikr \cos \widehat{\theta}(\omega, \omega_0)}. \tag{10}$$

Считая, что конус круговой, $\theta = \theta_1$ задает коническую поверхность в сферических координатах (r, θ, φ) , естественно связанных с осью конуса и его вершиной T . Рассеянное поле $U(kr, \omega, \omega_0)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)U = 0, \tag{11}$$

и в сумме с падающей волной граничному условию

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (U + U^i)}{\partial \theta} \Big|_C - ik \sin \zeta (U + U^i) \Big|_C = 0, \tag{12}$$

$\eta = \sin \zeta$ нормированный и не зависящий от k поверхностный импеданс. Положим $\text{Re } \eta = 0$, это означает, что коническая поверхность реактивна, если не предполагается противное. Мы будем считать, что ζ чисто мнимое и $\text{Im} \zeta < 0$.

Решение U удовлетворяет условию Мейкснера

$$\text{Im} \left(ik \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial r} \bar{U} ds \right) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \tag{13}$$

что означает – поток энергии через сферу S_ε малого радиуса ε стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это условие выполнено, если

$$|U| \leq \text{const } r^h, \quad r |\nabla U| \leq \text{const } r^h, \quad h > -1/2, \tag{14}$$

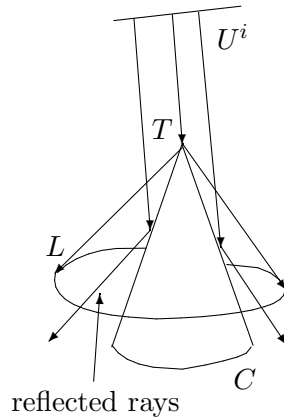


Рис. 3. Дифракция на импеданском конусе.

равномерно по угловым переменным, а плотность потока энергии локально интегрируема.

Обратимся к условиям излучения ($kr \rightarrow \infty$). Введем

$$\hat{\theta}'(\omega, \omega_0) = \min_{s \in \sigma} (\hat{\theta}(\omega, s) + \hat{\theta}(s, \omega_0))$$

длину ломаной геодезической на единичной сфере. Величина $\hat{\theta}'(\omega, \omega_0)$ имеет простой геометрический смысл. Геодезическая (“луч”), вышедший из ω_0 на $S^2 \setminus \Sigma$, отражается от σ в соответствии с геометрической оптикой и приходит в точку ω так, что $\hat{\theta}'(\omega, \omega_0)$ совпадает с минимальной длиной таких ломаных геодезических на $S^2 \setminus \Sigma$, соединяющих ω и ω_0 . Область $\hat{\theta}'(\omega, \omega_0) > \pi$ обычно называют “оазисом” и обозначают M . (Отметим, однако, что область $M \subset S^2$, вообще говоря, не мала.) Дальнее поле в этой области U (при $kr \rightarrow \infty$) описывается сферической волной, расходящейся от вершины конуса. Поверхность L , задаваемая равенством $\hat{\theta}'(\omega, \omega_0) = \pi$, называется поверхностью сингулярных направлений. Дифракционный коэффициент сферической волны от вершины имеет особенности при $\omega \in L \cap S^2$. Рассмотрим малую окрестность (порядка $O((kr)^{-1/2+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ мало) конической поверхности L . Назовем ее переходной зоной к области, освещенной отраженными лучами. При $\omega \in M$ волновое поле имеет

асимптотику

$$U(kr, \omega, \omega_0) = D(\omega, \omega_0, kr) \frac{e^{ikr}}{-ikr}, \quad (15)$$

где $D(\omega, \omega_0, kr)$ асимптотическое разложение по степеням $(kr)^{-m}$, $m \geq 0$. Коэффициент $D(\omega, \omega_0)$ при старшем члене с $m = 0$ называется диаграммой рассеяния (дифракционным коэффициентом) сферической волны.

Предположим на время, что импеданс $\sin \zeta$ не является малым, хотя мы намерены исследовать как раз противоположный случай в данной работе. Лучи, отраженные от конуса, освещают область $\text{in } \hat{\theta}'|_\sigma \leq \hat{\theta}' \leq \pi$, то есть внутренность поверхности L на Рис. 3. Волновое поле рассеянное на бесконечности вне переходной зоны (т.е. в области $N \subset S^2$, определяемой неравенством $\hat{\theta}'|_\sigma \leq \hat{\theta}' < \pi$) является суммой отраженной, сферической и поверхностной волн

$$U(kr, \omega, \omega_0) = D_r(\omega, \omega_0, kr) e^{-ikr \cos \hat{\theta}'(\omega, \omega_0)} + D(\omega, \omega_0, kr) \frac{e^{ikr}}{-ikr} + D_s(\omega, \omega_0, kr) e^{ikr \cos \theta_s(\omega, \omega_0)}, \quad (16)$$

где последнее слагаемое в (16) с комплексным $\theta_s(\omega, \omega_0)$ описывает поверхностную волну, $D_s(\omega, \omega_0, kr) = O((kr)^{-1/2})$. Эта волна ограничена на конической поверхности C и экспоненциально убывает, если точка наблюдения уходит с поверхности C (см. Главу 5 в [13]).⁴

Однако, в данной работе мы предполагаем, что параметр (импеданса) ζ мал, то есть

$$0 < |\zeta| \leq O([kr]^{-1/2}). \quad (17)$$

Последующий анализ показывает, сферическая и поверхностная волны в (16) не могут быть разделены в окрестности конической поверхности, так как особенности, отвечающие за поверхностную волну, могут быть близки к седловым точкам, определяющим сферическую волну в соответствующей асимптотике интегрального представления для волнового поля. Действительно, в рамках предположения (17) область N ,

⁴При $\text{Re } \eta > 0$, то есть для поглощающей поверхности эта волна также экспоненциально затухает при $kr \rightarrow \infty$.

отвечающая направлениям, освещенным отраженными лучами, подразделяется на две части N_1 и $N \setminus N_1$. Одна часть N_1 – узкая окрестность конической поверхности $\theta = \theta_1$ такая, что

$$0 \leq |\theta - \theta_1| \leq O([kr]^{-1/2+\epsilon}). \quad (18)$$

В этой подобласти асимптотика дальнего поля задается выражением

$$U(kr, \omega, \omega_0) = D_r(\omega, \omega_0, kr) e^{-ikr \cos \hat{\theta}'(\omega, \omega_0)} + U_{WP}(kr, \omega, \omega_0) \quad (19)$$

где $U_{WP}(kr, \omega, \omega_0)$ искомое выражение, описывающее результат интерференции сферической и поверхностной волн (см. (16)), которые не могут быть разделены в дальнем поле в рамках предположения (17). В дальнейшем $U_{WP}(kr, \omega, \omega_0)$ обозначает компоненту Вейля–Ван дер Поля в асимптотике дальнего поля.

Во внешности малой окрестности поверхности C , т.е. в подобласти $N \setminus N_1$, степенная асимптотика принимает вид

$$U(kr, \omega, \omega_0) = D_r(\omega, \omega_0, kr) e^{-ikr \cos \hat{\theta}'(\omega, \omega_0)} + D(\omega, \omega_0, kr) \frac{e^{ikr}}{-ikr} \quad (20)$$

и представляется суммой сферической и отраженной волн. В последующих параграфах наша основная цель состоит в вычислении ВВдП-компоненты в асимптотике (19), тогда как остальные компоненты в (20), (16) подробно обсуждаются в Главе 5 монографии [13]. В связи с этим, нам необходимо получить некоторые вспомогательные результаты и редуцировать задачу посредством неполного разделения переменных.

3.2. Редукция задачи. В этом параграфе мы напомним основные результаты в задаче (см. [13], глава 5) и адаптируем их с тем, чтобы использовать их в случае малого поверхностного импеданса поверхности.

Как показано в [13] (раздел 5.6), волновое поле в рассматриваемой задаче может быть представлено интегралом Зоммерфельда

$$U(r, \omega, \omega_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \Phi(\alpha, \omega, \omega_0) d\alpha, \quad (21)$$

разделив радиальную и угловые переменные. Интегрируя по частям, имеем

$$U(r, \omega, \omega_0) = \frac{\sqrt{-ikr}}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} \sin \alpha \tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) d\alpha, \quad (22)$$

где

$$\Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0).$$

Теперь стоит сформулировать задачу для трансформант Зоммерфельда $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$, $\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0)$. Трансформанты Зоммерфельда являются аналитическими функциями (четной и нечетной соответственно), которые регулярны в полосе $|\operatorname{Re} \alpha| < \hat{\theta}'(\omega, \omega_0)$ и в полуплоскостях $\operatorname{Im} \alpha > C$ и $\operatorname{Im} \alpha < -C$ для некоторого положительного C . Некоторые особенности трансформант показаны на Рис. 4. Если $U(kr, \omega, \omega_0)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, трансформанта $\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0)$ решает уравнение

$$(\Delta_{\omega} - \partial_{\alpha}^2 - 1/4) \tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) = 0, \quad (23)$$

где Δ_{ω} оператор Лапласа-Бельтрами на единичной сфере. То же справедливо для $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$.

Граничные условия имеют вид

$$\sin \alpha \left. \frac{\partial (\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}_i)}{\partial \theta} (\alpha, \omega, \omega_0) \right|_{\theta=\theta_1} = -\sin \zeta \left. \frac{\partial (\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}_i)}{\partial \alpha} (\alpha, \omega, \omega_0) \right|_{\theta=\theta_1}. \quad (24)$$

Отметим, что трансформанты Зоммерфельда, соответствующие падающему полю, могут быть явно вычислены

$$\tilde{\Phi}_i(\alpha, \omega, \omega_0) = -2^{-1} \sqrt{\pi} \left[\cos \alpha - \cos \hat{\theta}(\omega, \omega_0) \right]^{-1/2}, \quad (25)$$

где квадратный корень положителен при $-\hat{\theta}(\omega, \omega_0) < \alpha < \hat{\theta}(\omega, \omega_0)$ и разрез проводится из $\pm \hat{\theta}(\omega, \omega_0)$ в $\pm \infty$ соответственно. Начальные условия для $\tilde{\Phi}_i$ имеют вид

$$\tilde{\Phi}(0, \omega, \omega_0) = -i\sqrt{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} u_{\nu}(\omega, \omega_0) d\nu, \quad (26)$$

где $u_\nu(\omega, \omega_0)$ спектральная функция, которую мы обсудим ниже,

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (27)$$

Замечание. Аналогично имеем

$$\left. \frac{\partial (\Phi + \Phi_i)}{\partial \theta}(\alpha, \omega, \omega_0) \right|_{\theta=\theta_1} = -\sin \zeta \left. \frac{\partial (\Phi + \Phi_i)(\alpha, \omega, \omega_0)}{\sin \alpha} \right|_{\theta=\theta_1}, \quad (28)$$

где

$$\Phi_i(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{\Phi}_i(\alpha, \omega, \omega_0).$$

Задача (23)–(27) имеет единственное решение $\alpha \in [0, \hat{\theta}'(\omega, \omega_0))$ как начально-краевая задача для гиперболического уравнения. В принципе, имея решение для вещественного отрезка α , можно получить аналитическое продолжение на комплексную плоскость. Однако, такое продолжение и изучение возможных особенностей является важной и непростой задачей.

Трансформанты связаны с так называемой спектральной функцией $u_\nu(\omega, \omega_0)$ посредством преобразования Фурье (с интегрированием по мнимой оси)

$$\Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = \sqrt{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} \nu u_\nu(\omega, \omega_0) (e^{i\nu\alpha} - e^{-i\nu\alpha}) / 2 \, d\nu, \quad (29)$$

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) = \sqrt{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} u_\nu(\omega, \omega_0) (e^{i\nu\alpha} + e^{-i\nu\alpha}) / (2i) \, d\nu. \quad (30)$$

Напомним, что $u_\nu(\omega, \omega_0)$ решение краевой задачи для оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере с отверстием Σ (глава 5 в [13]). Спектральная функция ищется в виде разложения Фурье

$$u_\nu(\omega, \omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\varphi} R(\nu, n) \frac{P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos \theta)}{d_{\theta_1} P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos \theta_1)}, \quad (31)$$

где неизвестные коэффициенты Фурье $R(\nu, n)$ удовлетворяют интегральному уравнению (49). Для удобства мы напомним некоторые результаты вычислений для спектральной функции $u_\nu(\omega, \omega_0)$ в Приложении.

Важно подчеркнуть, что имея спектральную функцию $u_\nu(\omega, \omega_0)$, мы восстановим трансформанты Зоммерфельда посредством преобразования Фурье. Следовательно, можно воспользоваться интегральным представлением (21) для вычисления асимптотики дальнего поля с использованием метода перевала. В частности, компонента Вейля–Ван дер Поля в рассеянном поле вычисляется на этом пути.

3.3. Интегральные уравнения для коэффициентов Фурье в случае малого поверхностного импеданса. Удобно ввести новую неизвленную функцию $r(x, n)$ и новую переменную интегрирования (49)

$$x = 1 / \cos \pi \nu, \quad r(x, n) = R(\nu, n) \cos \pi \nu|_{x=1 / \cos \pi \nu},$$

таким образом, имеем

$$r(x, n) + \frac{\eta}{\pi} \int_0^1 \frac{W(y, n) r(y, n) dy}{x + y} = r_i(x, n), \quad (32)$$

где

$$r_i(y, n) = S_i(\nu, n) \cos \pi \nu|_{x=1 / \cos(\pi \nu)},$$

$$W(x, n) = w(\nu, n)|_{x=1 / \cos(\pi \nu)}.$$

Можно показать, что $W(x, n) > 0$ и непрерывна при $x \in [0, 1]$,

$$w(\nu, n) = 1 + O_n(1/\nu), \quad W(x, n) = 1 + O_n(1/\log(1/x))$$

для любого n и $\nu \rightarrow i\infty$, $x \rightarrow 0+$. Введем

$$\rho(x) = r(x, n) \sqrt{W(x, n)}$$

мы приходим к искомому виду интегрального уравнения для ρ

$$\rho(x) + \frac{\eta}{\pi} \int_0^1 K(x, y) \rho(y) dy = \rho_i(x), \quad (33)$$

где

$$K(x, y) = \frac{\sqrt{W(x, n)} \sqrt{W(y, n)}}{x + y}, \quad \rho_i(x) = r_i(x, n) \sqrt{W(x, n)}.$$

Интегральное уравнение (33) может быть естественно исследовано в $L_2(0, 1)$, так как $\rho_i \in L_2(0, 1)$, если $(\theta_1 - \theta_0)/\pi > 1/2$, что здесь и предполагается.

Интегральный оператор $K : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ определен выражением

$$(K\rho)(x) = \int_0^1 K(x, y) \rho(y, n) dy$$

и очевидным образом симметричен и ограничен с нормой, удовлетворяющей оценке

$$\|K\| \leq \pi h_n,$$

где $h_n = \max_x |W(x, n)|$. Таким образом, мы имеем линейное интегральное уравнение

$$\rho = \lambda K\rho + \rho_i, \quad (34)$$

с характеристическим параметром $\lambda = -\frac{\sin \zeta}{\pi}$. Уравнение (34) второго рода с самосопряженным (положительным) оператором. Оно однозначно разрешимо для всех неположительных λ . В рамках нашего предположения

$$\operatorname{Im} \zeta < 0, \quad \operatorname{Re} \zeta = 0$$

уравнение (34) имеет лишь одно решение из $L_2(0, 1)$ и для малых ζ (см. (17)) может быть представлено рядом (Неймана) теории возмущений

$$\rho = (I - \lambda K)^{-1} \rho_i = \rho_i + \lambda K \rho_i + (\lambda K)^2 \rho_i + \dots$$

который сходится при $|\sin \zeta| h_n < 1$.

3.4. Исследование дальнего поля. Вычислим Интеграл Зоммерфельда асимптотически ($kr \rightarrow \infty$) для получения выражений дальнего поля. Для этого, контуры Зоммерфельда $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ деформируем в перевальные (Рис. 4), проходящие через седловые точки $\pm\pi$. В процессе такой деформации могут быть захвачены особенности трансформант. Этими особенностями являются точки ветвления: две вещественных в $\pm\hat{\theta}'$ и две комплексных $\pm\alpha_\zeta(\theta)$. Положение таких особенностей зависит от точки наблюдения, и они мигрируют с изменением направления наблюдения. Вклад точек перевала $\pm\pi$ порождает сферическую волну от вершины, тогда как вклад от особенностей отвечает за отраженные и поверхностные волны соответственно. Направления, для которых фронты двух или более волн близки к касанию, соответствуют переходным зонам. В этих направлениях особенности сливаются с седловыми точками. В этом случае асимптотика описывается специальными переходными функциями. Для нас наиболее интересно исследование переходного слоя Вейля–Ван дер Поля вблизи границы,

который возникает благодаря возможности сближения комплексных сингулярностей, отвечающих поверхностной волне, с точками перепада. В результате, существенная часть анализа связана с изучением этих комплексных особенностей. Дополнительные детали можно найти в [13, глава 5], [14].

Мы кратко напомним поведение трансформанты Зоммерфельда в комплексных сингулярностях $\pm\alpha_\zeta(\theta)$. В силу осевой симметрии границы мы ищем выражение для трансформанты в виде ряда Фурье

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\varphi} \tilde{\Phi}(\alpha, \theta, n),$$

где $\tilde{\Phi}(\alpha, \theta, n)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \left[\frac{1}{4} + \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right] \right) \tilde{\Phi}(\alpha, \theta, n) = 0, \quad (35)$$

и граничному условию (25), где $\tilde{\Phi}_i$ разложено в ряд.

Коэффициенты Фурье $\tilde{\Phi}(\alpha, \theta, n)$ имеют две комплексных особенности в точках $\alpha = \pm\alpha_\zeta(\theta)$,

$$\alpha_\zeta(\theta) = \pi + \zeta + \theta_1 - \theta.$$

Можно показать, что это точки ветвления логарифмического типа $\exp[\mu \log(\alpha - \alpha_\zeta)]$, тогда будем искать поведение трансформанты вблизи точки $\alpha_\zeta(\theta)$ в виде

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \theta, n) = A(\alpha, \theta, n)[\alpha - \alpha_\zeta(\theta)]^\mu + B(\alpha, \theta, n), \quad (36)$$

где

$$A(\alpha, \theta, n) = A_0(\theta, n) + A_1(\theta, n)[\alpha - \alpha_\zeta(\theta)] + \dots,$$

$$B(\alpha, \theta, n) = B_0(\theta, n) + B_1(\theta, n)[\alpha - \alpha_\zeta(\theta)] + \dots.$$

Комплексная постоянная μ остается неизвестной как и коэффициенты $A_j, B_j, j = 0, 1, 2, \dots$ в разложении. Ветвь аналитической функции в (36) фиксируется следующим образом (см. [13], стр. 146)

$$a_0 < \arg[\alpha - \alpha_\zeta(\theta)] < 2\pi + a_0,$$

$$a_0 := -\arg[-ikr \sin \alpha_\zeta(\theta)] = \arg[\alpha - \alpha_\zeta(\theta)]|_{l_\zeta^{+,up}},$$

где $l_\zeta^{+,up}$ верхняя сторона разреза из точки $\alpha_\zeta(\theta)$ в бесконечность (Рис. 4).

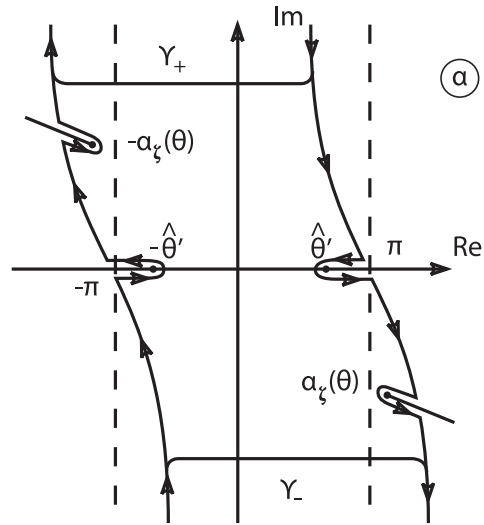


Рис. 4. Деформация контура Зоммерфельда и особенности подынтегрального выражения.

Подставим разложения, выписанные выше, в уравнение (36) и приравняем члены одного порядка сингулярности. Таким образом, в старшем порядке имеем уравнение

$$2\mu A'_0(\theta, n) + \mu \cot \theta A_0(\theta, n) = 0,$$

которое легко интегрируется

$$A_0(\theta, n) = \frac{C_{0n}}{\mu} \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}}.$$

Постоянные C_{0n} не могут быть найдены из локальных соображений. Каждая из них является функционалом от $R(\nu, n)$, что обсуждается в [13], раздел 5.11.3. Подставляя разложение с особенностью в краевое условие для $\tilde{\Phi}$ и приравнивая старшие члены к нулю, получаем

$$\mu = \frac{1}{2} \tan \zeta \cot \theta_1. \quad (37)$$

В результате мы приходим к

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{C_0(\varphi)}{\mu} \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}} [\alpha - \alpha_\zeta(\theta)]^\mu + \dots \quad (38)$$

вместе с

$$C_0(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\varphi} C_{0n}.$$

Из (38) находим

$$\Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = C_0(\varphi) \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}} [\alpha - \alpha_\zeta(\theta)]^{\mu-1} + \dots \quad (39)$$

Замечание. Стоит отметить, что при достаточных условиях

$$\theta - \theta_1 - \operatorname{Re} \zeta - \operatorname{gd}(\operatorname{Im} \zeta) > 0, \quad \operatorname{Im} \zeta < 0, \quad \operatorname{Re} \zeta = 0,$$

где $\operatorname{gd}(x)$ гудерманиан и, если параметр импеданса ζ не мал, соответствующие особенности действительно захватываются, и поверхностные волны реально возбуждаются. В этом случае вклад особенности в асимптотику может быть отделен, и мы получим старший член для третьего слагаемого в (16), то есть выражение для поверхностной волны (см. [13], раздел 5.9.3)

$$U^{\text{sw}}(kr, \theta) = \frac{C_0(\varphi)}{\pi i} \frac{(e^{2\pi i \mu} - 1) \Gamma(\mu)}{[i \sin(\theta_1 - \theta + \zeta)]^\mu} \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}} \times \frac{e^{i k r \cos[\theta_1 - \theta + \zeta]}}{\sqrt{-i k r}} e^{-\cot \theta_1 \tan(\zeta) \log(kr)/2} [1 + O(1/kr)], \quad (40)$$

где экспонента в множителе $e^{-\mu \log(kr)}$, (с $\mu = \cot \theta_1 \tan(\zeta)/2$) тесно связана с так называемой геометрической фазой

$$\Phi_g(kr) = -\cot \theta_1 \tan(\operatorname{Im} \zeta) \log(kr)/2.$$

С аналогичным объектом можно также столкнуться в квантовой механике, где он известен как фаза Берри [16]. В высокочастотной асимптотической теории дифракции описание поверхностной волны вдоль искривленной поверхности также встречается и носит название геометрической фазы, которая, в частности, зависит от кривизны поверхности вдоль и поперек направления распространения. В нашем случае конической поверхности геометрическая фаза определяется средней кривизной поверхности, т.е. в действительности кривизной поперёк направления распространения.

Однако, как мы уже отмечали, разделение вкладов $\pm\alpha(\zeta)$ и $\pm\pi$ в асимптотику невозможно в рамках условий (17),(18). В этом случае, мы должны вычислить асимптотику интеграла Зоммерфельда немного более затейливым образом.

§4. ФОРМУЛА ВЕЙЛЯ–ВАН ДЕР ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ИМПЕДАНСНОМ КОНУСЕ

Двухпетлевой контур Зоммерфельда в (21) деформируется в контуры наибоыстрейшего спуска $SDC_{\pm\pi}$, и некоторые особенности подынтегрального выражения (Fig. 4) могут быть захвачены. Мы должны рассмотреть окрестности седловых точек $\pm\pi$. Стоит упомянуть, что выражение, описывающее локальное поведение $\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0)$ в (38), ввиду разложения

$$[\cos(\alpha/2) - \cos(\alpha_\zeta(\theta)/2)]^\mu = \left(-\frac{\sin \alpha_\zeta(\theta)/2}{2}\right)^\mu [\alpha - \alpha_\zeta(\theta)]^\mu + \dots,$$

может быть записано при $\alpha \sim \alpha_\zeta(\theta) \sim \pi$ в равносильной форме

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{C_0(\varphi)}{\mu} \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}} \frac{[\cos(\alpha/2) - \cos(\alpha_\zeta(\theta)/2)]^\mu}{\left(-\frac{\sin \alpha_\zeta(\theta)/2}{2}\right)^\mu} + \dots$$

и

$$\Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{(-2)^\mu C_0(\varphi)}{\left(\cos \frac{\zeta + \theta_1 - \theta}{2}\right)^\mu} \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}} \frac{-\frac{1}{2} \sin(\alpha/2)}{[\cos(\alpha/2) - \cos(\alpha_\zeta(\theta)/2)]^{1-\mu}} + \dots \quad (41)$$

Считая, что справедливы условия (17),(18), обратимся к оценке интеграла

$$U_{WP}(kr, \omega) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_\pi} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \Phi(\alpha, \omega, \omega_0) d\alpha, \quad (42)$$

где трансформанта аппроксимирована (41) в малом круге $B(kr, \epsilon)$ с центром в π и радиусом порядка $O([kr]^{-1/2+\epsilon})$ на плоскости переменной α , см. Рис. 4.⁵ Интегрирование проводится вдоль C_π , который является частью перевального контура SDC_π , проходящего через π и принадлежащего $B(kr, \epsilon)$. Интегрирование вдоль части контура SDC_π , который

⁵На Рис. 4 подразумевается, что разрез из $\hat{\theta}'$ в бесконечность обходит круг и точка $\alpha_\zeta(\theta)$ намного ближе к π , чем $\hat{\theta}'$.

проходит вне этого круга, дает экспоненциально малый вклад в асимптотику интеграла при $kr \rightarrow \infty$. Отметим, что вклад $SDC_{-\pi}$ уже был учтен в (42), так как трансформанта является нечетной функцией. Итого, после простых преобразований мы имеем

$$\begin{aligned}
 U_{WP}(kr, \omega) &= \frac{e^{ikr}}{\pi i} \int_{C_\pi} \frac{e^{-2ikr \cos^2(\alpha/2)}}{\sqrt{-ikr}} \Phi(\alpha, \omega, \omega_0) d\alpha \\
 &\cong \frac{G(\theta, \varphi, \zeta)}{\pi i} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{-ikr}} \int_{C_\pi} e^{-2ikr \cos^2(\alpha/2)} \\
 &\quad \times \frac{-\frac{1}{2} \sin(\alpha/2)}{[\cos(\alpha/2) - \cos(\alpha_\zeta(\theta)/2)]^{1-\mu}} d\alpha, \quad (43)
 \end{aligned}$$

где

$$G(\theta, \varphi, \zeta) = \frac{(-2)^\mu C_0(\varphi)}{\left(\cos \frac{\zeta + \theta_1 - \theta}{2}\right)^\mu} \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}}.$$

С помощью замены переменной интегрирования $\tau = \sqrt{4i} \cos(\alpha/2)$, некоторых преобразований и асимптотической оценки интеграла в (43) приходим к

$$U_{WP}(kr, \omega) = \frac{G(\theta, \varphi, \zeta)(4i)^{-\mu/2}}{\pi i} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{-ikr}} \int_{C'_\pi} \frac{e^{-kr\tau^2/2}}{[\tau - \tau_\zeta(\theta)]^{1-\mu}} d\tau, \quad (44)$$

где $\tau_\zeta(\theta) = \sqrt{4i} \cos[\alpha_\zeta(\theta)/2]$ и C'_π образ C_π на плоскости τ . Далее мы преобразуем интеграл в (44) асимптотически. Контур C'_π дополним полубесконечными частями, уходящими в $\pm\infty$ (с экспоненциально малой ошибкой в асимптотике). Заменяем переменную интегрирования τ на $z = \tau - \tau_\zeta(\theta)$, затем деформируем полученный контур интегрирования в R' , который совпадает с $(-\infty, \infty)$ и охватывает конец разреза для $z^{-1+\mu}$ в верхней полуплоскости. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{C'_\pi} \frac{e^{-kr\tau^2/2}}{[\tau - \tau_\zeta(\theta)]^{1-\mu}} d\tau &\cong -e^{-kr\tau_\zeta^2(\theta)/2} \int_{R'} e^{-kr(z^2/2 + \tau_\zeta(\theta)z)} z^{-1+\mu} dz \\
 &= -\frac{e^{-2ikr \cos^2 \frac{\alpha_\zeta(\theta)}{2}}}{(kr)^\mu} \int_{R'} e^{-(z^2/2 + \sqrt{kr}\tau_\zeta(\theta)z)} z^{-1+\mu} dz.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание последний интеграл, из (44) находим

$$U_{WP}(kr, \omega) = -\frac{1}{\pi i} \frac{G(\theta, \varphi, \zeta)}{(4i)^{\mu/2} (kr)^\mu} \frac{e^{-ikr \cos \alpha_\zeta(\theta)}}{\sqrt{-ikr}} \times W_{\mu-1}(\sqrt{kr} \tau_\zeta(\theta)) (1 + O([kr]^{-1/2})) \quad (45)$$

вместе с

$$W_{\mu-1}(\sqrt{kr} \tau_\zeta(\theta)) = \int_{R'} e^{-(z^2/2 + \sqrt{kr} \tau_\zeta(\theta) z)} z^{-1+\mu} dz.$$

В формуле (45) интеграл выражается в терминах функций параболического цилиндра (Вебера) $D_r(\cdot)$ (см., например, [17], стр. 356, [18,19])

$$W_r(s) = \int_{R'} e^{-(z^2/2 + sz)} z^r dz = \sqrt{2\pi} e^{r\pi i/2} e^{s^2/4} D_r(is).$$

Формула (45) дает искомое выражение для ВВдП компоненты в асимптотике дальнего поля. Очевидно, что для любого $kr \gg 1$ существует область значений (θ, ζ) , удовлетворяющая неравенствам (17), (18), такая, что для этих значений параметров поле в пограничном слое описывается функцией параболического цилиндра. Как уже обсуждалось в предыдущем параграфе, геометрическая фаза (фаза Берри) также проявляется благодаря множителю $(kr)^{-\mu}$.

Если точка наблюдения сдвигается во внешность пограничного слоя Вейля–Ван дер Поля (18), т.е. $\sqrt{kr}(\theta - \theta_1) = O([kr]^\epsilon)$, специальная функция в (45) заменяется старшим членом асимптотики и мы приходим к известному выражению для сферической волны, распространяющейся от вершины в бесконечность (сравните в (20))

$$U_{WP}(kr, \omega) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi(\pi, \omega, \omega_0) \frac{e^{ikr}}{-ikr} (1 + O(\frac{1}{kr}))$$

где подразумевается приближение

$$\Phi(\pi, \omega, \omega_0) = 2^{\mu-1} C_0(\varphi) \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}} \left[\cot \left(\frac{\alpha_\zeta(\theta)}{2} \right) \right]^{\mu-1} (1 + O([kr]^{-1/2+\epsilon})),$$

$kr \rightarrow \infty$, $\epsilon > 0$ малое.

§5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной работе мы получили новые асимптотические выражения аналогичные классической формуле Вейля–Ван дер Поля для двух канонических задач дифракции, а именно, для задач дифракции на клине и конусе в акустике. Нет никаких сомнений, что аналогичные результаты могут быть получены в задачах электромагнетизма и упругости. Однако, соответствующие аналитические средства должны быть развиты.

§6. ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция u_ν удовлетворяет задаче

$$[\Delta_\omega + (\nu^2 - 1/4)] u_\nu(\omega, \omega_0) = 0 \tag{46}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_\nu}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} = \eta A \hat{u}_\nu|_{\theta=\theta_1}, \quad \hat{u}_\nu = u_\nu + u_\nu^i, \tag{47}$$

где

$$A \hat{u}_\nu|_\sigma := \frac{1}{2i} \int_{i\mathbb{R}} \frac{t \sin(\pi t) \hat{u}_\nu|_\sigma dt}{\cos(\pi \nu) + \cos(\pi t)}.$$

Ищется решение задачи (46) and (47) в виде (31), где $\theta = \theta_1$ уравнение σ контура на сфере S^2 . Из формулы суммирования для функций Лежандра получаем представление

$$\begin{aligned} u_\nu^i(\omega, \omega_0) &= -\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \hat{\theta}(\omega, \omega_0))}{4 \cos(\pi \nu)} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\varphi} R_i(\nu, n) \frac{P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos \theta)}{d_{\theta_1} P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos \theta_1)}, \end{aligned} \tag{48}$$

$$0 < \theta_0 < \theta, \quad \cos \hat{\theta}(\omega, \omega_0) = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \sin(\varphi - \varphi_0), \quad \varphi_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} R_i(\nu, n) &= \frac{i^n}{-4 \cos(\pi \nu)} \frac{\Gamma(\nu + |n| + 1/2)}{\Gamma(\nu - |n| + 1/2)} \\ &\quad \times d_{\theta_1} P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos \theta_1) P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos \theta_0). \end{aligned}$$

Ряд (31) является решением уравнения (46). Подставляя (31) и (48) в граничное условие, получаем уравнение для $R(\nu, n)$ ($\nu \in i\mathbb{R}$)

$$R(\nu, n) = \frac{1}{2} \eta \int_{i\mathbb{R}} \frac{w(t, n) \sin(\pi t) R(t, n)}{\cos(\pi t) + \cos(\pi \nu)} dt + S_i(\nu, n), \tag{49}$$

$$S_i(\nu, n) = -R_i(\nu, n) + \frac{\eta}{2} \int_{i\mathbb{R}} \frac{w_i(t, n) \sin(\pi t) R_i(t, n)}{\cos(\pi t) + \cos(\pi \nu)} dt,$$

$$w(\nu, n) = -i\nu \frac{P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos \theta_1)}{d_{\theta_1} P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos \theta_1)},$$

$$w_i(\nu, n) = -i\nu \frac{P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos \theta_1)}{d_{\theta_1} P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos \theta_1)}.$$

Замечание. Легко проверить, что $R(\nu, n)$ является решением уравнения

$$R(\nu + 1, n) - R(\nu - 1, n) = -2i[\eta w(\nu, n)R(\nu, n) - G_i(\nu, n)], \quad (50)$$

n параметр и

$$G_i(\nu, n) = (i/2) [R_i(\nu + 1, n) - R_i(\nu - 1, n)] - \eta w_i(\nu, n)R_i(\nu, n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. L. M. Brekhovskikh, *Waves in layered media*, Academic Press, 1960.
2. V. A. Fock, *Electromagnetic diffraction and propagation problems*. (Int. Series of Monographs on Electromagnetic waves I) Pergamon Press Oxford UK, 1965.
3. Yu. A. Kravtsov, N. Y. Zhu, *Theory of Diffraction. Heuristic Approach*. Alpha Science Ser Wave Phenom Alpha Science Oxford UK, 2010.
4. C. F. Chien, W. W. Soroka, *Sound propagation along an impedance plane*. — J. Sound and Vibration **43** (1975), вып. 1, 9–20.
5. C. F. Chien, W. W. Soroka, *A note on the calculation of sound propagation along an impedance surface*. — J. Sound and Vibration **63** (1980), вып. 2, 340–343.
6. C. Nocke, V. Mellert, T. Waters-Fuller, K. Attenborough, K. M. Li, *Impedance deduction from broad-band, point-source measurements at grazing incidence*. — Acustica (Acta Acustica) **83** (1997), 1085–1090.
7. K. Attenborough, K. M. Li, K. Horoshenkov, *Predicting outdoor sound*. Taylor and Frensis, 2007.
8. F. Golay, G. Dutilleux, L. Simon, C. Ayruilt, F. Poisson, *Simplified model of a harmonic point source moving above an impedance ground*. Societe Francaise, d'Acoustique, Acoustics. Apr. 2012, Nantes France (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00810554>).
9. G. D. Malyuzhinets, *Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances*. Soviet Phys.: Doklady **3**, вып. 4 (1958), 752–755.
10. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov, *Diffraction Theory. The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique*. — Alpha Science Ser. Wave Phenom., Alpha Science Oxford UK, 2008.

11. J.-M. L. Bernard, *Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction d'ondes par une singularité conique: équation intégrale de noyau non oscillant pour le cas d'impédance constante*, rapport CEA-R-5764, Editions Dist-Saclay, 1997. (erratum in J Phys A, 32 L45), an extended version in *Advanced Theory of Diffraction by a Semi-infinite Impedance Cone* 2014 Alpha Science Ser Wave Phenom Alpha Science Oxford UK.
12. J.-M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, Diffraction of acoustic waves by an impedance cone of an arbitrary cross-section *Wave Motion* 33 155-181 (erratum : p.177 replace $O(1/\cos(\pi(\nu - b)))$ by $O(\nu^d \sin(\pi\nu)/\cos(\pi(\nu - b)))$).
13. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions* (Mario Boella Series on Electromagnetism in Information & Communication) Edison NJ SciTech-IET USA, 2013.
14. M. A. Lyalinov, *Scattering of an acoustic axially symmetric surface wave propagating to the vertex of a right-circular impedance cone*, *Wave Motion* **47(4)** (2009), 241–252.
15. М. В. Федорюк, *Асимптотика, интегралы и ряды*, Наука СССР, 1977.
16. M. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, *Proc Roy Soc Ser A* **382** (1802), 45–57.
17. N. Bleistein, *Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary point near algebraic singularity*, *Comm. Pure Appl. Math.* **19(4)** (1966), 353–370.
18. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 4th ed. Academic Press, Orlando, 1980.
19. V. M. Babich, *On PC-Ansätze*, *J. Math. Sci.* **132(11)** (2006), 2–10.

Lyalinov M. A. Weyl–Van der Poll phenomenon in acoustic diffraction by a wedge or cone with impedance boundary conditions.

The work deals with the asymptotic description of the diffraction pattern which is analogous to the classical Weyl–Van der Poll phenomenon (the Weyl–Van der Poll formula). The latter arises in the problem of diffraction of waves generated by a source located near an impedance plane. The incident wave illuminates an impedance wedge or cone. The singular points of the wedge's (the edge points) or cone's (the vertex of the cone) boundary play the role of an imaginary source giving rise to the specific boundary layer in some vicinity of the corresponding impedance surface provided the surface impedance is relatively small.

From the mathematical point of view the description of the phenomenon is given by means of the far field asymptotics for the Sommerfeld integral representations of the scattered field. For the small impedance of the scattering surface the singularities describing the surface wave, which propagates from the edge (or from the vertex) along the impedance surface, may be located in a neighborhood of the saddle points. The latter are responsible for the cylindrical wave from the edge of the wedge (or for the

spherical wave from the vertex of the cone). As a result, the asymptotics of the Sommerfeld integral are uniformly represented by a Fresnel type integral for the wedge problem or by a parabolic cylinder type function for the cone problem.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия

Поступило 15 октября 2015 г.

E-mail: lyalinov@yandex.ru, m.lyalinov@spbu.ru