

В. А. Козлов, С. А. Назаров

## УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ РАЗВЕТВЛЯЮЩЕЙСЯ АРТЕРИИ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

**1. Мотивировка.** В американском научно-популярном журнале “The Economic Collapse” указано, что кровеносные сосуды человека (среднего роста, не баскетболиста), вытянутые в одну линию, образуют цепочку длиной 60000 миль (чуть меньше 100000 км), которой можно дважды опоясать земной шар по экватору. Этот любопытный, но совершенно бесполезный факт тем не менее демонстрирует, что кровеносная система, помещенная в весьма малый по планетарным масштабам объем человеческого тела, приобретают очень сложную топологическую структуру. Впрочем две ее крупные подсистемы, артериальная и венозная, по своему назначению – быстрый перенос и медленный, но полный сбор крови – реализованы как простые деревья<sup>1</sup>. В данной статье не рассматриваются сетки капилляров, пронизывающие все мягкие части тела и оказывающиеся более запутанными графами, на которые приходится подавляющее большинство разветвлений кровеносной системы, а их у каждого человека – миллиарды. Предмет статьи – одномерная модель артериальной системы, в которой число разветвлений снижается до двух-трех десятков, но все еще остается значительным. Планомерное построение адекватной модели дерева артерий начато в серии статей авторов [1–4] и к настоящему моменту лишено только одного, но весьма важного элемента – постановки условий сопряжения в точках разветвления сосудов, называемых в медицинских монографиях *бифуркациями*, так как артерии именно *раздваиваются* многократно, а трифуркации и более сложные перекрестья в этой подсистеме не встречаются.

---

*Ключевые слова:* бифуркация артерии, разветвление кровеносного сосуда, модифицированные условия Кирхгофа, упругие стенки, одномерная модель артерии, тонкие течения, матрица скачков давления.

Работа второго автора финансово поддержана университетом г. Линчёпинг (Швеция) и Санкт-Петербургским государственным университетом в рамках проекта 0.38.237.2014.

<sup>1</sup>Исключением является артериальная система мозга, содержащая цикл – виллизиев круг, выполняющий, в частности, компенсационные и страховочные функции.

Понятно, что без условий сопряжения создать приемлемую модель кровеносной системы невозможно, однако в современной литературе по хемодинамике они по сути отсутствуют, а предпринимаемые асимптотический анализ и численные эксперименты либо относятся к отдельным прямолинейным или искривленным фрагментам артерий, либо в одномерных моделях сочленений сосудов принимают классические условия сопряжения Кирхгофа, подразумевающие непрерывность давления или потенциала скоростей и равенства нулю суммарного потока из соединительного узла. Во многих задачах математической физики условия Кирхгофа адекватно отражают асимптотическую структуру решения и могут быть выведены строго, т.е. с оценками асимптотических остатков. Однако в случае бифуркации артерий обсуждаемые условия сопряжения не учитывают важнейшее природное свойство стенок сосудов – их эластичность и существенную жесткость на растяжение в окружном направлении. Именно взаимодействие стенок с течением крови и предопределяет функционирование кровеносной системы: сама по себе мускулатура сердца не в состоянии обеспечить продвижение крови, вязкоупругой и многокомпонентной жидкости, по разветвленному артериальному дереву достаточно большой суммарной длины (ср. начало раздела). Как установлено в работах [3, 4] и [5], эластичность здоровых стенок в значительной мере способствует прохождению крови по сосудам, но ослабление их упругих свойств вследствие разнообразных недугов или старения способно вызвать *противоток* крови (движение в направлении к сердцу), противоречащий самому назначению артерий и провоцирующий их аномальное функционирование и новые болезни. Разумеется, узлы сосудов, особенно их седловины, – один из опасных участков кровеносной системы, подверженный возникновению и накоплению вредоносных дефектов и способный разве лишь усугубить эффект противотока или привести к образованию других аномалий (см. обсуждение в п. 6).

Итак, при выводе условий сопряжения в точке ветвления одномерного изображения сосуда обязателен учет взаимодействия крови с тонкими упругими трехмерными стенками. Прежде всего периодическое расширение/сжатие узла вызывает локализованные течения, которые искажают первый закон Кирхгофа о суммарном потоке. Кроме того, воздействие напряженных стенок на массу крови может видоизменить (и определенно изменяет; ср. п. 5) и второй закон Кирхгофа о непрерывности давления. В итоге возникают модифицированные

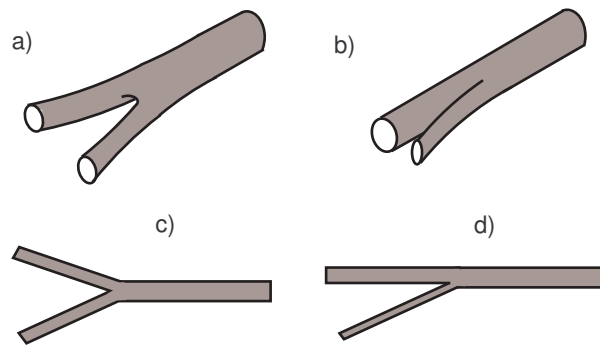


Рис. 1. Бифуркации – разветвление и ответвление артерий (a и b) и их плоские изображения (c и d).

условия Кирхгофа, включающие несколько дополнительных физических параметров, определение которых становится отдельным вопросом – на него полного ответа в данной статье нет.

На первый взгляд кажется, что правильный путь для поиска условий сопряжения в точке ветвления подсказывает теория пограничного слоя: нужно исследовать аналитически или численно решение пространственной задачи о течении жидкости внутри сочленения полубесконечных цилиндрических упругих труб (см. комментарии в п. 3). Не обращая пристального внимания на невероятную сложность самой задачи (нестационарные течения жидкости, упругие колебания армированных тонкостенных композитных конструкций и пр.), сразу же подчеркнем, что подготовка достоверных данных для нее вряд ли возможна даже при современном оснащении больниц медицинской аппаратурой, позволяющей делать изумительные операции. Во-первых, внешнее сканирование какого-то конкретного узла, например, подозреваемого в патологии, не дает полной информации ни о форме его просвета (протоки), ни о внутренней структуре стенки, а подводить к узлу эндоскопический катетер для детального обзора может быть опасно и поэтому запрещено в медицинской практике. Во-вторых, весьма приблизительная периодичность строения стенки сосуда, которая является многослойной упругой оболочкой, усиленной винтообразными семействами коллагеновых волокон, наверняка нарушается в зоне

сочленения сосудов с разными диаметрами сечений, а значит, осредненные двумерные модели принятые во всех теоретических исследованиях кровеносной системы и тем более в численных экспериментах, непригодны в самих узлах. В-третьих, количество бифуркаций в артериальном дереве все-таки велико, и поэтому осложненное описание этого элемента может привести к излишне загроможденной модели всего дерева и сделать такую модель бесполезной для практических целей. Наконец, медицинские работники способны предоставить лишь примитивную информацию о каждом конкретном пациенте среди множества последних, а воспринять и применить для лечения – только те результаты математической обработки данных, которые выражены в элементарных терминах.

На основании приведенных доводов авторы отдают предпочтение простейшей, в частности, линейной модели бифуркаций артерий, учитывающей только основные эффекты упругости стенок узлового соединения кровеносных сосудов: упомянутые неизбежные потери при формулировке математической задачи никак нельзя восполнить изощренным асимптотическим анализом или продвинутыми вычислительными схемами. Вместе с тем мы не отрицаем насущность детализированного (в трехмерной постановке с привлечением адекватных моделей крови и сосудистых оболочек) изучения самих узлов, остро необходимого, например, в нейрохирургии. Разрабатываемая общая модель артериального дерева позволит данные, полученные на периферийных (т.е. легкодоступных – см. описание в конце п. 2) участках тела, где многие усложняющие факторы не играют существенной роли, переносить в непосредственную близость к узлу, подозрительному на патологию, и тем самым существенно сужать участок артерии, нуждающийся в скрупулезном описании. Более того, поскольку предлагаемая модель включает по меньшей мере четыре неизвестных параметра, трудно поддающихся экспериментальному определению, вычисление этих параметров также предполагается производить по измерениям на удалении от узла при помощи решения обратных задач. Вместе с тем далее предлагаются приблизительные расчеты каждого из вводимых новых параметров, причем предпочтение отдается предельно простым, “на физическом уровне строгости”, схемам, не обращающимся к полновесному асимптотическому анализу, – все равно нельзя получить полную информацию о геометрии и физическом строении объекта.

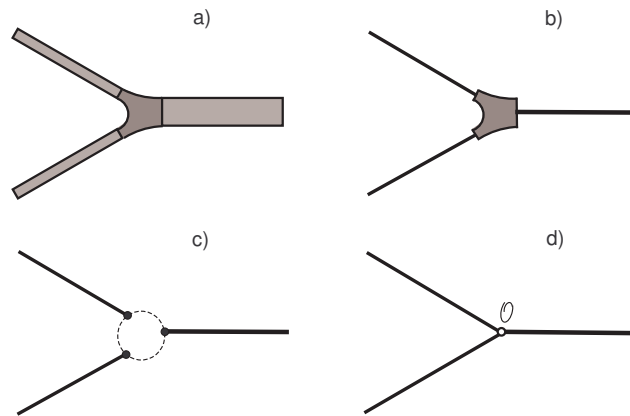


Рис. 2. Схема вывода условий сопряжения: искусственное выделение узла (а), применение одномерной модели на прямых участках артерии (b), замена узла условиями сопряжения (с) и перенос этих условий в центр бифуркации (d).

Кратко обрисует избранную схему вывода условий сопряжения в точке бифуркации. Сначала вычленим из разветвляющейся артерии узел  $G_l$  (тонирован на рис. 2, а), причем его линейный размер  $l$ , одинаковый в трех направлениях, не фиксируем. Затем отделенным прямолинейным участкам сосудов ставим в соответствие известные одномерные модели (ср. рис. 2, а и b). Далее при помощи ряда предположений и расчетов на физическом уровне строго моделируем взаимодействие пространственного течения крови с двумерными упругими стенками упрощенными дифференциально-алгебраическими соотношениями, связывающими значения искомым неизвестных в точках с координатами  $l$  (рис. 2, с). Наконец, распространяем модель на полные ( $l = 0$ ) отрезки и переносим условия сопряжения в общую точку  $O$  (рис. 2, d). Принципиальным моментом послужит тот факт (см. п. 4), что финальные формулы не должны зависеть от начального выбора размера  $l$ .

**2. Описание модели прямого участка артерии.** Сочленение  $\Xi$  трех ( $\alpha = 0, \pm$ ) кровеносных сосудов изображено на рис. 1 и состоит из тонких цилиндров  $\Omega^\alpha$  и соединительного узла  $G_l$  (рис. 2, а). С каждым из цилиндров связана своя система декартовых координат  $x^\alpha = (y^\alpha, z^\alpha) = (y_1^\alpha, y_2^\alpha, z^\alpha)$ , причем продольные координаты изменяются в следующих пределах:

$$z^\alpha \in (l, L_\alpha), \quad \alpha = 0, \pm. \quad (1)$$

Здесь  $L_\alpha$  – длины рассматриваемых участков сосудов, а параметр  $l > 0$  введен искусственно и определяет размер (во всех направлениях) узла, выделенного из сочленения  $\Xi$ , т.е.

$$G_l = \{x \in \Xi : z^\alpha < l, \alpha = 0, \pm\}. \quad (2)$$

При этом  $x = (x_1, x_2, x_3)$  – глобальная система координат и, разумеется,  $l \ll \min L_\alpha$ .

Как обычно, сечения сосудов  $\Omega^\alpha$  предполагаем круговыми<sup>2</sup>, а именно,

$$\Omega^\alpha = \{x : z^\alpha \in (l, L_\alpha), |y^\alpha| < R_\alpha\}, \quad \alpha = 0, \pm. \quad (3)$$

Радиусы  $R_\alpha$  считаем малыми в сравнении с длинами сосудов, а малость параметров  $\delta_\alpha = R_\alpha/L_\alpha$  подразумевает возможность применения процедуры [6] понижения размерности в уравнениях Навье–Стокса, описывающих по предположению течение крови. Не будем воспроизводить соответствующие вычисления, подробно изложенные в публикациях авторов [2, 4, 7, 8] и не востребованные в данной работе. Более того, опустим описание двумерной модели тонких (с толщиной  $h_\alpha R_\alpha$ , причем  $h_\alpha$  – еще одна группа малых параметров) многослойных стенок сосудов, полученных в [1, 2] на основе алгоритма [9, 10] – эти модели также далее не понадобятся. Еще не будем указывать обычные ограничения на естественные безразмерные параметры системы кровь/стенки сосудов (числа Рейнольдса, Вормслея и пр.), которые (ограничения) обеспечивают корректность асимптотического анализа. Дело в том, что далее мы оперируем только с предельными системами дифференциальных уравнений по времени  $t \in [0, T]$  и координатам (1), а также несколькими стандартными характеристиками крови, стенок сосудов и их взаимодействия. При выводе условий

<sup>2</sup>В работах [1, 2] установлено, что такая форма здорового и неповрежденного сосуда оптимальна.

сопряжения удобно пользоваться размерными величинами – отсылаем читателя к статьям [7, 8], которые в отличие от [1–4] используют именно такую форму записи.

Изучаем периодическое течение, причем  $1/T$  – частота пульса. Через  $u^\alpha(z, t)$  и  $p^\alpha(z, t)$  обозначаем соответственно радиальное смещение стенки сосуда  $\Omega^\alpha$  и среднее по сечению  $\{x \in \Omega^\alpha : z^\alpha = z\}$  давление в потоке. В одномерной модели [3, 4, 7] эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям ( $\alpha = 0, \pm$ )

$$R_\alpha^{-1} K_\alpha u^\alpha(z^\alpha, t) + R_\alpha h_\alpha \gamma_\alpha \partial_t^2 u^\alpha(z^\alpha, t) = \gamma p^\alpha(z^\alpha, t), \quad (z^\alpha, t) \in \Upsilon_l^\alpha, \quad (4)$$

$$2\pi R_\alpha \partial_t u^\alpha(z^\alpha, t) - \frac{\pi}{8\nu} R_\alpha^4 \partial_z^2 p^\alpha(z^\alpha, t) = 0, \quad (z^\alpha, t) \in \Upsilon_l^\alpha := (l, L_\alpha) \times (0, T). \quad (5)$$

Помимо геометрических размеров  $R_\alpha$ ,  $R_\alpha h_\alpha$  и  $L_\alpha$  модель использует несколько физических и механических характеристик, разумеется, положительных: коэффициент динамической вязкости  $\nu$  и плотность  $\gamma$  крови, а также осредненные плотность  $\gamma_\alpha$  материала и упругий модуль  $K_\alpha$  стенки сосуда  $\Omega^\alpha$  в окружном направлении. Формулы для последней величины можно найти, например, в публикациях [1, 2, 5]. Система (4), (5) обладает свойствами как гиперболического, так и параболического уравнений, решения которых обладают сильно различающимися свойствами. Именно поэтому только вполне определенные соотношения между упомянутыми параметрами (отвечающие здоровой артерии) обеспечивают нормальное функционирование системы кровь/стенка сосуда. В работах [3, 4] и [5] приведены результаты асимптотического и численного анализа, показывающие, что рассогласование параметров (в реальности – одрябление или расслоение сосудистых оболочек вследствие старости и болезней или повреждения при травмах и неумелом хирургическом вмешательстве) приводит к аномальному поведению системы, в частности, возникновению противотоков (течениях в направлении к сердцу).

Обычно уравнения (4), (5) снабжаются условиями периодичности по времени:

$$u^\alpha(z^\alpha, 0) = u^\alpha(z^\alpha, T), \quad \partial_t u^\alpha(z^\alpha, 0) = \partial_t u^\alpha(z^\alpha, T), \quad (6)$$

$$p^\alpha(z^\alpha, 0) = p^\alpha(z^\alpha, T), \quad z^\alpha \in (l, L_0).$$

На “входе”, т.е. в принимающем сосуде  $\Omega^0$  на уровне  $z^0 = L_0$  зафиксирована зависимость потока крови от времени

$$-\frac{\pi}{8\nu}R_0^4\partial_z p^0(L_0, t) = \Phi(t), \quad t \in (0, T). \quad (7)$$

Наконец, на двух “выходах”, т.е. на внешних концах выделенных участков сосудов  $\Omega^\pm$  придадим давлению “периферийное” значение

$$p^\pm(L_\pm, t) = p_\infty, \quad t \in (0, T). \quad (8)$$

Подчеркнем, что уравнения (4) и (5) заданы на укороченных отрезках  $(l, L^\alpha)$  и нам еще предстоит распространить их на отрезки  $(0, L^\alpha)$ , соединяющиеся в точке  $\mathcal{O}$  (ср. формулу (1) и см. схему на рис. 2, с и d).

Остановимся кратко на подготовке данных, вошедших в условия периодичности (6) и краевые условия (7), (8). Наиболее просто измерить при помощи хронометра частоту пульса  $1/T$ . Вторым по простоте на первый взгляд кажется определение давления – каждый многократно подвергался этой процедуре на приеме у терапевта, причем автоматические тонометры на батарейках теперь есть у большинства людей с сердечно-сосудистыми заболеваниями. Вместе с тем набор позиций, допускающих применение такой аппаратуры, весьма ограничен: плечо, бедро, голеностоп, подколенная ямка. Более того, сам по себе прибор примитивен (потому общепринят) и не позволяет достичь точности, приемлемой для аккуратного прогнозирования. В любом случае доступна информация только о периферийном давлении, а на пути от конкретного узла артерии до ее периферии может встретиться несколько других узлов, т.е. включение величины давления в список данных задачи почти наверняка потребует рассмотрение целого дерева сосудов.

Как ни странно, наиболее точно измеряемым данным является кровяной поток  $\Phi(t)$  из краевого условия (7), причем несложно на практике определить и его распределение по времени. Для этого существуют две процедуры, привнесенные в медицину математиками и физиками, – *ультра-звуковое исследование (УЗИ)* и *магнитно-резонансная томография (МРТ)*; см. соответственно монографии [11] и [12]. Достаточно дешевым и распространенным (исходная аппаратура имеется даже в районных поликлиниках) стал метод УЗИ, однако он предоставляет лишь оценочные характеристики потоков крови в доступных к сканированию сосудах, а точность измерений существенно зависит от



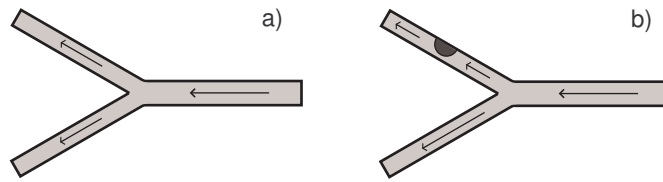


Рис. 3. Разное распределение потоков крови в здоровой разветвляющейся артерии (а) и при тромбозе одного из ответвлений (б).

профессионализма и опыта оператора (ср. инструкции в справочнике [11, гл. 2]). Метод МРТ, требующий более оснащенной аппаратуры, но полностью компьютеризированный и потому более дорогой, дает превосходные результаты: точное табулирование по времени и местоположению потоков крови для нескольких сосудов одновременно с высокой степенью разрешения, однако, к сожалению, не предоставляет информации об артериальном давлении. Именно этот метод планируется использовать для подготовки данных при решении обратных задач по определению параметров условий сопряжения в бифуркационных узлах. Как уже упоминалось, при этом придется рассматривать, может быть, длинные деревья сосудов с несколькими бифуркациями.

**3. Разнообразные подходы к моделированию течений в соединенных тонких сосудах и труб.** Кратко опишем несколько известных авторам приемов постановки искомым условий сопряжения и поясним причины, побудившие нас еще раз обратиться к этому вопросу.

1° *Эвристические модели.* Классическим является следующий *метрический закон Мюррея* бифуркации артерии (см. работу [13], а также книгу [14, § 3.3]):

$$R_0^3 = R_+^3 + R_-^3. \quad (9)$$

Этот закон был проверен экспериментально [15, 16], однако какого-либо теоретического подтверждения он до сих пор не получил, хотя с его помощью был решен ряд задач оптимизации ветвления артерий, впрочем при неясных формулировках и непонятных целях (см., в частности, монографию [14, § 3.3]). Подчеркнем, что третьи степени

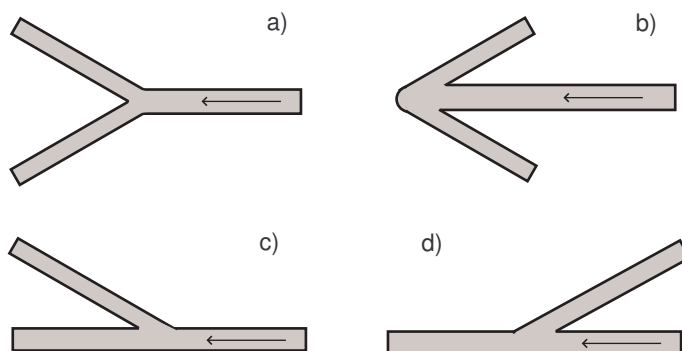


Рис. 4. Возможные (а и с) и невозможные (b и d) формы ветвления артерий. При формах b и d седловина узла испытывает значительно большие напряжения, чем при формах а и с. Стрелки указывают направление движения крови (от сердца).

радиусов достаточно часто появляются в гемодинамике, к примеру, отношение коэффициентов дифференциального уравнения (5) равно  $(16\nu)^{-1}R_\alpha^3$  (см. также замечание 3).

Закон Мюррея послужил причиной нескольких попыток (см. упоминания в книге [14, гл. 3]) вывести динамический закон распределения потоков при раздвоении артерии, однако их нельзя признать удачными. Такой, локальный, закон существовать не может, так как величины потоков, уходящие в дочерние сосуды, всегда определяется также и глобальными данными (ср. схему на рис. 3). Наиболее часто употребляемыми в прикладных моделях артериальных течений оказываются условия Кирхгофа в многочисленных интерпретациях (см. одну из последних публикаций [17] на эту тему и список литературы в ней, а также несколько более ранних обзоров в монографии [14]). В любом случае такие условия не принимают во внимание ни упругие свойства сосудов, ни большинство геометрических характеристик узлового соединения (ср. рис. 4). Предлагаемая далее модель лишена названных недостатков.

При разветвлении и ответвлении сосудов, изображенных на рис. 1, а и б, закон Мюррея (9) доставляет соотношения

$$R_+ = R_- \Rightarrow R_+ = R_- = R_0 \times 0,794\dots, \quad (10)$$

$$R_- = R_0 \times 0,5 \Rightarrow R_+ = R_0 \times 0,956\dots \quad (11)$$

Иными словами, радиус хотя бы одного из двух сосудов после бифуркации мало отличается от радиуса сосуда до бифуркации. Это наблюдение позволит далее в определенных ситуациях упростить полученные новые условия сопряжения (см. п. 4 и 5).

2° *Асимптотический анализ системы тонких соединяющих каналов с жесткими стенками.* Пусть сочленение  $\Xi^\varepsilon$  (любая из фигур на рис. 4) нескольких<sup>3</sup> каналов характеризуется единым малым параметром  $\varepsilon > 0$ , т.е.  $R_\alpha = \varepsilon r_\alpha$ , а радиусы  $r_0$  и  $r_\pm$  сравнимы по величине, причем  $\varepsilon \ll \max\{1, r_0^{-1}r_\pm\}$ .

В области  $\Xi^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$  рассмотрим стационарное течение Стокса<sup>4</sup>. Вектор скоростей  $\mathbf{v}^\varepsilon$  и давление  $\mathbf{p}^\varepsilon$  удовлетворяет системе однородных дифференциальных уравнений

$$-\nu \Delta_x \mathbf{v}^\varepsilon(x) + \nabla_x \mathbf{p}^\varepsilon(x) = 0, \quad -\nabla_x \cdot \mathbf{v}^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Xi^\varepsilon, \quad (12)$$

и условиям неприлипания

$$\mathbf{v}^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon, \quad (13)$$

на боковой поверхности сочленения. Неоднородные краевые условия на торцах  $\tau^{\alpha\varepsilon} = \{x \in \partial\Xi^\varepsilon : z^\alpha = L_\alpha\}$ , описывающие втекание и вытекание жидкости, востребованы не будут, но их, например, можно взять такими же, как в п. 2. Наконец,  $\nabla_x = \text{grad}$ ,  $\nabla_x \cdot = \text{div}$  и  $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$  — оператор Лапласа.

Асимптотические анзацы для течения в трубе  $\Omega^{\alpha\varepsilon} \subset \Xi^\varepsilon$  (далее называем их анзацем Рейнольдса–Пуазейля) выглядят следующим образом:

$$\mathbf{p}^\varepsilon(x) = p^\alpha(z^\alpha) + \dots, \quad (14)$$

<sup>3</sup>Для согласования с предшествующим материалом считаем, что каналов три ( $\alpha = 0, \pm$ ), хотя в используемой далее работе [18] количество каналов произвольно, а их сечения не обязательно являются круговыми и могут отличаться одно от другого.

<sup>4</sup>При условии относительной малости потоков аналогичные асимптотические результаты [6, 18] верны и для нелинейных уравнений Навье–Стокса.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{y_i^\alpha}^\varepsilon(x) &= 0 + \dots, \quad i = 1, 2, \\ \mathbf{v}_{z^\alpha}^\varepsilon(x) &= \frac{\varepsilon^2}{4\nu}(r_\alpha^2 - \varepsilon^{-2}|y_\alpha|^2)\partial_z p^\alpha(z^\alpha) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{y_i^\alpha}^\varepsilon$  и  $\mathbf{v}_{z^\alpha}^\varepsilon$  – скорости вдоль осей  $y_i^\alpha$  и  $z^\alpha$ . Поток через сечение в положительном направлении оси  $z^\alpha$  вычисляется по формуле

$$\int_{|y^\alpha| < \varepsilon r_\alpha} v_{z^\alpha}^\varepsilon(x) \Big|_{z^\alpha = z} d\eta^\alpha = \varepsilon^4 \frac{\pi r_\alpha^4}{8\nu} =: \varepsilon^4 A_\alpha. \quad (16)$$

Неизвестные функции  $p^\alpha$ ,  $\alpha = 0, \pm$ , удовлетворяют классическим одномерным уравнениям Рейнольдса

$$-A_\alpha \partial_z^2 p^\alpha(z^\alpha) = 0, \quad z^\alpha \in (0, L_\alpha), \quad \left( A_\alpha = \frac{\pi r_\alpha^4}{8\nu}, \quad \alpha = 0, \pm \right) \quad (17)$$

(ср. уравнения (3), в которых нужно положить  $u^\alpha = 0$  ввиду жесткости стенок). Граничные условия на концах  $z^\alpha = L_\alpha$  ставить не будем, но для согласования решений  $p^\alpha(z^\alpha)$  в общей точке  $\mathcal{O}$  с координатами  $z^\alpha = 0$  применим метод сращиваемых разложений (см., например, монографии [19, 20]) и произведем растяжения координат относительно центра узла  $G_i^\varepsilon$ :

$$x \mapsto \xi = \varepsilon^{-1}(x - \mathcal{O}). \quad (18)$$

При этом после формального перехода к  $\varepsilon = 0$  множество  $\Xi^\varepsilon$  трансформируется в неограниченную область  $\Xi^1$  с тремя выходами на бесконечность в виде полуцилиндров  $\Omega^{1\alpha} = \{\xi : |\eta^\alpha| < r_\alpha, \zeta^\alpha > 0\}$ , где  $\alpha = 0, \pm$  и  $\xi^\alpha = (\eta^\alpha, \zeta^\alpha)$  – локальные декартовы координаты, получающиеся аналогичным (18) растяжением координат  $(y^\alpha, z^\alpha)$ .

Как обычно, для применения процедуры сращивания требуется найти все решения задачи Дирихле для уравнений Стокса в  $\Xi^1$ , имеющие не более чем степенной рост на бесконечности,

$$-\nu \Delta_\xi V(\xi) + \nabla_\xi P(\xi) = 0, \quad -\nabla_\xi \cdot V(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi^1, \quad (19)$$

$$V(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi^1. \quad (20)$$

Одно из таких решений очевидно – постоянное давление

$$P^0(\xi) = 1, \quad V^0(\xi) = 0.$$

Остальные линейно независимые решения получены в статье<sup>5</sup> [18]. Именно, имеются еще два (плюс и минус) решения  $(P^\pm, V^\pm)$ , порожденные единичным потоком жидкости, которая втекает в рукав  $\Omega^{10}$  из бесконечности и полностью истекает в рукав  $\Omega^{1\pm}$ . Эти решения допускают представления

$$P^\pm(\xi) = -\chi_0(\xi)\mathcal{P}^0(\xi) + \chi_\pm(\xi)(\mathcal{P}^\pm(\xi) + Q_{\pm\pm}) + \chi_\mp(\xi)Q_{\pm\mp} + \tilde{P}^\pm(\xi), \quad (21)$$

$$V^\pm(\xi) = -\chi_0(\xi)\mathcal{V}^0(\xi) + \chi_\pm(\xi)\mathcal{V}^\pm(\xi) + \tilde{V}^\pm(\xi). \quad (22)$$

В написанных формулах фигурируют классические решения Пуазейля в бесконечном круговом цилиндре

$$\mathcal{P}^\alpha(\xi) = -\frac{\zeta^\alpha}{A_\alpha}, \quad \mathcal{V}_{\eta_i^\alpha}^\alpha(\xi) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathcal{V}_{\zeta^\alpha}^\alpha(\eta^\alpha) = \frac{r_\alpha^2 - |\eta_\alpha|^2}{4\nu A_\alpha}, \quad (23)$$

нормированные условием единичного потока в направлении оси  $\zeta^\alpha$ , т.е.

$$\int_{\eta: |\eta| < r_\alpha} \mathcal{V}_{\zeta^\alpha}^\alpha(\eta) d\eta = \frac{4}{r_\alpha^4} \int_0^{r_\alpha} (r_\alpha^2 - \rho^2) \rho d\rho = 1, \quad (24)$$

и локализованные в рукаве  $\Omega^{1\alpha}$  при помощи срезающих функций  $\chi_\alpha$ ,  $\chi_\alpha(\xi) = 1$  при  $\zeta^\alpha > 2r_\alpha$ ,  $\chi_\alpha(\xi) = 0$  при  $\zeta^\alpha < r_\alpha$ ,  $\chi_\alpha(\xi) = 0$  при  $\xi \in \Xi^1 \setminus \Omega^{1\alpha}$ . Кроме того,  $\tilde{P}^\pm(\xi)$  и  $\tilde{V}^\pm(\xi)$  – экспоненциально затухающие остатки, а числа  $Q_{\pm\pm}$  и  $Q_{\pm\mp}$  в представлении (21) давления образуют матрицу размером  $2 \times 2$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{++} & Q_{+-} \\ Q_{-+} & Q_{--} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

называемую *матрицей скачков давления* и оказывающуюся симметричной (равенство  $Q_{+-} = Q_{-+}$  проверяется подстановкой пар  $(P^+, V^+)$  и  $(P^-, V^-)$  в формулу Грина на усеченном множестве  $\Xi^1(T) = \{\xi \in \Xi^1 : \zeta^\alpha < T\}$  и предельным переходом  $T \rightarrow +\infty$ ; см., например, статью [18]).

Приступим собственно к сращиванию асимптотик и возьмем в качестве *внутреннего разложения* линейные комбинации

$$\varepsilon \sum_{\pm} c_{\pm}^\varepsilon V^\pm(\xi). \quad (26)$$

<sup>5</sup>В ней используются несколько иные обозначения, поскольку все выходы на бесконечность считаются равноправными, а здесь, как и ранее в п.2, выделен основной – “принимающий” – полуцилиндр  $\Omega^{10}$ .

$$c_0^\varepsilon P^0(\xi) + \sum_{\pm} c_{\pm}^\varepsilon P^\pm(\xi). \quad (27)$$

Дополнительный множитель  $\varepsilon$  приставлен к скоростям в согласии с общим алгоритмом построения пограничных слоев (см., например, книгу [21, гл. 4]): он нужен потому, что в первом уравнении (12) вектор  $\mathbf{v}^\varepsilon$  дифференцируется дважды, а скаляр  $\mathbf{p}^\varepsilon$  — только один раз.

При помощи формулы Тейлора по переменной  $z^\alpha$  перепишем *внешние разложения* (14) и (15) в виде

$$\mathbf{p}^\varepsilon(x) = p^\alpha(0) + z^\alpha \partial_z p^\alpha(0) + \dots = p^\alpha(0) + \varepsilon \zeta^\alpha \partial_z p^\alpha(0) + \dots, \quad (28)$$

$$\mathbf{v}^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^2}{4\nu} \left( r_\alpha^2 - \frac{|y_\alpha|^2}{\varepsilon^2} \right) \partial_z p^\alpha(0) + \dots = \frac{\varepsilon^2}{4\nu} (r_\alpha^2 - |\eta^\alpha|^2) \partial_z p^\alpha(0) + \dots \quad (29)$$

Сравнивая коэффициенты при постоянных и линейных функциях в представлениях (28) и (27), приходим при учете соотношений (21) и (23) к равенствам

$$p^0(0) = c_0^\varepsilon, \quad p^\pm(0) = c_0^\varepsilon + Q_{\pm+} c_+^\varepsilon + Q_{\pm-} c_-^\varepsilon,$$

$$\varepsilon A_0 \partial_z p^0(0) = -c_+^\varepsilon - c_-^\varepsilon, \quad \varepsilon A_\pm \partial_z p^\pm(0) = c_\pm^\varepsilon,$$

в которых фигурируют величины  $A_\alpha$  из (16) и (17), (23). Эти соотношения также гарантируют сращивание главных членов асимптотик (15), (29) и (26) вектора скоростей и влекут за собой соотношения

$$c_0^\varepsilon = p^0(0), \quad c_\pm^\varepsilon = \varepsilon A_\pm \partial_z p^\pm(0)$$

и

$$p^\pm(0) = p^0(0) + \varepsilon Q_{\pm+} A_+ \partial_z p^+(0) + \varepsilon Q_{\pm-} A_- \partial_z p^-(0), \quad (30)$$

$$-A_0 \partial_z p^0(0) = A_+ \partial_z p^+(0) + A_- \partial_z p^-(0). \quad (31)$$

Равенства (30) и (31) представляют собой искомые условия сопряжения в точке  $\mathcal{O}$ , т.е. при  $z^\alpha = 0$ . Если сделать в них логичный предельный переход  $\varepsilon \rightarrow +0$ , то последние слагаемые в (30) исчезнут и в результате возникнут классические условия Кирхгофа

$$p^\pm(0) = p^0(0), \quad (32)$$

$$A_0 \partial_z p^0(0) + A_+ \partial_z p^+(0) + A_- \partial_z p^-(0) = 0, \quad (33)$$

означающие соответственно непрерывность давления и обращение в нуль суммарного потока жидкости из узла сочленения (ср. формулы (16) и (24)).

Поясним, почему в условиях сопряжения (30) предпочтительно оставить последние два члена, вообще говоря, малые. Дело в том, что решения  $p^\alpha$  дифференциальных уравнений (17) – линейные функции

$$p^\alpha(z^\alpha) = K_\alpha^0 + K_\alpha^1 z^\alpha, \quad \alpha = 0, \pm. \quad (34)$$

Шесть коэффициентов  $K_\alpha^p$  могут быть найдены из трех условий (31), (30), а также трех краевых условий в точках  $z^\alpha = L_\alpha$ , не обсуждающихся в данном разделе. При этом величины  $K_\alpha^p = K_\alpha^p(\varepsilon)$  оказываются рациональными функциями малого параметра  $\varepsilon$ , так как определяются из системы линейных алгебраических уравнений с неособенной матрицей, полиномиально (линейно) зависящей от  $\varepsilon$ . Построенные согласно (28), (29) и (34) функции

$$\mathbf{p}^\varepsilon(x) = K_\alpha^0(\varepsilon) + z^\alpha K_\alpha^1(\varepsilon),$$

$$\mathbf{v}_{y_i^\varepsilon}^\varepsilon(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{v}_{z^\alpha}^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^2}{4\nu} \left( r_\alpha^2 - \frac{|y^\alpha|^2}{\varepsilon^2} \right) K_\alpha^1(\varepsilon)$$

образуют течение Пуазейля на цилиндрических частях каналов  $\Omega^{\varepsilon\alpha}$ , а значит, полностью удовлетворяют системе Стокса<sup>6</sup> (12) и краевым условиям прилипания (13), суженным на указанные части и их боковые поверхности соответственно.

Вблизи узла сочленения  $\Xi^\varepsilon$  возникает явление пограничного слоя (перешли от метода сращиваемых разложений к методу составных асимптотических разложений; ср. [21, гл. 2]). По определению соотношения (31) и (30) становятся условиями экспоненциального затухания пограничного слоя. В итоге получаем, что построенное приближенное решение оставляет в задаче (12), (13) экспоненциально малые при  $\varepsilon \rightarrow +0$  невязки. Таким образом, привлечение “отягощенных” условий сопряжения (31), (30) обеспечивает оценки асимптотических остатков с мажорантой  $Ce^{-\delta/h}$ ,  $\delta > 0$ , а применение классических условий Кирхгофа порождает несравненно бóльшие погрешности  $O(\varepsilon)$  в асимптотическом представлении давления и  $O(\varepsilon^3)$  в формуле для потока.

Отметим, что аналогичные приведенным в предыдущем абзаце выводы имеют место и для решения неоднородных уравнений Стокса

$$-\nu \Delta_x \mathbf{v}^\varepsilon(x) + \nabla_x \mathbf{p}^\varepsilon(x) = \mathbf{f}^\varepsilon(x), \quad -\nabla_x \cdot \mathbf{v}^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Xi^\varepsilon,$$

<sup>6</sup>Течение Пуазейля одновременно является решением нелинейных уравнений Навье-Стокса.

в наиболее интересном случае гравитационных сил  $\mathbf{f}^e(x) = g\gamma e_{\mathbf{z}}$ ; при этом  $g > 0$  – ускорение свободного падения,  $\gamma > 0$  – плотность жидкости, а  $e_{\mathbf{z}}$  – единичный вектор оси  $\mathbf{z}$ , в направлении которой действует гравитация. Дело в том, что такая специальная правая часть компенсируется нулевым вектором скоростей и давлением  $\mathbf{p}_g(x) = g\gamma\mathbf{z}$ . Последнее оставляет невязки разве лишь в краевых условиях на торцах  $\tau^{\varepsilon\alpha}$ , которые (невязки) опять-таки устраняются решениями типа пограничного слоя. Впрочем в задачах хемодинамики массовые силы обычно не рассматриваются – они иногда оказываются важными только при исследовании медленного венозного возврата крови к сердцу, особенно кровеносной системы мозга. О венозных течениях речь в данной статье не ведется (см. обсуждение в работах [3, 4]).

Преобразуем условие (30) к более удобному виду. При помощи равенства (33) находим, что

$$p^{\pm}(0) - p^0(0) = Q_{\pm}^{\#} A_{\pm} \partial_z p^{\pm}(0) - Q_0^{\#} A_0 \partial_z p^0(0). \quad (35)$$

Здесь

$$Q_{\pm}^{\#} = \varepsilon(Q_{\pm\pm} - Q_{\pm\mp}), \quad Q_0^{\#} = \varepsilon Q_{\pm\mp}, \quad (36)$$

причем в определении (36) принята во внимание симметричность матрицы скачков давления. Условия (35) отличаются от (30) тем, что в каждом из каналов  $\Omega^{\varepsilon\pm}$  связывают значения давлений  $p^{\pm}$ ,  $p^0$  и их производных, но не содержат перекрестных членов.

3° *Гибридные модели.* Часто употребляемыми и наиболее продвинутыми являются гибридные модели кровеносной системы (multiscale models). Их детальное описание, а также обширную литературу по этому вопросу можно найти в обзорных статьях [22, 23]. Укажем также монографию [24], в которой с тех же позиций рассмотрены тонкостенные и стержневые конструкции другой физической природы.

Само гибридное моделирование подразумевает объединение дифференциальных уравнений и краевых условий, заданных на областях различных размерностей (в нашем случае – трехмерных и одномерных; ср. рис. 2, b) в единую задачу, наследующую от своих элементов эллиптичность и/или вариационную постановку. Простейший пример – следующая задача Неймана для (разноразмерного) оператора Лапласа на сочленении  $\Xi$  отрезка  $I = \{x : x_1 \in (0, L), x_2 = 0\}$  и квадрата  $Q = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in (-H, 0), |x_2| < H/2\}$ :

$$-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1) = f(x_1), \quad x_1 \in (0, L), \quad -M \Delta U(x) = F(x), \quad x \in Q, \quad (37)$$



$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_1}(L) = 0, \quad M \frac{\partial U}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad x_1 < 0, \quad (38)$$

$$u(0) = U(0, x_2), \quad |x_2| < \frac{H}{2},$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_1}(0) + M \int_{-H/2}^{H/2} \frac{\partial U}{\partial n}(0, x_2) dx_2 = 0. \quad (39)$$

Вариационная постановка задачи (37)–(39) осуществляется на пространстве

$$\mathcal{H} = \{(u, U) \in H^1(0, L) \times H^1(Q) : u(0) = U(0, x_2), |x_2| < H/2\}$$

и приобретает вид

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_I + M (\nabla_x U, \nabla_x W)_Q = (f, w)_I + (F, W)_Q, \quad (40)$$

$$(v, W) \in \mathcal{H}.$$

Подчеркнем, что краевые условия Неймана (38) и второе условие сопряжения (39) оказываются естественными и вытекают из самого интегрального тождества (40). Задача обладает всеми свойствами обычной задачи Неймана: решение определено с точностью до аддитивной постоянной и существует при выполнении одного условия разрешимости  $(f, 1)_I + (F, 1)_Q = 0$ . Более того, при  $(f, F) \in L^2(I) \times L^2(Q)$  (пространства Лебега) решение вариационной задачи (40) попадает в  $H^2(I) \times H^2(Q)$  (пространства Соболева) и становится классическим решением задачи (37)–(39).

Общие приемы образования гибридных краевых задач на сочленениях областей различных размерностей можно найти, например, в статьях [25] и [26].

Успешные реализации намеченной схемы по сопряжению трехмерных уравнений Стокса на узле  $G_I$  и трех ( $\alpha = 0, \pm$ ) отрезках  $(l, L_\alpha)$  (рис. 2, b) представлены в упомянутых выше публикациях (см. также обширные списки литературы в книгах [22, 23] и [24]). Соответствующая вариационная постановка гибридной задачи Стокса–Рейнольдса естественным образом приспособлена к применению вычислительных схем и асимптотическому анализу. Легко преодолимыми оказываются и проблемы, вызванные появлением особенностей решений около ребер на границе пространственного узла (см. обсуждение в статье [27]).

В работах [28, 29] представлены варианты асимптотического анализа задачи о течениях в сочленении тонких труб с жесткими стенками. Принципиальным достижением вариационно-асимптотического метода, обращающегося к гибридным моделям, считается экспоненциальная точность  $O(e^{-\delta_0 \varepsilon^{-1/2}})$  приближения, для чего приходится в качестве размера  $l$  вычленяемых трехмерных узлов брать величину  $l_0 \sqrt{\varepsilon}$ , т.е. после растяжения (18) координат узел  $G_l^\varepsilon$  превращается в усеченное множество  $\Xi^1(l_0 \varepsilon^{-1/2}) = \{\xi \in \Xi^1 : \zeta^\alpha < l_0 \varepsilon^{-1/2}, \alpha = 0, \pm\}$  с конечными, но очень длинными при малом  $\varepsilon$  цилиндрическими отроутками. Возникновение большого геометрического параметра  $l_0 \varepsilon^{-1/2}$ , разумеется, не способствует эффективности применения любой вычислительной схемы, а при уменьшении длины  $l$  до приемлемой величины пропадает привлекательный результат о повышенной точности приближения. Вместе с тем, как упомянуто в п. 3, 2°, для частных задач гемодинамики (в статьях [28, 29] и других публикациях, посвященных течениям жидкости в трубах, массовые силы в правой части системы Стокса почему-то не предполагаются постоянными, хотя природный единственный источник их возникновения – гравитация) такая же, если не лучшая, точность достигается вычислением матрицы перепада давления (25) и решением нескольких линейных алгебраических уравнений. Подходы к практическому определению матрицы  $Q$  обсуждаются, например, в работе [27] и в принципе ее нахождение не встречает серьезных затруднений.

4° *Нестационарные уравнения Навье–Стокса.* Совсем недавние публикации [30–32] предоставляют математически строгую процедуру понижения размерностей для *нестационарной* системы уравнений Навье–Стокса на сочленении тонких труб с жесткими стенками. Эти результаты пока не нашли какого-либо применения в гемодинамике.

**4. Вывод первого условия сопряжения.** Общий закон неразрывности потока крови в выделенном узле (2) выглядит так:

$$0 = \int_{G_l} \nabla_x \cdot \mathbf{v}(x, t) dx = - \sum_{\alpha=0, \pm} \int_{\tau_\alpha} \mathbf{v}_{z^\alpha}(x, t) \Big|_{z^\alpha=l} dy^\alpha + \int_{\Gamma_l} \mathbf{v}_n(x, t) ds_x. \quad (41)$$

Сумму интегралов по сечениям  $\tau_\alpha = \{x \in \Omega^\alpha : z^\alpha = l\}$  сосудов (знак минус при ней возник по причине разнонаправленности внешней нормали  $n$  и оси  $z^\alpha$ ) вычислим при помощи анзаца Рейнольдса–Пуазейля

(15), (14), который конечно же сохраняется в модели [3, 4, 7]. Эта сумма равна

$$\frac{\pi}{8\nu} \sum_{\alpha=0,\pm} R_{\alpha}^4 \partial_z p^{\alpha}(l, t) + \dots \quad (42)$$

(ср. формулу (16), в которой  $\varepsilon r_{\alpha} = R_{\alpha}$ ). Как обычно, многоточием обозначаем младшие члены, несущественные для предпринимаемого асимптотического анализа.

Последний интеграл по боковой поверхности  $\Gamma_l = \partial G_l \setminus \bigcup_{\alpha=0,\pm} \overline{\tau_{\alpha}}$  узла  $G_l$  включает нормальную компоненту  $\mathbf{v}_n(x, t)$  вектора скорости  $\mathbf{v}(x, t)$ , т.е. при учете динамического условия прилипания  $\mathbf{v}_n(x, t) = \partial_t \mathbf{u}_n(x, t)$  на  $\Gamma_l$  представляет собой скорость изменения объема узла. В п. 1 уже упоминалось, что скорость  $\partial_t \mathbf{u}_n(x, t)$  движения стенки в нормальном направлении может быть найдена точно лишь после решения очень сложной трехмерной задачи и зависит от многих факторов. В искомой простейшей одномерной модели скорость приращения объема после понятной линеаризации можно принять равной

$$\sum_{\alpha=0,\pm} S_l^{\alpha} \partial_t u^{\alpha}(l, t) + \dots, \quad (43)$$

путем введения фиктивных площадей  $S_l^{\alpha}$  поверхностей, относящихся как к собственно бифуркационному узлу (см. далее пример 1), так и к искусственно введенным отрезкам длиной  $l$ .

Перейдем к последнему этапу намеченных в конце п. 1 действий – перенесем полученные соотношения в точку  $\mathcal{O}$  с координатами  $z^{\alpha} = 0$  (ср. рис. 2, с и d). Для обработки выражения (42) применим формулу Тейлора по переменной  $z^{\alpha}$  и при учете дифференциальных уравнений (5), которые распространим на удлиненные отрезки  $(0, L_{\alpha}) \ni z^{\alpha}$  (ср. изначальную формулу (1)), получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{8\nu} \sum_{\alpha=0,\pm} R_{\alpha}^4 \partial_z p^{\alpha}(l, t) &= \frac{\pi}{8\nu} \sum_{\alpha=0,\pm} R_{\alpha}^4 (\partial_z p^{\alpha}(0, t) + l \partial_z^2 p^{\alpha}(0, t) + \dots) \\ &= \frac{\pi}{8\nu} \sum_{\alpha=0,\pm} R_{\alpha}^4 \partial_z p^{\alpha}(0, t) + 2\pi l \sum_{\alpha=0,\pm} R_{\alpha} \partial_t u^0(0, t) + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Выражение (43) запишем в виде

$$\sum_{\alpha=0,\pm} (S_l^{\alpha} - 2\pi R_{\alpha} l) \partial_t u^{\alpha}(0, t) + 2\pi l \sum_{\alpha=0,\pm} R_{\alpha} \partial_t u^{\alpha}(0, t) + \dots, \quad (45)$$

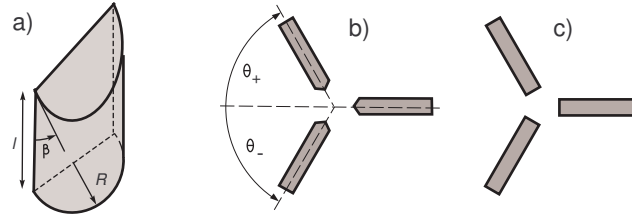


Рис. 5. Скошенный полуцилиндр (а). Разъединенные составляющие узла (б) с заостренными концами и заменяющие их цилиндры с иными площадями поверхностей (с).

отщипив произведения скоростей  $\partial_t u^\alpha(l, t) = \partial_t u^\alpha(0, t) + \dots$  изменения радиусов сосудов и площадей фиктивных отростков – цилиндров с радиусами  $R_\alpha$  и высотой  $l$ .

Последние суммы в формулах (44) и (45) совпадают, а значит, взаимно уничтожаются в соотношении (41). В оставшейся первой сумме из (45) заменим разности  $S_l^\alpha - 2\pi R_\alpha l$  некими величинами  $s_\alpha$ , которые назовем *эффективными поверхностями элементов бифуркационного узла*. Эти величины могут оказаться (и оказываются – см. ниже) отрицательными; более того, на основе проводимых далее вычислений создается впечатление, что для здорового – компактного и неповрежденного – узла характерны именно отрицательные эффективные поверхности  $s_\alpha$ .

Итак, первое условие сопряжения, относящееся к потокам, выглядит так:

$$-\frac{\pi}{8\nu} R_0^4 \partial_z p^0(0, t) + s_0 \partial_t u^0(0, t) = \frac{\pi}{8\nu} \sum_{\pm} (R_{\pm}^4 \partial_z p^{\pm}(0, t) - s_{\pm} \partial_t u^{\pm}(0, t)). \quad (46)$$

**Пример 1.** Рассмотрим скошенный под углом  $\beta \in (0, \pi/2)$  полуцилиндр  $\Theta_l^R(\beta)$  с радиусом  $R$  и высотой  $l$  на рис. 5, а. Несложные вычисления показывают, что площадь его боковой поверхности равна

$$\pi R l - 2R^2 \operatorname{ctg} \beta.$$

Пусть радиусы цилиндрических сосудов сравнимы (см. формулу (10)), а их оси лежат в одной плоскости и пересекаются в общей точке  $\mathcal{O}$ .

Углы между осями сосудов  $\Omega^\pm$  и (продолжением) оси сосуда  $\Omega^0$  обозначим  $\theta_\pm \in (0, \pi/2)$  (рис. 5, b). Приближенно можно считать, что части  $\Omega_l^\alpha$  сосудов  $\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = 0, \pm$ , образующих выделенный нами узел  $G_l$ , представляют собой объединения пар полуцилиндров  $\Theta_l^{R_\alpha}(\beta_{1\alpha})$  и  $\Theta_l^{R_\alpha}(\beta_{2\alpha})$ , причем углы  $\beta_\alpha^i$  удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{ctg} \beta_{1\pm} = \operatorname{ctg} \theta_\pm, \quad \operatorname{ctg} \beta_{2\pm} = \frac{1}{\sin \theta_\pm} \left( \frac{R_0}{R_\pm} - \cos \theta_\pm \right),$$

$$\operatorname{ctg} \beta_{10} = \frac{1}{\sin \theta_+} \left( \frac{R_+}{R_0} - \cos \theta_+ \right) \quad \operatorname{ctg} \beta_{20} = \frac{1}{\sin \theta_-} \left( \frac{R_-}{R_0} - \cos \theta_- \right).$$

Таким образом, проведенные выше действия, схематично изображенные на рис. 5, b и c, дают такие выражения для эффективных площадей  $s_\alpha$  и их суммы  $\tilde{s}_0$ :

$$s_\pm = -2 \frac{R_\pm R_0}{\sin \theta_\pm}, \quad s_0 = -2R_0^2 \sum_{\pm} \frac{1}{\sin \theta_\pm} \left( \frac{R_\pm}{R_0} - \cos \theta_\pm \right), \quad (47)$$

и

$$\tilde{s}_0 := s_0 + s_+ + s_- = -2R_0^2 \sum_{\pm} \frac{1}{\sin \theta_\pm} \left( 2 \frac{R_\pm}{R_0} - \cos \theta_\pm \right) \quad (48)$$

Если  $R_\alpha = R$  и  $\alpha_\pm = \frac{\pi}{3}$ , то  $s_\alpha = -\frac{4}{3} \sqrt{3} R^2 < 0$ . Если  $R_\pm < R_0 \cos \theta_\pm$ , то по-прежнему  $s_\pm < 0$ , но  $s_0 > 0$ .  $\square$

Теперь становится понятна одна из причин возникновения слагаемых  $s_\alpha \partial_t u^\alpha(0, t)$ : в одномерной модели сосуд интерпретируется как прямой круговой цилиндр (рис. 5, b), но на самом деле в узле его конец заострен (рис. 5, c), причем разницы площадей боковых поверхностей как раз и появились в качестве коэффициентов  $s_\alpha$ . Формулы (47) конечно же дают только приближенные значения этих коэффициентов, зависящих как от радиусов сосудов  $\Omega^\alpha$ , так и от углов, под которыми они встречаются. Именно последним отличаются от классических условий Кирхгофа выстраиваемые в данной работе условия сопряжения при соединении упругих сосудов. В конце данного раздела будет пояснено, как можно попытаться учесть механические свойства стенок узла.

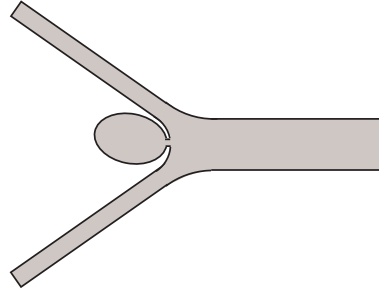


Рис. 6. Мешковидная бифуркационная аневризма.

В случае разветвления артерии, изображенном на рис. 1, а, все радиусы сравнимы по величине согласно формуле (10), а значит, каждый из членов  $s_\alpha \partial_t u^\alpha(0, t)$  оказывается значимым в полученном условии сопряжения (46). С другой стороны, если радиус  $R_-$  ответвления  $\Omega^-$  артерии на рис. 1, б, мал в сравнении с радиусами  $R_0 \approx R_+$  (ср., например, следствие (11) закона Мюррея (9)), то, во-первых, членом  $s_- \partial_t u^-(0, t)$  следует пренебречь и, во-вторых, можно положить  $s_+ = s_0 = 0$ , так как цилиндр  $\Omega^+$  служит продолжением цилиндра  $\Omega^0$  и поэтому вычисленные в примере 1 приращения площади поверхностей становятся нулевыми. Последнее упрощение условия сопряжения (46), превращающее его в классическое условие Кирхгофа, характерно и для гладких участков артерий с локальными повреждениями (см. далее п. 7).

**Замечание 1.** Наряду с приведенным возможен и другой, более простой, но и более приблизительный подход к моделированию бифуркационного узла. Режим функционирования здоровой<sup>7</sup> артерии с разветвлением (рис. 1, а и б) в целом всегда одинаковый и варьируется по причине изменения лишь нескольких, но важных параметров, связанных с работой сердца и общим состоянием человеческого организма (нагрузки или покой, медикаментозные воздействия и т.п.). Именно, сначала поток крови поступает от сердца в более широкий (вспомним

<sup>7</sup>Это прилагательное по определению означает, что невозможны уже упомянутый противоток и другие патологии, обсуждающиеся в п. 6.

закон Мюррея (9)) сосуд  $\Omega^0$ , проходит через искусственно назначенный нами узел  $G_l$  и продолжает движение по более узким сосудам  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$  разделившись в каком-то отношении, определяемом не только локальным строением узла, но и периферийными данными (в нашей ситуации – величинами  $T$ ,  $p_\infty$  и  $\Phi(t)$ ). Биологическое строение бифуркационного узла должно быть приспособлено именно к такому режиму, и поэтому логично в дополнение к закону Мюррея принять еще одну гипотезу: напряженно-деформированное состояние узла в главном зависит от процесса растяжения/сжатия более массивного принимающего сосуда  $\Omega^0$ , кончик которого по существу и представляет собой узел, а сосуды  $\Omega^\pm$ , произрастая из него, сразу же принимают цилиндрическую форму. В итоге из правой части (46) следует удалить слагаемые  $s_\pm \partial_t u^\pm(0, t)$  и получить новое соотношение

$$-\frac{\pi}{8\nu} R_0^4 \partial_z p^0(0, t) + \tilde{s}_0 \partial_t u^0(0, t) = \frac{\pi}{8\nu} \sum_{\pm} R_{\pm}^4 \partial_z p^\pm(0, t), \quad (49)$$

а измененному коэффициенту  $\tilde{s}_0$  придать смысл *общей эффективной поверхности узла*. При этом можно считать, что  $\tilde{s}_0 = s_0 + s_+ + s_-$  и справедлива формула (48).  $\square$

Расчеты в примере 1 дают весьма приблизительное представление о реальных величинах  $s_\alpha$  из условия (46), так как не учитывают усложненное строение упругой стенки узла и его истинную форму, а также эвентуальные или врожденные повреждения, в частности, истончение стенок узла. Последнее вызывает периодическое выпучивание стенки и способствует образованию *мешковидной аневризмы* – наиболее нежелательного дефекта узла (см. рис. 6 и далее п. 6, 2°). Понятно, что ухудшение упругих свойств стенок обуславливает увеличение объема стагнированной в узле крови, которое можно моделировать возрастанием (к примеру, переходом через нуль к положительному значению) общей эффективной площади узла  $\tilde{s}_0$  (форма (49) первого условия сопряжения стала более удобной для рассуждений). Кроме того, весьма вероятно, что начальной стадии образования аневризмы отвечает какое-либо критическое значение эффективной площади. Отметим, что в медицинской литературе нет никаких данных о здоровых или поврежденных бифуркационных узлах и сравнении каких-либо их характеристик. Нет и попыток на основе изменения поведения и свойств узлов предсказать возможность образования бифуркационной аневризмы. Авторы надеются, что планируемая математическая

и компьютерная обработка данных, полученных при помощи аппаратуры МРТ (см. конец п. 2), позволит предложить новую методику тестирования узловых соединений артерий и, в частности, определить условия возникновения обсуждаемых аневризм или предложить способ их обнаружения при помощи анализа данных на удаленных участках кровеносной системы.

**5. Вывод второго условия сопряжения.** В одномерных моделях течение жидкости в прямолинейном сосуде (неважно с какими, упругими и жесткими, стенками) перепад давления вычисляется по потоку жидкости через сечение сосуда при помощи формулы Ньютона–Лейбница

$$p(z_2) - p(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \partial_z p(z) dz \quad (50)$$

(см. равенства (7) и (16)). При сильном искажении формы сечения или искривлении сосудов асимптотический анзац Рейнольдса–Пуазейля (14), (15) теряет пригодность. Поэтому в узле приходится отказаться от простого соотношения (50), впрочем далее в замечании 2 оно будет употреблено для устранения зависимости от выбранного, но произвольного размера  $l$  узла  $G_l$ .

В п. 3, 2°, уже пояснялись результаты работы [18]: в одномерной модели соединяющихся тонких каналов с жесткими стенками давление перестает быть непрерывным в узловой точке, а его скачок при переходе из сосуда  $\Omega^0$  в сосуд  $\Omega^\pm$  зависит от потоков  $\frac{\pi}{8\nu} R_0^4 \partial_z p^0(0, t)$  и  $\frac{\pi}{8\nu} R_\pm^4 \partial_z p^\pm(0, t)$  через их сечения. Перенесем без изменений соответствующий закон в точку  $O$ , изображающую узел в одномерной модели бифуркации артерии. В аналогичных (30) равенствах

$$p^\pm(0, t) = p^0(0, t) + q_{\pm+} \frac{\pi}{8\nu} R_+^4 \partial_z p^+(0, t) + q_{\pm-} \frac{\pi}{8\nu} R_-^4 \partial_z p^-(0, t), \quad (51)$$

фигурируют элементы  $q_{++}$ ,  $q_{--}$  и  $q_{+-} = q_{-+}$  симметричной  $2 \times 2$ -матрицы скачков давления  $q$  в бифуркационном узле.

**Замечание 2.** В соотношениях

$$p^\pm(l, t) = p^0(l, t) + Q_{\pm+}(l) \frac{\pi}{8\nu} R_+^4 \partial_z p^+(l, t) + Q_{\pm-}(l) \frac{\pi}{8\nu} R_-^4 \partial_z p^-(l, t),$$

содержащих матрицу (25) для узла  $G_l$  и значения давлений  $p^\alpha$  и их производных в концах отрезков (1), одномерных изображений сосудов



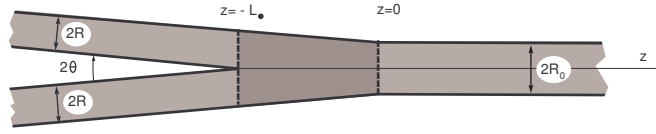


Рис. 7. Симметричное разветвление плоского канала.

$\Omega^\alpha$ , как и в п. 4, применим формулы Тейлора по переменным  $z^\alpha$  и получим

$$\begin{aligned} p^\pm(0, t) + l\partial_z p^\pm(0, t) + \dots &= p^0(l, t) + l\partial_z p^0(0, t) + \dots \\ &+ Q_{\pm+}(l) \frac{\pi}{8\nu} R_+^4 (\partial_z p^+(0, t) + l\partial_z^2 p^+(0, t) + \dots) \\ &+ Q_{\pm-}(l) \frac{\pi}{8\nu} R_-^4 (\partial_z p^-(0, t) + l\partial_z^2 p^-(0, t) + \dots). \end{aligned}$$

Выразим первую производную  $\partial_z p^\pm(0, t)$  из уже полученного условия сопряжения (46), а вторые производные – из дифференциальных уравнений (5), распространенных на отрезки  $(0, L_\alpha) \ni z^\alpha$ . В результате, отбросив младшие члены, обозначенные многоточием, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} p^\pm(0, t) &= p^0(l, t) + \left( Q_{\pm+}(l) + l \frac{8\nu}{\pi} \left( \frac{1}{R_+^4} + \frac{1}{R_0^4} \right) \right) \frac{\pi}{8\nu} R_+^4 \partial_z p^+(0, t) \\ &+ \left( Q_{\pm-}(l) + l \frac{8\nu}{\pi} \left( \frac{1}{R_-^4} + \frac{1}{R_0^4} \right) \right) \frac{\pi}{8\nu} R_-^4 \partial_z p^-(0, t) \\ &+ l (Y_0^\pm(l) \partial_t u^0(0, t) + Y_+^\pm(l) \partial_t u^+(0, t) + Y_-^\pm(l) \partial_t u^-(0, t)). \end{aligned}$$

При выводе условия сопряжения (51) множители при потоках

$$\frac{\pi}{8\nu} R_+^4 \partial_z p^+(0, t) \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{8\nu} R_-^4 \partial_z p^-(0, t)$$

были обозначены  $q_{\pm+}$  и  $q_{\pm-}$  соответственно. В то же время слагаемые, содержащие скорости  $\partial_t u^\alpha(0, t)$ , признаны ничтожными из-за, вообще говоря, малого коэффициента  $l$ . Их при желании можно включить в финальную формулу (51), но похожие члены уже появились в соотношении (46), а причину для излишнего загромождения условий сопряжения найти трудно.  $\square$

Введенная матрица скачков давления  $q$ , разумеется, зависит от формы бифуркационного узла и, может быть, от его упругих свойств. Для реальных сосудов выяснить такие зависимости удастся лишь при решении обратных задач на основе данных, полученных методом МРТ (ср. конец п. 4). Тем не менее предложим элементарную процедуру их нахождения, впрочем только для малосодержательной в хемодинамике плоской задачи Стокса – трехмерный ее вариант остался для авторов недоступным.

**Пример 2.** Рассмотрим бесконечный плоский симметричный канал  $\Xi$  с разветвлением, который изображен на рис. 7, где указаны его геометрические параметры. Стенки предполагаются жесткими, а угол  $\theta$  – малым. Вертикальные штрих-пунктирные линии разделяют  $\Xi$  на четыре части, а именно, три бесконечных полуполосы  $\Omega^\pm$  и  $\Omega^0$ , а также трапецию  $\Omega^\bullet$ , положенную набок и тонированную на рисунке. Длина и ширина среднего участка  $\Omega^\bullet$  рассчитываются по формулам

$$L_\bullet = (\sin \theta)^{-1}(2R - R_0 \cos \theta) \approx (\sin \theta)^{-1}(2R - R_0), \quad R = R_\pm, \quad (52)$$

$$2R_\bullet(z) \approx 2(R_0 - z \sin \theta).$$

Найдем приближенные формулы для решений (21), (22) задачи (19), (20) в плоском сочленении  $\Xi$ , симметрия которого относительно оси абсцисс позволяет ограничиться рассмотрением одного из них, например,  $(P, V) := (P^+, V^+)$ . Благодаря наличию большого параметра  $(\sin \theta)^{-1}$  на каждом из участков можно воспользоваться двумерным анзацем Рейнольдса–Пуазейля, пренебрегая эффектами пограничного слоя, который привносит погрешности  $O(1)$ , малые в сравнении с собираемыми членами  $O((\sin \theta)^{-1})$ . Таким образом, ищем одномерное распределение давления в виде

$$\begin{aligned} P(x) &\approx P^0(z) = A_0^{-1}z && \text{при } z \in (0, +\infty), \\ P(x) &\approx P^+(z) = A^{-1}z + Q_{++} && \text{при } z \in (-\infty, -L_\bullet), \\ P(x) &\approx P^-(z) = Q_{+-} && \text{при } z \in (-\infty, -L_\bullet), \\ P(x) &\approx P^\bullet(z) && \text{при } z \in (-L_\bullet, 0). \end{aligned} \quad (53)$$

В плоском случае коэффициенты рассчитываются по формулам

$$A = \frac{1}{2\nu} \int_{-R}^R (R^2 - \zeta^2) d\zeta = \frac{2}{3\nu} R^3, \quad A_0 = \frac{2}{3\nu} R_0^3, \quad A_\bullet(z) = \frac{2}{3\nu} R_\bullet(z)^3 \quad (54)$$

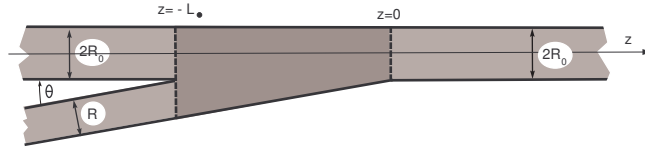


Рис. 8. Асимметричное разветвление плоского канала.

(ср. вывод (16) выражения для  $A_\alpha$  в пространственном случае), а уравнение Рейнольдса на интервале  $(-L_\bullet, 0)$  приобретает вид

$$-\partial_z (A_\bullet(z) \partial_z P^\bullet(z)) = 0. \quad (55)$$

Формулы (53) вместе с условиями Кирхгофа в точках  $z = 0$  и  $z = -L_\bullet$  показывают, что

$$P^\bullet(0) = 0, \quad A_\bullet(0) \partial_z P^\bullet(0) = 1, \quad A_\bullet(-L_\bullet) \partial_z P^\bullet(-L_\bullet) = 1,$$

а значит,

$$\begin{aligned} P^\bullet(z) &= - \int_z^0 \frac{d\zeta}{A_\bullet(\zeta)} = - \frac{3\nu}{4 \sin \theta} \frac{1}{(R_0 - \zeta \sin \theta)^2} \Big|_{\zeta=z}^0 \\ &= - \frac{1}{2 \sin \theta} \left( \frac{3\nu}{2} \right)^{1/3} A_\bullet(\zeta)^{-2/3} \Big|_{\zeta=z}^0. \end{aligned} \quad (56)$$

Поскольку  $R_\bullet(0) = R_0$ ,  $R_\bullet(-L_\bullet) \approx 2R$  и  $A_\bullet(0) = A_0$ ,  $A_\bullet(-L_\bullet) \approx 8A$ , при учете соотношений (56) и (53), а также непрерывности давления в точке  $z = -L_\bullet$  находим величины

$$\begin{aligned} Q_{+-} &\approx P^\bullet(-L_\bullet) \approx \frac{1}{2 \sin \theta} \left( \frac{3\nu}{2} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{4} A^{-2/3} - A_0^{-2/3} \right) \\ &= \frac{3\nu}{4 \sin \theta} \left( \frac{1}{4R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right), \\ Q_{++} &\approx P^\bullet(-L_\bullet) + A^{-1} L_\bullet \approx \frac{3\nu}{4 \sin \theta} \left( \frac{17}{4R^2} - \frac{1}{R_0^2} - \frac{2R_0}{R^3} \right). \quad \boxtimes \quad (57) \end{aligned}$$

**Пример 3.** Плоский канал  $\Xi$  с ответвлением изображен на рис. 8, где указаны его геометрические параметры. Примем обозначения и предположения из примера 2. Формулы (52) заменяются такими:

$$L_{\bullet} = (\operatorname{tg} \theta)^{-1} 2R \approx (\sin \theta)^{-1} 2R, \quad 2R_{\bullet}(z) = 2R_0 - z \sin \theta. \quad (58)$$

Из-за отсутствия симметрии придется строить асимптотику обоих решений  $(P^{\pm}, V^{\pm})$ . Начнем с решения  $(P, V) = (P^+, V^+)$ , у которого весь поток устремляется в левый канал  $\Omega^+$  шириной  $2R_0$  и, следовательно, аналогично (53) получим, что

$$\begin{aligned} P(x) &\approx P^0(z) = A_0^{-1}z && \text{при } z \in (0, +\infty), \\ P(x) &\approx P^+(z) = A_0^{-1}z + Q_{++} && \text{при } z \in (-\infty, -L_{\bullet}), \\ P(x) &\approx P^-(z) = Q_{+-} && \text{при } z \in (-\infty, -L_{\bullet}), \\ P(x) &\approx P^{\bullet}(z) && \text{при } z \in (-L_{\bullet}, 0). \end{aligned} \quad (59)$$

По-прежнему верны соотношения (54) и (55), а условия Кирхгофа показывают, что

$$\begin{aligned} P^{\bullet}(z) &= -\frac{3\nu}{2} \int_z^0 \frac{d\zeta}{R_{\bullet}(\zeta)^3} = -\frac{3\nu}{4 \sin \theta} R_{\bullet}(\zeta)^{-2} \Big|_{\zeta=z}^0 \\ &= \frac{3\nu}{4 \sin \theta} \left( \frac{1}{(2R_0 - z \sin \theta)^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q_{+-} &\approx \frac{3\nu}{4 \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 + R)^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) < 0, \\ Q_{++} &\approx \frac{3\nu}{4 \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 + R)^2} - \frac{1}{R_0^2} + \frac{4R}{R_0^3} \right) > 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Для решения  $(P, V) = (P^-, V^-)$ , у которого весь поток устремляется в нижнее (на рис. 8) ответвление шириной  $2R$ , в изменении нуждаются два средних соотношения из списка (59):

$$\begin{aligned} P(x) &\approx P^+(z) = Q_{-+} && \text{при } z \in (-\infty, L_{\bullet}), \\ P(x) &\approx P^-(z) = A^{-1}z + Q_{--} && \text{при } z \in (-\infty, L_{\bullet}), \end{aligned}$$

Финальные формулы для элементов матрицы скачков давления выглядят так:

$$\begin{aligned} Q_{-+} &= \frac{3\nu}{4 \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 + R)^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) < 0, \\ Q_{--} &= \frac{3\nu}{4 \sin \theta} \left( \frac{1}{(R_0 + R)^2} - \frac{1}{R_0^2} + \frac{4}{R^2} \right) > 0. \quad \square \end{aligned} \quad (61)$$

**Замечание 2.** 1) Вычисления в примерах 2 и 3 можно было бы приспособить и пространственному каналу, однако они потребовали бы точную формулу для коэффициента  $A_\bullet(z)$ , носящего название *жесткости сечения на кручение* (см., например, [33]). В приемлемой трехмерной конструкции канала с разветвлением такое сечение приобретает довольно-таки сложную форму (в плоском остается отрезком — именно этот факт оказался решающим в выкладках из примеров 2 и 3), т.е. вычисления становятся очень трудными (в книге [33] список известных формул для жесткостей на кручение ограничивается несколькими каноническими формами), но одновременно в значительной степени бесполезными, так как реальная геометрия узлового соединения сосудов не описывается простыми соотношениями.

2) Возможность получить приближенные формулы (57) и (60), (61) для матрицы (25) обусловлена тем, что при малом угле  $\theta$  узел  $G$  становится продолговатым, с длиной  $O((\sin \theta)^{-1})$  — см. выражения (52) и (58) для  $L_\bullet$ . Вместе с тем, предельный переход  $\theta \rightarrow +0$  нелеп, т.е. пользоваться полученными результатами, точнее их неизвестными обобщениями на трехмерный случай, дозволено только при “не очень малых углах  $\theta$ ”.

3) Закон Мюррея (9) в двумерном исполнении может выглядеть так:

$$R_0^2 = R_+^2 + R_-^2.$$

Элементы (57) и (60), (61) матрицы скачков давления обратно пропорциональны квадратам радиусов, однако обнаружить какую-либо закономерность, позволяющую сформулировать *перераспределительный (парциальный) закон Мюррея* авторам, к сожалению, не удалось.  $\square$

**6. Некоторые сосудистые патологии.** 1°. *Противотоки.* Как уже упоминалось, одрябление стенок сосудов вследствие старения (износа), болезней (например, диссекции — расслоения стенки) или травмы

(в частности, хирургического вмешательства) может вызывать возврат крови к узлу из ответвлений  $\Omega^\pm$  (ср. [3–5]). При этом бифуркационный узел коренным образом меняет режим функционирования, так как “принимающим” становится один из отростков (см. замечания 1 и 3). На первый взгляд кажется, что условия сопряжения (46) и (51) нуждаются в корректировке, однако это впечатление ошибочно. Дело в том, что противоток обычно остается маломощным и медленным (см. цитированные выше статьи), так как генерируется упругим воздействием ослабленных стенок сосудов, а также, может быть, окружающей мускулатуры, значительно менее мощной, чем сердечная мышца. Вялость возвратного процесса позволяет пренебречь деформацией стенок сосуда, а малость скоростей и потоков превращает условие сопряжения (46), (51) в классические условия Кирхгофа (33), (32). Влияние противотоков на функционирование соединительного узла упругих сосудов никогда и нигде не изучалось.

**Замечание 3.** Сравним два геометрически одинаковых разветвленных сосуда на рис. 4, с и d, различающихся направлением движения крови, т.е. имеющие разные входы: в первом случае принимающим является сосуд  $\Omega^0$ , а во втором –  $\Omega^+$ . Условие сопряжения (46) для них одно и то же, но из-за замены  $\Omega^0 \leftrightarrow \Omega^+$  перестраивается матрица скачков давления, а именно, если сочленению на рис. 4, с, отвечает матрица (25), то сочленению на рис. 4, с, – матрица

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{++} & Q_{++} - Q_{+-} \\ Q_{++} - Q_{+-} & Q_{++} + Q_{--} - 2Q_{+-} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить равенство  $\widehat{\widehat{Q}} = Q$ . Весьма возможно, что после расчета матрицы  $Q$  для конкретных узловых соединений сосудов и выяснения ее влияния на процесс распределения потоков крови станет понятно, почему в природе не встречаются формы бифуркаций на рис. 4, b и d.  $\square$

2°. *Мешковидная аневризма.* Один из часто встречающихся недугов бифуркационных узлов артериальной системы – *мешковидная аневризма*, схематично изображенная на рис. 6. Особенно опасны такие аневризмы в сосудах головного мозга, так как в большинстве случаев именно она служит первопричиной инсультов – кровоизлияний.

Аневризма подобных форм возникают из-за повреждений стенки сосуда, сопровождающегося ее выпячиванием или растрескиванием и последующим образованием пульсирующей гематомы, причем наиболее опасным участком оказывается очевидный концентратор напряжений – седловина узла раздвоения артерии (ср. изображение на рис. 6; по аналогичной причине непрочными и негодными оказываются узлы на рис. 4, b и d). В начальной стадии развития аневризмы, когда ухудшение упругих свойств седловины еще не привели к ее разрушению, изменение функционирования бифуркационного узла можно учесть при помощи вариации параметров  $s_\alpha$  в условии сопряжения (46) (ср. обсуждение в конце п. 4), однако при сформировавшейся гематоме, сравнимой по объему с самим узлом, требуется существенная перестройка условий сопряжения, в частности, введение новых неизвестных, которые описывают состояние мешковидной аневризмы, не выражаются непосредственно через смещения  $u^\alpha(0, t)$ , но должны быть включены в условия сопряжения.

Микроаневризма на гладком участке артерии (рис. 9, c) обсуждается в п. 7.

3°. *Стентирование.* Для восстановления просвета артерии (канала сосуда), частично перекрытого, например, холестериновой бляшкой, используются *стенды* – тонкие цилиндрические сетки (рис. 9, d), изготовленные из биологически пассивных металлов. Они вводятся в артерию при помощи эндоскопического катетера и, расширяясь под действием микробалончика сжатого воздуха, раздвигают стенки сосуда вместе с бляшкой.

Длина стента велика в сравнении с его радиусом, а участок артерии, контактирующий с ним, теряет упругость стенок и поэтому описывается одиночным уравнением Рейнольдса (17). Для включения этого уравнения в одномерную модель течения крови вдоль артерии с частично армированными стенками требуются новые условия сопряжения в концевых точках стента. На основе предыдущих и последующих (см. начало п. 7) рассуждений нетрудно предсказать такие соотношения в одной  $z = 0$  из концевых точек (стент занимает отрезок  $(0, L_+) \ni z$  и другой конец обрабатывается аналогично):

$$\begin{aligned} p(+0, t) &= p(-0, t), \\ \frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z p(+0, t) &= \frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z p(-0, t) + s_+ \partial_t u(-0, t). \end{aligned} \quad (62)$$

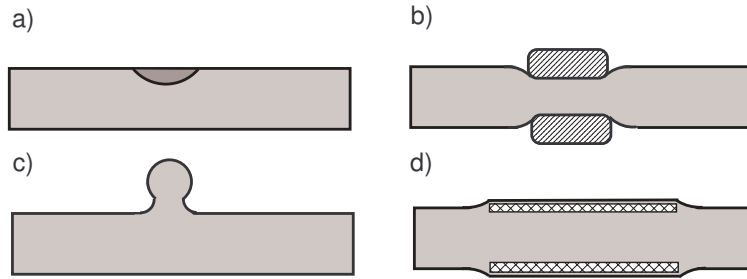


Рис. 9. Гладкий участок артерии с холестериновой бляшкой (а), хирургической скрепкой (б), боковой микроаневризмой (с) и стентом (d).

Иными словами, давление остается непрерывным, а поток может претерпевать скачок из-за нерегулярного поведения стенки сосуда в непосредственной близости от стента (остаточная деформация и повреждения).

4°. *Локальные дефекты гладких артерий.* Холестериновые бляшки, хирургические сцепки и швы, микроаневризмы (см. рис. 9, а–с) и т.п. разделяют прямую артерию  $\Omega$  на два участка  $\Omega^\pm = \{x : |y| < R, \pm z \in (0, L_\pm)\}$ , причем  $L_\pm > 0$  и  $R \ll \min L_\pm$ . Эти участки описываются двумя системами уравнений (4) и (5), и для построения одномерной модели локально поврежденной артерии нужны условия сопряжения в точке  $z = 0$ , которые будут найдены в следующем разделе.

5°. *Ответвления фрактального дерева капилляров*<sup>8</sup>. Еще один фрагмент артерии, при моделировании которого требуется постановка условий сопряжения, – присоединенная система капилляров. Назначение таких систем – распределение крови по объему органов или мышц – существенно различается с назначением артерий – перенос крови к участкам тела, удаленным от сердца. Поэтому моделирование капиллярных сетей требует привлечения математических методов, отличающихся от используемых в данной статье. Один из таких методов предложен в работе [34], где семейства капилляров интерпретируются

<sup>8</sup>Капилляры и их группы – неотъемлемые фрагменты кровеносной системы и их, разумеется, нельзя причислять к патологиям – ср. название раздела.



как фрактальные деревья с дифференциальной структурой. Для артерии капиллярное ответвление подразумевает потерю небольшой части кровяного потока, величина которой пропорциональна гидростатическому давлению. Иными словами, одномерная модель артерии должна содержать следующие условия сопряжения в точке  $z = 0$  ответвления капилляров:

$$\begin{aligned} p(+0, t) &= p(-0, t), \\ \frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z p(+0, t) &= \frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z p(-0, t) + mp(\pm 0, t). \end{aligned} \quad (63)$$

Алгоритм вычисления коэффициента  $m > 0$  разработан в статье [34].

**7. Однородная артерия с малым дефектом.** Дефект стенки, длина которого сравнима с радиусом сосуда (рис. 9, а–с), следует признать локальным, при предельном переходе превращающимся в точку, а значит, способным найти отражение в одномерной модели исключительно посредством условий сопряжения. Поскольку кровь никуда не вытекает, а оболочка сосуда в целом сохраняет цилиндрическую форму (в отличие от предыдущих условий (63) и (62)), первое условие сопряжения остается классическим условием сопряжения Кирхгофа (32), а именно,

$$\frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z p(-0, t) = \frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z p(+0, t). \quad (64)$$

Сопrotивляясь или способствуя движению крови, дефект создает дополнительный перепад давления, который аналогично п. 3, 2°, приводит ко второму условию сопряжения

$$p(-0, t) = p(+0, t) + q \frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z p(-0, t), \quad (65)$$

где коэффициент  $q$  стал скаляром, но играет роль матрицы скачков давления (25). Далее на основе схемы [18] будут проверены основные свойства коэффициента  $q$  в зависимости от качества дефекта, а затем представлена примитивная процедура приблизительного расчета этого коэффициента.

Начнем с изучения модельной задачи Стокса (19), (20) в области  $\Xi$  – бесконечной цилиндрической трубе  $\Omega = \{\xi = (\eta, \zeta) : |\eta| < r, \zeta \in \mathbb{R}\}$  с локальным возмущением  $\Theta$ . Рассмотрим две ситуации

1°. *холестериновая бляшка* (рис. 9, а):  $\Xi = \Omega \setminus \Theta$ ,

2°. *мешковидная микроаневризма* (рис. 9, с):  $\Xi = \Omega \cup \Theta \cup \Gamma$ .

В первом случае  $\Theta$  – компакт в  $\bar{\Omega}$ , причем не обязательно  $\partial\Omega \cap \Theta = \emptyset$ , а во втором случае  $\Theta$  – ограниченная область, примыкающая к цилиндрической поверхности  $\partial\Omega$  вдоль подмножества  $\Gamma$ . Границу  $\partial\Xi$  считаем липшицевой, а размер  $d$  зафиксируем так, чтобы

$$\{\xi \in \Xi : \pm\zeta > d\} = \{\xi : |y| < r, \pm\zeta > d\} =: \Omega^\pm.$$

У задачи (19), (20) в локально возмущенном цилиндре  $\Xi$  имеется решение, представимое в виде

$$\begin{aligned} P(\xi) &= (\chi_+(\zeta) + \chi_-(\zeta))\mathcal{P}(\xi) + \chi_-(\zeta)Q + \tilde{P}(\xi), \\ V(\xi) &= (\chi_+(\zeta) + \chi_+(\zeta))\mathcal{V}(\xi) + \tilde{V}(\xi). \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь  $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$  – течение Пуассона в трубе  $\Omega$ , заданное формулами (23),  $(\tilde{P}(\xi), \tilde{V}(\xi))$  – экспоненциально затухающий при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$  остаток, а  $Q$  – перепад давления (скаляр, а не матрица), возникающий по причине возмущения стенки. Срезающие функции теперь определены так:

$$\chi_\pm(\zeta) = 1 \text{ при } \pm\zeta > 2d, \quad \chi_\pm(\zeta) = 0 \text{ при } \pm\zeta < d.$$

В случае 1° ищем решение (66) в виде

$$P(\xi) = \mathcal{P}(\xi) + \hat{P}(\xi), \quad V(\xi) = \mathcal{V}(\xi) + \hat{V}(\xi)$$

и получаем для пары  $(\hat{P}, \hat{V})$  уравнения Стокса (19) с краевыми условиями

$$\hat{V}(\xi) = -\mathcal{V}(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega \setminus \partial\Xi, \quad \hat{V}(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi \setminus \partial\Omega. \quad (67)$$

Для вычисления постоянной  $Q$  в представлении (66), которое теперь принимает вид

$$\hat{P}(\xi) = \chi_-(\xi)Q + \tilde{P}(\xi), \quad V(\xi) = \tilde{V}(\xi), \quad (68)$$

применим формулу Грина на усеченной области  $\Xi(T) = \{\xi \in \Xi : |\zeta| < T\}$  с большой длиной  $2T$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Xi} \sigma_n(P, V; \xi) \cdot \hat{V}(\xi) ds_\xi \\ &= \sum_{\pm} \pm \int_{|\eta| < \rho} \left( \sigma_\zeta(\hat{P}, \hat{V}; \xi) \cdot V(\xi) - \sigma_\zeta(P, V; \xi) \cdot \hat{V}(\xi) \right) \Big|_{\zeta=\pm T} d\eta. \end{aligned} \quad (69)$$

Здесь  $\sigma_n = \sigma \cdot n$  – вектор нормальных напряжений,  $n$  – внешняя нормаль на границе  $\partial\Xi$ , а  $\sigma$  – тензор напряжений с декартовыми компонентами

$$\sigma_{jk}(P, V) = \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial V_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial V_k}{\partial \xi_j} \right) - \delta_{j,k} P, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

причем  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера, и  $\sigma_\zeta = \pm(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$  на сечениях  $\{\xi \in \Omega : \zeta = \pm T\}$ . Подставим в правую часть (69) разложение (66) для  $(P, V)$  и разложение (68) для  $(\widehat{P}, \widehat{V})$ . Пренебрегая исчезающими при  $T \rightarrow +\infty$  слагаемыми, получим в силу соотношения (24), что

$$\int_{\partial\Omega \setminus \partial\Xi} \sigma_n(P, V; \xi) \cdot \widehat{V}(\xi) ds_\xi = \int_{|\eta| < \rho} Q V_\zeta(\eta) d\eta = Q. \quad (70)$$

Вместе с тем при учете краевого условия (67) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Xi} \sigma_n(P, V; \xi) \cdot \widehat{V}(\xi) ds_\xi \\ &= \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Xi} \sigma_n(\widehat{P}, \widehat{V}; \xi) \cdot \widehat{V}(\xi) ds_\xi - \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Xi} \sigma_n(\mathcal{P}, \mathcal{V}; \xi) \cdot \mathcal{V}(\xi) ds_\xi \quad (71) \\ &= \int_{\Xi} |\nabla_\xi \widehat{V}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\Theta} |\nabla_\xi \mathcal{V}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

которое вместе с (70) показывает что в случае 1° перепад давления  $Q$  оказывается положительным. Подчеркнем, что последний знак плюс возник потому, что нормаль  $n$ , внешняя для области  $\Xi$ , становится внутренней для дефекта  $\Theta$ .

Убедимся в том, в случае 2° перепад давления  $Q$  отрицательный. Теперь ищем решение (66) в виде составной функции

$$P(\xi) = \begin{cases} \mathcal{P}(\xi) + \widehat{P}(\xi), & \xi \in \Omega, \\ \widehat{P}(\xi), & \xi \in \Theta, \end{cases} \quad V(\xi) = \begin{cases} \mathcal{V}(\xi) + \widehat{V}(\xi), & \xi \in \Omega, \\ \widehat{V}(\xi), & \xi \in \Theta, \end{cases}$$

где  $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$  – течение Пуазейля, а пара  $(\widehat{P}, \widehat{V})$  удовлетворяет уравнениям Стокса (19) в областях  $\Omega$  и  $\Theta$  отдельно, условиям прилипания (20) на внешней границе  $\partial\Xi$ , но приобретает скачки на поверхности

$\Gamma = \partial\Omega \cap \partial\Theta$ , а именно,

$$[\widehat{V}](\xi) = 0, \quad [\sigma_m(\widehat{P}, \widehat{V})](\xi) = \sigma_m(\mathcal{P}, \mathcal{V}; \xi), \quad \xi \in \Gamma. \quad (72)$$

Здесь  $[F]$  – разность пределов функции  $F$ , вычисленных изнутри областей  $\Theta$  и  $\Omega$ , а  $m$  – внешняя нормаль для  $\Omega$ . Аналогом формул (69) и (70) служат равенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [\sigma_m(\widehat{P}, \widehat{V})](\xi) \cdot V(\xi) ds_{\xi} \\ &= \int_{\Gamma} \left( [\sigma_m(\widehat{P}, \widehat{V})](\xi) \cdot V(\xi) - \sigma_m(P, V; \xi) \cdot [\widehat{V}(\xi)] \right) ds_{\xi} \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \int_{|\eta| < \rho} \left( \sigma_{\zeta}(\widehat{P}, \widehat{V}; \xi) \cdot V(\xi) - \sigma_{\zeta}(P, V; \xi) \cdot \widehat{V}(\xi) \right) \Big|_{\zeta=\pm\rho} d\eta = Q. \end{aligned}$$

При учете второго условия (72) пишем похожую на (71) формулу

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [\sigma_m(\widehat{P}, \widehat{V})](\xi) \cdot V(\xi) ds_{\xi} = \int_{\Gamma} [\sigma_n(\widehat{P}, \widehat{V})](\xi) \cdot \widehat{V}(\xi) ds_{\xi} \\ &= - \int_{\Theta} |\nabla_{\xi} \widehat{V}(\xi)|^2 d\xi - \int_{\Omega} |\nabla_{\xi} \widehat{V}(\xi)|^2 d\xi = - \int_{\Xi} |\nabla_{\xi} \widehat{V}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

и тем самым проверяем искомое неравенство  $Q < 0$ .

Итак, коэффициент  $q = Q$  из условия сопряжения (65) приобретает знак плюс (минус), если дефект сужает (расширяет) просвет – протоку артерии. Сформулируем всю одномерную модель, изменив принятые в п. 2 обозначения для согласования с новой геометрией сосуда:

$$R^{-1}Ku(z, t) + Rh\gamma\partial_t^2u(z, t) = \gamma p(z, t),$$

$$2\pi R\partial_t u(z, t) - \frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z^2 p(z, t) = 0, \quad z \in (-L_-, 0) \cup (0, L_+), \quad t \in (0, T), \quad (73)$$

$$-\frac{\pi}{8\nu} R^4 \partial_z p(L_+, t) = \Phi(t), \quad p(-L_-, t) = p_{\infty}, \quad t \in (0, T). \quad (74)$$

Отметим, что уравнения (73) не выполнены в точке  $z = 0$ , так как в ней назначены условия сопряжения (64), (65), а функция  $p$  претерпевает скачок.

Величина  $p(L_+, t)$ , т.е. давление, необходимое на “входе” для прохождения потока крови  $\Phi(t)$  в конец артерии  $z = -L_-$ , существенно

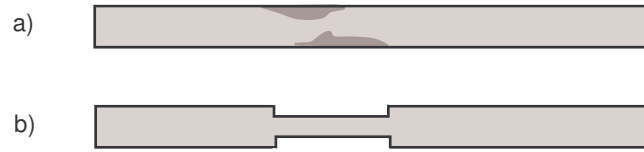


Рис. 10. Артерия с холестериновыми бляшками (а) и их изображение в одномерной модели (б).

зависит от коэффициента  $q$ , особенно от его знака. Предложим способ вычисления перепада давления  $Q$ , основанный на примитивной модели холестериновой бляшки, которая в реальности может иметь весьма причудливую форму около локальных повреждений стенки (ср. рис. 10, а), но зачастую распределяется равномерно по гладкой поверхности артерии и в упрощенном варианте может считаться препятствием, осесимметричным и не зависящим от продольной координаты.

**Пример 4.** Рассмотрим трехмерный канал  $\Xi$ , составленный из двух полубесконечных цилиндров  $\Omega^0 = \{\xi : \zeta > 0, |\eta| < R\}$ ,  $\Omega^- = \{\xi : \zeta < -L, |\eta| < R\}$  и соединяющего их конечного цилиндра  $\Omega^\bullet = \{\xi : \zeta \in [-L, 0], |\eta| < r\}$  меньшего радиуса  $r < R$  (см. рис. 10, б). Как и в примерах 2 и 3, найдем приближенные формулы, основанные на анзаце Рейнольдса–Пуазейля при игнорировании слабых эффектов пограничного слоя. Именно, представим одномерное распределение давления в виде

$$\begin{aligned} P(z) &\approx P^0(z) = A^{-1}z && \text{при } z \in (0, +\infty), \\ P(z) &\approx P^-(z) = A^{-1}z + Q && \text{при } z \in (-\infty, -L), \\ P(z) &\approx P^\bullet(z) = a^{-1}z && \text{при } z \in (-L, 0), \end{aligned} \quad (75)$$

причем  $A = \frac{\pi R^4}{8\nu}$  и  $a = \frac{\pi r^4}{8\nu}$  согласно формулам (16), (17). Первое условие Кирхгофа (относительно потоков) соблюдено в обеих точках  $z = 0$  и  $z = -L$ . Непрерывность давления (75), очевидная при  $z = 0$ , означает, что

$$A^{-1}L + Q = a^{-1}L \quad \Rightarrow \quad Q = L(a^{-1} - A^{-1}). \quad \square$$

Итак, второе условие сопряжения, учитывающее тромбирование сосуда холестериновой бляшкой, принимает вид

$$p(-0, t) = p(+0, t) + \left(\frac{1}{\tau^2} - 1\right) L \partial_z p(-0, t), \quad (76)$$

где  $\tau = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$  — относительную площадь просвета. Если  $\tau = 1$  (сосуд чист), то последнее слагаемое исчезает из (76) и группа (64), (76) превращается в классические условия сопряжения Кирхгофа. Если же  $\tau = 0$  (сосуд полностью перекрыт), то вместо (64), (76) получаем условия Неймана

$$A \frac{\partial p}{\partial z}(-0, t) = 0, \quad A \frac{\partial p}{\partial z}(+0, t) = 0,$$

которые разделяют дифференциальные уравнения (73) на две независимые задачи с краевыми условиями (74).

В медицинских справочниках (см., например, [11]) указано, что при засорении сосуда на 30% ( $\tau = 0,7$ ) его следует признать здоровым, засорение на 70% ( $\tau = 0,3$ ) все еще не является критичным, но при засорении на 90% ( $\tau = 0,1$ ) поток крови ослабевает настолько, что возможно отмирание ткани. Авторы собираются проверить эти практические выводы при помощи расчетов по схеме, изображенной на рис. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Поверхностная энтальпия и упругие свойства кровеносных сосудов*. — Доклады РАН **441**, No. 1 (2011), 38–43.
2. V. A. Kozlov, S. A. Nazarov, *Asymptotic models of anisotropic elastic walls of blood vessels*. — Проблемы мат. анализа. 2015 (to appear).
3. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Асимптотическая модель взаимодействия потока крови со стенками вены и окружающей мышечной тканью*. Доклады РАН **446**, No. 6 (2012), 631–636.
4. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Асимптотические модели течения крови в артериях и венах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 80–106.
5. F. Berntsson, M. Karlsson, V. A. Kozlov, S. A. Nazarov, *A one-dimensional model of viscous blood flow in an elastic vessel*. — Applied Mathematics and Computation. (submitted)
6. С. А. Назаров, К. И. Пилецкас, *Рейнольдсово течение жидкости в тонком трехмерном канале*. — Литовский матем. сборник **30**, No. 4 (1990), 772–783.
7. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Простейшая одномерная модель ложной аневризмы в большой бедренной артерии*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014), 64–86.

8. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Одномерная модель вязкоупругого течения крови в тонком упругом сосуде*. — Проблемы матем. анализа. Вып. 78. Новосибирск (2015), 123–140.
9. С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий, *Изгибная жесткость тонкой пластины, армированной периодическими системами разъединенных стержней*. — Прикладная матем. и механика **74**, No. 3 (2010), 441–454.
10. С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий, *Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней*. — Матем. сборник **202**, No. 8 (2011), 41–80.
11. W. J. Zwiebel, J. S. Pellerito, *Introduction to vascular ultrasonography*. 5th ed. Philadelphia: Elsevier 2005.
12. J. P. Hornak, *The Basics of MRI*. Interactive Learning Software, 2008.
13. C. D. Murray, *The physiological principle of minimum work. I. The vascular system and cost of blood volume*. — Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **12** (1926), 207–214.
14. Y. C. Fung, *Biomechanics. Circulation*. Second ed. New York, Berlin: Springer, 2011.
15. G. S. Kassab, C. A. Rider, N. J. Tang, Y. C. Fung, *Morphometry of the pig coronary arterial trees*. — Am. J. Physiol. **266** (1993), H359–H365.
16. G. S. Kassab, Y. C. Fung, *The pattern of coronary arteriolar bifurcation and the uniform shear hypothesis*. — Ann. Biomed. Biol. **23** (1995), 13–20.
17. J. P. Mynard, J. J. Smolich, *One-dimensional haemodynamic modeling and wave dynamics in the entire adult circulation*. — Annals of Biomedical Engineering. 2015. DOI: 10.1007/s10439-015-1313-8
18. S. A. Nazarov, K. Pileckas, *Asymptotic conditions at infinity for the Stokes and Navier-Stokes problems in domains with cylindrical outlets to infinity*. — Quaderni di matematica **4** (1999), 141–243.
19. М. Д. Ван Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей*. М., Мир, 1967.
20. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М., Наука, 1989.
21. W. G. Mazja, S. A. Nazarov, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten*. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
22. I. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani, *Multiscale models of the vascular system*. — In: Cardiovascular Mathematics. Modeling and simulation of the circulatory system. Eds: Formaggia I., Quarteroni A., Veneziani A. Milano: Springer Verlag, 2009, pp. 395–446.
23. J. Peiré, A. Veneziani, *Reduced models of the cardiovascular system*. — In: Cardiovascular Mathematics. Modeling and simulation of the circulatory system. Eds: Formaggia I., Quarteroni A., Veneziani A. Milano: Springer Verlag, 2009, pp. 347–394.
24. G. P. Panasenko, *Multi-Scale Modelling for Structures and Composites*. — Dordrecht: Springer, 2005.
25. J.-L. Lions, *Some more remarks on boundary value problems and junctions Asymptotic methods for elastic structures* (Lisbon, 1993). 1995. Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 103–118.

26. С. А. Назаров, *Эллиптические задачи на гибридных областях*. — Функци. анализ прилож. **38**, No. 4 (2004), 55–72.
27. M. Specovius-Neugebauer, *Approximation of the Stokes Dirichlet problem in domains with cylindrical outlets*. — SIAM J. Math. Anal. **30**, No. 3 (1999), 645–677.
28. G. P. Panasenko, *Asymptotic expansion of the solution of Navier-Stokes equation in tube structure and partial asymptotic decomposition of the domain*. — Appl. Anal. **76**, No. 3-4 (2000), 363–381.
29. F. Blanc, O. Gipouloux, G. Panasenko, A. M. Zine, *Asymptotic Analysis and Partial Asymptotic Decomposition of the Domain for Stokes Equation in Tube Structure*. — Math. Models Methods Appl. Sci. **9**, No. 9 (1999), 1351–1378.
30. G. Panasenko, K. Pileckas, *Asymptotic analysis of the nonsteady viscous flow with a given flow rate in a thin pipe*. — Applicable Analysis **91**, No. 3 (2012), 559–574.
31. G. Panasenko, K. Pileckas, *Flows in a tube structure: equation on the graph*. — J. Math. Physics **55** (2014) 081505 ; doi: 10.1063/1.4891249.
32. G. Panasenko, K. Pileckas, *Asymptotic analysis of the non-steady Navier Stokes equations in a tube structures*. — Nonlinear Analysis. (submitted)
33. Г. Поля, Г. Сега, *Изопериметрические неравенства в математической физике*. М., Физматгиз, 1962.
34. V. A. Kozlov, S. A. Nazarov, G. Zavorokhin, *A fractal graph model of capillary type systems*. — (submitted)

Kozlov V. A., Nazarov S. A. Transmission conditions in a one-dimensional model of bifurcating blood vessel with an elastic wall.

We derive transmission conditions at a bifurcation point in a one-dimensional model of blood vessels by using a three-dimensional model. Both classical Kirchhoff conditions ensuring the continuity of pressure and zero flux flow in the node has to be modified in order to reflect properly the elastic properties of blood vessels and the nodes themselves. A simple approximate calculation scheme for the new physical parameters in the transmission conditions is proposed. We develop a simplified model of straight fragments of arteries with localized defects such as lateral micro-aneurysms and cholesterol plaques – these models also require setting transmission conditions.

Linköpings Universitet,  
581 83 Linköping, Sweden  
E-mail: vlkoz@mai.liu.se

Поступило 15 октября 2015 г.

С.-Петербургский  
государственный университет;  
С.-Петербургский государственный  
политехнический университет;  
Институт проблем машиноведения РАН  
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk, s.nazarov@spbu.ru