Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

А. П. Киселев

ОБЩИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СТРУКТУРЕ

§1. Введение

Точные решения для упругих поверхностных волн в слоистых структурах долгое время ограничивалось почти исключительно плоскими волнами. Точные описания более сложных поверхностных волновых процессов появились совсем недавно. Перечислим основные результаты.

Конструкции, основанные на суперпозиции плоских поверхностных волн. Построены простые выражения для поверхностных волн с плоскими фронтами, но линейно меняющимися вдоль фронта амплитудами (для классической волны Релея [1], для волн Лява в слоистой структуре [2], для объемных волн с среде с произвольной анизотропией [3]). Эти работы возникли в результате догадки, основанной на анализе результатов асимптотической теории [4]. Далее, построены решения с плоскими фронтами и полиномиальными по латеральным переменным амплитудами в случае однородного анизотропного полупространства [5]. Конструкции работ [3,5] были основаны на дифференцировании соответствующих плоских волн по волновому числу $\boldsymbol{k}$ (или эквивалентных, в сущности, рассмотрениях). Найдены и более сложные точные решения, отвечающие поверхностным гауссовым (и не только гауссовым) пучкам в изотропной структуре [6, 7] (которые раньше были построены лишь приближенно, см. [4,8]). В этом подходе плоские волны рассматриваются в качестве известных решений.

Сведение к паре функций, удовлетворяющих уравнениям в частных производных. Отметим направление, см., например, работы [9,10] и ссылки в них, в котором решение для поверхностной волны выражаются через пару гармонических функций (или их аналогов).

Carrier equation. В работах Ахенбаха на частных примерах показано, что задача о построении общего решения для поверхностной

Ключевые слова: упругие волны, точные решения, анизотропная упругость, слоистые структуры.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 14-01-00535.

волны при наличии осевой симметрии сводится к некоторому скалярному уравнению, которое оказалось уравнением колебаний мембраны. Это уравнение Ахенбах назвал *carrier equation*. Одним примером была волна Лява в трансверсально-изотропной пластине конечной толщины [12], другим – волна Релея в однородном изотропном полупространстве [13]. Подход Ахенбаха использовал явный вид точного решения и опирался на однородность среды по глубине. Аналоги *carrier equation* Ахенбаха выведены для нестационарных волн в отсутствие дисперсии, когда оно оказывается волновым уравнением (в котором скоростью распространения является скорость релеевской волны) [11], для задач статики [14], для теории пластин (где в статическом случае оно оказывается бигармоническим [14]), для пьезоупругости [9] и др.

Carrier equation и суперпозиция плоских волн. В работах [6, 7] вывод соответствующего *carrier equation* сопровождался замечанием, что его (не слишком быстро растущее на бесконечности) общее решение представимо интегралом плоских волн. Для изотропной (и трансверсально-изотропной) структуры, наличие интеграла плоских волн влечет *carrier equation* и наоборот. Ниже показывается, что интеграл плоских волн допускает обобщение и на случай достаточно произвольной анизотропии. При этом интеграл не удовлетворяет никакому скалярному дифференциальному уравнению в частных производных.

§2. Уравнение и граничные условия.

Мы рассматриваем гармонические по времени упругие волны в слоистом полупространстве. Декартовы координаты $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ разделим на латеральные $\boldsymbol{x}_\perp = (x_1, x_2)$ и глубину $z \equiv x_3$. Структура характеризуется упругими модулями c_{ijkl} и объемной плотностью $\rho > 0$, зависящими только от глубины, $c_{ijkl} = c_{ijkl}(z)$, $\rho = \rho(z)$. При $z > 0$ компоненты u_p вектора перемещений $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial_j c_{ijkl} \partial_k u_l + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\omega > 0$ – круговая частота. Граница $z = 0$ свободна от напряжений, т. е.

$$c_{3jkl} \partial_k u_l \big|_{z=0} = 0, \quad j, k, l = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Допускаются разрывы упругих модулей на плоскостях $z = z_1, \ldots, z_N$. Тогда накладываются условия жесткого контакта

$$[\boldsymbol{u}]|_{z=z_p} = 0, \quad [c_{3jkl}\partial_k u_l]|_{z=z_p} = 0, \tag{3}$$

$p = 1, \ldots, N$ где [ ] обозначает скачок. Чтобы решение описывало поверхностную волну, ставим условие $\boldsymbol{u} \to 0$ при $z \to \infty$.

§3. Плоские волны

Вектор перемещений в стандартной гармонической по времени однородной плоской волне можно записать в виде (например, [15])

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_\perp, z) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_\perp}\,\boldsymbol{W}(z; \boldsymbol{k}). \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$ – волновой вектор, лежащий в латеральной плоскости и предполагаемый вещественным, $\boldsymbol{W}(z, \boldsymbol{k})$ – зависимость поля от глубины, убывающая на бесконечности. Часто для простоты рассматривают волну, распространяющуюся вдоль оси x_1, т. е. $k_2 = 0$. Вообще говоря, длина вектора $\boldsymbol{k}$ и направление вектора $\boldsymbol{W}(z, \boldsymbol{k})$ зависят от направления вектора $\boldsymbol{x}_\perp$.

§4. Интеграл плоских волн.

Параметризуем $\boldsymbol{x}_\perp$ полярными координатами

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad r \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{5}$$

так что $\boldsymbol{x}_\perp = \boldsymbol{x}_\perp(\varphi)$, $\boldsymbol{k}(\varphi)$ и $\boldsymbol{W}(z, \boldsymbol{k}(\varphi))$. Предположим, что решение (4) существует для данного ω при всех φ и зависит от φ однозначным образом (это имеет место, например, для однородного полупространства с осевой симметрией упругих свойств) и как-нибудь нормируем вектор $\boldsymbol{W}$, например, полагая

$$|\,\boldsymbol{W}(0, \boldsymbol{k}(\varphi))| \equiv 1. \tag{6}$$

Рассмотрим, обобщая построения работ [6, 7] на анизотропный случай, плоские волны (4), распространяющиеся в разных направлениях. Будем параметризовать направления их распространения полярным углом φ'. Умножим (4) на произвольную обобщенную функцию $A(\varphi - \varphi')$ одного переменного, проинтегрируем по углу и придем к выражению

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_\perp(\varphi), z) = \int\limits_0^{2\pi} A(\varphi - \varphi') e^{i\boldsymbol{k}(\varphi')\cdot\boldsymbol{x}_\perp(\varphi')}\, \boldsymbol{W}(z, \boldsymbol{k}(\varphi'))\, d\varphi'. \qquad (7)$$

Очевидно, (7) удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (2) и (3) и убывает при $z \to \infty$.

Для построения решений вида (7) существование плоских волн, распространяющихся во всех направлениях и однозначная зависимость $\boldsymbol{k}(\varphi')$ при всех $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ не необходимы. Можно брать в (7) финитные функции, сосредоточенные на интервале, где существование и однозначность имеют место.

§5. Примеры

Решения, полиномиальные по латеральным переменным. Выбрав в (7) $A(\psi) = \delta(\psi)$, получаем стандартную плоскую волну, выбрав $A(\psi) = \delta'(\psi)$, имеем плоскую волну с линейной зависимостью амплитуды от $\boldsymbol{x}_\perp$. Для $A(\psi) = \frac{d^n}{d\psi^n}\delta(\psi)$, получаем решения с плосковолновой фазой и полиномиальными по $\boldsymbol{x}_\perp$ амплитудами (рассматривавшиеся для случая однородного анизотропного полупространства другим методом в работе [5], а для слоистого изотропного на основе интеграла плоских волн в работе [6], обобщавшей скалярную теорию, развитую в [7]).

Пучки поверхностных волн. Модификация построений работ [6, 7] позволяет построить поверхностные пучки, в том числе и гауссовы. Этот вопрос предполагается подробно рассмотреть в другой публикации.

Благодарности

Автор признателен В. М. Бабичу, Д. Ф. Паркеру, Д. Приказчикову и Б. Эрбашу за полезные обсуждения.

Литература

1. A. P. Kiselev, *Rayleigh wave with a transverse structure.* — Proc. R. Soc. London Ser. A **460** (2004), 3059–3064.
2. А. П. Киселев, А. М. Тагирджанов, *Лявовские волны с поперечной структурой.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия No. 3 (2008), 456–789.

3. А. П. Киселев, *Плоские волны с поперечной структурой в произвольно анизотропной упругой среде.* — Доклады Академии наук **418**, No. 3 (2008), 336–338.
4. V. M. Babich, A. P. Kiselev, *Nongeometrical phenomena in propagation of elastic surface waves*, in: R.V. Goldstein, G.A. Maugin (Eds.), Surface Waves in Anisotropic and Laminated Bodies and Defects Detection, Kluwer (2004), 119–129.
5. D. F. Parker, A. P. Kiselev, *Rayleigh waves having generalized lateral dependence.* — Quart. J. Mech. Appl. Math. **62** (2009), 19–29.
6. A. P. Kiselev, G. A. Rogerson, *Laterally dependent surface waves in an elastic medium with a general depth dependence.* — Wave Motion **46** (2009), 539–547.
7. A. P. Kiselev, E. Ducasse, M. Deschamps, A. Darinskii, *Novel exact surface wave solutions for layered structures.* — Comptes Rendus Mécanique **335** (2007), 419–422.
8. Н. Я. Кирпичникова, *О построении сосредоточенных вблизи лучей решений уравнений теории упругости для неоднородного изотропного пространства.* — Тр. МИАН СССР **115** (1971), 103–113.
9. J. Kaplunov, A. Zakharov, D.A. Prikazchikov, *Explicit models for elastic and piezoelastic surface waves.* — IMA J. Appl. Math. **71** (2006), 768–782.
10. D. A. Prikazchikov, *Rayleigh waves of arbitrary profile in anisotropic media.* — Mech. Res. Commun. **50** (2013), 83–86.
11. A. P. Kiselev, D. F. Parker, *Omni-directional Rayleigh, Stoneley and Schölte waves with general time-dependence.* — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **466** (2010), 2241–2258.
12. J. D. Achenbach, *Lamb waves as thickness vibrations superimposed on a membrane carrier wave.* — J. Acoust. Soc. Am. **103** (1998), 2283–2286.
13. J. D. Achenbach, *Explicit solutions for carrier waves supporting surface and plate waves.* — Wave Motion **28** (1998), 89–97.
14. D. F. Parker, *Waves and statics for functionally graded materials and laminates.* — Int. J. Eng. Sci. **47** (2009), 1315–1321.
15. В. М. Бабич, А. П. Киселев, *Упругие волны. Высокочастотная теория*, СПб.: БХВ-Петербург, 2014.

Kiselev A. P. General surface waves in layered anisotropic elastic structures.

A solution of homogeneous equations of elasticity equations describing surface waves and based on summation of plane waves is presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9
199034, С.-Петербург;
Институт проблем машиноведения РАН,
С.-Петербург, Россия
E-mail: kiselev@pdmi.ras.ru, a.kiselev@spbu.ru,
aleksei.kiselev@gmail.com

Поступило 13 ноября 2015 г.