Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

М. Н. Демченко

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

Посвящается Василию Михайловичу Бабичу

§1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta_x u = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u|_{t=0} = v. \tag{2}$$

Функция $u(x,t)$ определена при $x \in \mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$, $t \geqslant 0$, скорость $c(x)$ является C^∞-гладкой функцией. Функция v имеет компактный носитель в ограниченной области Ω,

$$\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d > 0\}.$$

Пусть множество Σ удовлетворяет условию

$$\overline{\Sigma} \subset \{(x', t) \,|\, x' \in \partial\mathbb{R}^d_+,\, t > 0\},$$

является открытым (в относительной топологии) и ограниченным. В этой работе рассматривается задача определения функции v по следу $u|_\Sigma$. При $c = 1$, $d = 3$, точное восстановление v сводится к определению функции по ее сферическим средним, поскольку

$$u(x', t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x'|=t} dS_y\, v(y).$$

В общем случае нас интересует вопрос восстановления сингулярностей функции v. Пусть v имеет сингулярность (например, разрыв) на некоторой гиперповерхности $S \subset \Omega$. Тогда решение задачи Коши $u(x,t)$ будет иметь сингулярности, которые описываются с помощью лучевого метода [1], канонического оператора Маслова [13] или интегральных операторов Фурье [7, 10, 23]. Гиперповерхность, на которой

Ключевые слова: задача определения источников, волновое уравнение, интегральные операторы Фурье.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-31388 мол-а, 15-31-20600 мол-а-вед, 14-01-00535, а также грантом СПбГУ 6.38.670.2013.

расположены сингулярности $u|_\Sigma$ (или u), может иметь особенности даже в случае гладкой гиперповерхности S и $c = 1$. Поэтому нахождение сингулярностей v (форма S, величина разрыва v на S) непосредственно по сингулярностям $u|_\Sigma$ требует изучения различных случаев геометрического вырождения. Вместо этого мы воспользуемся следующим наблюдением: задача обращения линейного оператора A, действующего в гильбертовых пространствах, сводится к задаче обращения оператора A^*A, так как зная функцию $f = Av$, мы можем перейти к функции

$$A^*f = A^*Av.$$

В качестве A мы возьмем оператор

$$\mathcal{O}v = \chi u|_\Sigma,$$

где $\chi(x', t) \geqslant 0 - C^\infty$-гладкая срезка, определенная для $x' \in \partial\mathbb{R}^d_+$, $t > 0$, равная нулю вне Σ и положительная в Σ.[1] Наличие гладкой срезки χ позволяет рассматривать операторы $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$ и $\mathcal{O}^*\mathcal{O}$ как интегральные операторы Фурье (ИОФ) ($\mathcal{O}^*$ – сопряженный оператор к $\mathcal{O}$ относительно L_2-нормы). Отметим, что $\mathcal{O}^*\mathcal{O}v$ является функцией в Ω. Мы покажем, что при выполнении некоторых условий на c (условия 1-2 в п. 2) композиция $\mathcal{O}^*\mathcal{O}$ является классическим псевдодифференциальным оператором (ПДО) порядка -2. Более точно:

$$(\mathcal{O}^*\mathcal{O}v)(y) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\eta\, e^{iy\eta}\, b(y,\eta)\, \widehat{v}(\eta) + (\mathrm{OP}_{-\infty}v)(y),$$

$\mathrm{OP}_{-\infty}$ означает сглаживающий оператор (оператор порядка $-\infty$), $\widehat{v}$ – Фурье-образ функции v, b – символ,

$$b(y,\eta) \sim \sum_{j\geqslant 2} b^{(j)}(y,\eta), \quad b^{(j)} \text{ однородны степени } -j \text{ по } \eta.$$

По свойству микролокальности ПДО сингулярный носитель (и, более того, волновой фронт – см. [10]) функции $\mathcal{O}^*\mathcal{O}v$ содержится в сингулярном носителе (волновом фронте) функции v. В частности, если v имеет особенности только на S, образ $\mathcal{O}^*\mathcal{O}v$ также имеет особенности только на S. Мы получим формулу для главного символа $b^{(2)}(y,\eta)$.

[1] Если Σ имеет гладкую границу, функция χ строится элементарно; в общем случае ее можно построить с помощью функции регуляризованного расстояния до замкнутого множества $(\partial\mathbb{R}^d_+ \times (0,\infty)) \setminus \Sigma$ – см. [20].

В эту формулу входит отображение $\gamma(y,\eta)$, $y \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, которое определяется следующим образом. Рассмотрим геодезическую,[2] выпущенную из точки y в направлении η. Если эта геодезическая пересекает $\partial\mathbb{R}^d_+$ в точке x' и оптическая длина отрезка геодезической $[y,x']$ равна t, положим

$$\gamma(y,\eta) = (x',t)$$

(мы будем предполагать, что такая точка пересечения единственна – см. условие 2). Имеет место равенство

$$b^{(2)}(y,\eta) = \sum_{\pm} \frac{1}{4|\eta|^2} \cdot \frac{c(x')}{c(y)^4} \cdot \frac{\chi(x',t)^2}{\cos\alpha(y,\eta)}\bigg|_{(x',t)=\gamma(y,\pm\eta)}, \tag{3}$$

где $\alpha(y,\eta)$ – угол падения геодезической, выпущенной из y в направлении η, на границу $\partial\mathbb{R}^d_+$. Каждое из слагаемых суммы в правой части (3) считается равным нулю, если точка пересечения $\gamma(y,\pm\eta)$ не определена.

Главный символ $b^{(2)}$ может быть использован для количественного описания сингулярностей v. В качестве примера мы рассмотрим функцию v, имеющую разрыв на гиперповерхности S. Поскольку оператор $\mathcal{O}^*\mathcal{O}$ имеет порядок -2, функция $w := \mathcal{O}^*\mathcal{O}v$ имеет сингулярность на S младшего порядка – "разрыв вторых производных" на S. При этом $-\Delta w$ имеет разрыв на S и выполнено

$$[-\Delta w]_y = b^{(2)}(y,n_y)\,[v]_y, \quad y \in S,\ n_y - \text{ единичная нормаль к } S \text{ в } y,$$

где $[\,\cdot\,]_y$ – скачок функции в точке $y \in S$. Выбор знака n_y в правой части не имеет значения, так как функция $b^{(2)}(y,\eta)$ – четная по η. Если $b^{(2)}(y,n_y) \neq 0$, эта формула позволяет выразить разрыв $[v]_y$ через $[-\Delta w]_y$ (функция w, очевидно, может быть найдена по $u|_\Sigma$). Как видно из формулы (3), условие $b^{(2)}(y,n_y) \neq 0$ равносильно условию $\gamma(y,n_y) \in \Sigma$. Заметим, что если последнее не выполняется, то часть сингулярностей решения u, порожденная разрывом начальных данных в точке y, не пересекается с множеством Σ. Тогда в сингулярностях $u|_\Sigma$ не содержится информации о разрыве v в точке y. Если же для любой точки $y \in S$ выполнено $\gamma(y,n_y) \in \Sigma$, мы можем, используя функцию w, определить форму S и разрыв функции v на S.

[2]Под геодезическими всюду в работе понимаются геодезические в оптической метрике.

В п. 4 мы рассмотрим случай, когда волны распространяются в полупространстве. При этом след решения на Σ соответствует измерениям волнового поля на границе среды. Мы покажем, что этот случай сводится к определению v в задаче (1)–(2).

Используемый нами подход, связанный с применением сопряженного оператора к данным, используется также в задачах интегральной геометрии, при этом сопряженный оператор называют "backprojection operator". В некоторых случаях удается точно определить искомую функцию, однако, к нашей ситуации ближе так называемые задачи интегральной геометрии с неполными данными [3, 8, 12, 15–17, 19], когда удается восстановить часть сингулярностей искомой функции. Применение теории ИОФ к задачам интегральной геометрии берет начало в работах [5, 9].

В ряде работ теория ИОФ и "backprojection operator" были применены к задачам сейсмики. Например, в работах [11, 21] рассматривалась линеаризованная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения и уравнений теории упругости – в предположении, что коэффициенты являются возмущением некоторых известных фоновых значений, по граничным значениям волнового поля восстанавливаются сингулярности возмущения. Множество работ посвящено задаче определения источников в случае, когда волны распространяются в ограниченной области – мы упомянем работу [2], а также [14], в которой изучается эволюционное уравнение достаточно общего вида. При этом речь идет о точном восстановлении источников, но область и множество Σ должны удовлетворять определенным условиям.

§2. Параметрикс задачи Коши

Для анализа оператора $\mathcal{O}^*\mathcal{O}$ мы воспользуемся параметриксом задачи Коши (1)–(2), аналогичным [22, §8.3]. Сначала напомним, что в случае $c = 1$ решение представимо в виде (метод Фурье)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\eta\, e^{ix\eta}\, \frac{\sin(t|\eta|)}{|\eta|}\, \widehat{v}(\eta) \\ &= (2\pi)^{-d} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\eta\, \frac{e^{i(x\eta+t|\eta|)}}{2i|\eta|} \widehat{v}(\eta) - \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\eta\, \frac{e^{i(x\eta-t|\eta|)}}{2i|\eta|} \widehat{v}(\eta) \right], \end{aligned}$$

$\widehat{v}$ – Фурье-образ функции v. В случае переменной скорости параметрикс можно искать в виде суммы двух классических ИОФ[3]:

$$u(x,t) = \sum_{\pm} (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\eta\, e^{i\varphi_\pm(x,t,\eta)} a_\pm(x,t,\eta)\, \widehat{v}(\eta), \tag{4}$$

$$a_\pm \sim \sum_{j\geqslant 1} a_\pm^{(j)}, \quad a_\pm^{(j)} \text{ однородны степени } -j \text{ по } \eta,$$

$$\varphi_\pm(x,t,\eta) \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\pm \text{ однородна степени 1 по } \eta.$$

Мы будем считать, что $0 < t < T$, где $T > 0$ – любое число, такое что

$$\overline{\Sigma} \subset \Sigma_0 := \partial\mathbb{R}^d_+ \times (0,T). \tag{5}$$

Фазовые функции $\varphi_\pm(x,t,\eta)$ и амплитуды $a_\pm^{(j)}(x,t,\eta)$ ищутся подстановкой данного выражения в волновое уравнение. При этом возникают соотношения, аналогичные соотношениям пространственно-временного лучевого метода [1, 18] (уравнение Гамильтона–Якоби, уравнения переноса).

Нам понадобятся только функции $\varphi_\pm(x,t,\eta)$ и $a_\pm^{(1)}(x,t,\eta)$. Выпишем соответствующие начальные условия:

$$\varphi_\pm\big|_{t=0} = x\eta, \quad a_\pm^{(1)}\big|_{t=0} = \mp\frac{1}{2i|\eta|\, c(x)}. \tag{6}$$

Функция $\varphi_\pm$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t\varphi_\pm)^2 - c^2\, |\partial_x\varphi_\pm|^2 = 0$$

или уравнению Гамильтона–Якоби

$$\partial_t\varphi_\pm \pm c\, |\partial_x\varphi_\pm| = 0. \tag{7}$$

Далее мы рассматриваем функции $\varphi := \varphi_+$, $a^{(1)} := a_+^{(1)}$ (функции φ_-, $a_-^{(1)}$ определяются формулами (15)). Введем функцию Гамильтона, соответствующую уравнению (7),

$$H(x,\xi) = c(x)|\xi|$$

и рассмотрим систему уравнений Гамильтона для $x(t) \in \mathbb{R}^d$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$\frac{dx}{dt} = \partial_\xi H = \frac{c\,\xi}{|\xi|}, \quad \frac{d\xi}{dt} = -\partial_x H = -|\xi|\, \partial_x c, \tag{8}$$

[3]За подробными сведениями об интегральных операторах Фурье (определение, канонические отношения, композиция) мы отсылаем читателя к книгам [7, 10, 23].

$$x(0) = y, \quad \xi(0) = \eta. \tag{9}$$

Кривая, состоящая из точек $(x(t), t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, есть пространственно-временной луч. Кривая $x(t)$ является геодезической, выпущенной из точки y в направлении η. Функцию φ можно описать следующим образом. Предположим, что для заданных x, t, η существует y, такое что для решения задачи Коши (8)–(9) выполнено $x(t) = x$. Тогда

$$\varphi(x, t, \eta) = \int\limits_0^t dt' \, (\xi \, \partial_\xi H - H)\big|_{(x(t'), \xi(t'))} + y\eta = y\eta. \tag{10}$$

Введем отображение $(y, t, \eta) \mapsto x(y, t, \eta) := x(t)$, где $x(t), \xi(t)$ – решение задачи Коши (8)–(9). Мы накладываем следующее

Условие 1. *Функция $c \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет неравенству $c(x) \geqslant c_0 > 0$. Отображение $y \mapsto x(y, t, \eta)$ – биекция в $\mathbb{R}^d$ при любых фиксированных $0 < t < T$, $\eta \neq 0$, и выполнено*

$$\left| \frac{\partial x}{\partial y}(y, t, \eta) \right| \neq 0$$

(скобки $|\cdot|$ для матриц обозначают модуль определителя).

Через $y(x, t, \eta)$ мы будем обозначать y, такое что $x(y, t, \eta) = x$. В этих обозначениях формулу (10) можно записать в виде

$$\varphi(x, t, \eta) = y(x, t, \eta) \, \eta. \tag{11}$$

При выполнении условия 1 функция $\varphi(x, t, \eta)$ определена при $x \in \mathbb{R}^d$, $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $0 < t < T$. В самом деле, C^∞-гладкое отображение

$$(y, t, \eta) \mapsto (x(y, t, \eta), t, \eta)$$

является биекцией множества $\mathbb{R}^d \times (0, T) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Якобиан этого отображения равен $|\partial_y x| \neq 0$. Тогда обратное отображение также C^∞-гладкое, и, в частности, входящая в правую часть равенства (11) функция $y(x, t, \eta)$ является C^∞-гладкой.

Функция φ однородна степени 1 по η. Из (11) следует, что

$$\partial_\eta \varphi(x, t, \eta) = y(x, t, \eta). \tag{12}$$

В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j}(y(x, t, \eta)\eta) = y_j(x, t, \eta) + \frac{\partial y}{\partial \eta_j}(x, t, \eta) \, \eta. \tag{13}$$

Точку $y(x,t,\eta)$ можно рассматривать как конечную точку геодезической длины t, выпущенной из точки x. Малое изменение $\delta\eta$ вектора η при фиксированных x, t приводит к малому изменению конечной точки δy. По свойству геодезических δy ортогонально в евклидовой метрике касательному вектору к геодезической в конечной точке y с точностью до членов младшего порядка. Поэтому второе слагаемое в правой части (13) равно нулю.

Перейдем к амплитуде $a^{(1)}$. Функция $a^{(1)}$ является решением уравнения переноса

$$\partial_t\varphi\cdot\partial_t a^{(1)} - c^2\partial_x\varphi\cdot\partial_x a^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\partial_t^2\varphi - c^2\Delta_x\varphi\right)a^{(1)} = 0.$$

Пусть $x(t),\xi(t)$ – решение задачи Коши (8)-(9). Два первых слагаемых в левой части уравнения переноса дают производную $a^{(1)}$ вдоль пространственно-временного луча $(x(t),t)$:

$$\partial_t\varphi\cdot\partial_t a^{(1)} - c^2\partial_x\varphi\cdot\partial_x a^{(1)} = \partial_t\varphi\cdot\frac{d}{dt}a^{(1)}(x(t),t,\eta).$$

Введем величину, которую мы будем называть геометрической расходимостью лучей, следуя [1]:

$$J(x,t,\eta) = \frac{1}{c(x)}\left|\frac{\partial x}{\partial y}(y(x,t,\eta),t,\eta)\right|.$$

Согласно [1] выполнено

$$\partial_t^2\varphi - c^2\Delta_x\varphi = \partial_t\varphi\cdot\frac{c}{J}\frac{d}{dt}\left(\frac{J}{c}\right)\Bigg|_{x(t),t,\eta}.$$

Уравнение переноса можно записать в виде

$$\left(\frac{d}{dt}a^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{c}{J}\frac{d}{dt}\left(\frac{J}{c}\right)a^{(1)}\right)\Bigg|_{x(t),t,\eta} = 0.$$

Исходя из начального условия (6), получаем

$$a^{(1)}(x(t),t,\eta) = \frac{-1}{2i|\eta|}\cdot\frac{1}{c(y)^2}\left(\frac{c}{J}\Bigg|_{x(t),t,\eta}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Функции φ_-, $a_-^{(1)}$ выражаются через φ, $a^{(1)}$ следующим образом

$$\varphi_-(x,t,\eta) = -\varphi(x,t,-\eta), \quad a_-^{(1)}(x,t,\eta) = -a^{(1)}(x,t,-\eta). \tag{15}$$

Для построения параметрикса задачи Коши (1)-(2) нужны все члены разложения амплитуды $a_{\pm}^{(j)}$ – они, как и $a_{\pm}^{(1)}$, ищутся как решения уравнений переноса, но с ненулевой правой частью. Для корректного определения ИОФ в правой части (4) необходимо еще проверить невырожденность фазовых функций $\varphi_{\pm}$ – мы не приводим здесь соответствующих выкладок. Представление (4) описывает решение задачи Коши с точностью до сглаживающего оператора, примененного к v – доказательство проводится с помощью энергетических оценок.

Из (4) следует, что оператор $\mathcal{O}$ может быть представлен в виде суммы

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{+} + \mathcal{O}_{-} + \mathrm{OP}_{-\infty}, \tag{16}$$

где $\mathcal{O}_{+}$ и $\mathcal{O}_{-}$ – классические ИОФ

$$(\mathcal{O}_{\pm}v)(x',t) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\eta\, e^{i\varphi_{\pm}(x',t,\eta)} \chi(x',t)\, a_{\pm}(x',t,\eta)\, \widehat{v}(\eta)$$

с фазовыми функциями $\varphi_{\pm}(x',t,\eta)$ и амплитудами $\chi(x',t)\, a_{\pm}(x',t,\eta)$. Мы будем рассматривать $\mathcal{O}_{\pm}$ как операторы, отображающие функции, определенные в Ω, в функции, определенные в Σ_0 (напомним, что $\chi = 0$ вне Σ). Доказательство невырожденности $\varphi_{\pm}(x',t,\eta)$ мы также не приводим. Отметим одно следствие этой невырожденности: решение задачи Коши u можно сужать на Σ_0, даже если u – распределение.

В дальнейшем мы будем иметь дело с композициями $\mathcal{O}_{+}^{*}\mathcal{O}_{+}$ и $\mathcal{O}_{-}^{*}\mathcal{O}_{-}$ (мы ввели гладкую срезку χ в определении $\mathcal{O}$ для того, чтобы композиции можно было рассматривать как ИОФ). Эти операторы являются классическими ПДО, если канонические отношения $C_{\pm}$ операторов $\mathcal{O}_{\pm}$ являются графиками канонических преобразований [7, 23]. Как будет показано ниже, это имеет место при выполнении следующего условия.

Условие 2. *Отрезок геодезической оптической длины T, один из концов которого принадлежит Ω, пересекает $\partial\mathbb{R}_{+}^{d}$ не более, чем в одной точке, причем пересечение может быть только трансверсальным.*

Каноническое отношение $C_{\pm}$ определяется следующим образом

$$C_{\pm} = \{(x',t,\partial_{x'}\varphi_{\pm}(x',t,\eta), \partial_t\varphi_{\pm}(x',t,\eta), y, \eta) \mid \\ (x',t) \in \Sigma_0, \eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, y \in \Omega,\ \partial_{\eta}\varphi_{\pm}(x',t,\eta) = y\}.$$

Рассмотрим для примера C_{+}. В силу (12) равенство $\partial_{\eta}\varphi(x',t,\eta) = y$ равносильно равенству $y(x',t,\eta) = y$ или, что то же, $x(y,t,\eta) = x'$.

Так как $x' \in \partial\mathbb{R}^d_+$, мы можем заключить, что x' совпадает с точкой пересечения геодезической, выпущенной из y в направлении η, с $\partial\mathbb{R}^d_+$. Такая точка единственна, поскольку $t < T$ (см. определение Σ_0) и выполнено условие 2. Мы можем записать это в виде равенства $(x', t) = \gamma(y, \eta)$. Далее

$$\partial_x \varphi(x', t, \eta) = \xi(y, t, \eta),$$

где отображение $\xi(y, t, \eta)$ определяется аналогично $x(y, t, \eta)$ с помощью задачи Коши (8)-(9). Из уравнения Гамильтона-Якоби (7) следует, что

$$\partial_t \varphi(x', t, \eta) = -c(x')|\xi(y, t, \eta)|.$$

Теперь мы готовы дать более ясное описание $C_\pm$. Для этого нам удобно ввести (открытое) множество $K \subset \Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, состоящее из (y, η), таких что точка $(x', t) = \gamma(y, \eta)$ определена и принадлежит Σ_0. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} C_\pm = \{(x', t, \xi', \mp c(x')|\xi|, y, \eta) \mid \\ (x', t) = \gamma(y, \pm\eta), \xi = \pm\xi(y, t, \pm\eta), (y, \pm\eta) \in K\}. \end{aligned}$$

Здесь $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})$. Таким образом, $C_\pm$ является графиком отображения, действующего из $\pm K$ в $\Sigma_0 \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Легко видеть, что это отображение инъективно, поэтому $C_\pm$ является графиком канонического преобразования.

Покажем, что

$$C_+^t \circ C_- = C_-^t \circ C_+ = \varnothing. \tag{17}$$

Например, $(\overline{y}, \overline{\eta}, y, \eta) \in C_-^t \circ C_+$, если и только если найдутся $(x', t, \xi', \tau) \in \Sigma_0 \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, такие что $(x', t, \xi', \tau, y, \eta) \in C_+$ и $(x', t, \xi', \tau, \overline{y}, \overline{\eta}) \in C_-$. Но, как видно из формулы для $C_\pm$, первое включение влечет за собой неравенство $\tau < 0$, а второе – неравенство $\tau > 0$, а значит, это взаимоисключающие условия.

§3. Главный символ $\mathcal{O}^*\mathcal{O}$

В силу (16) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^*\mathcal{O} &= (\mathcal{O}_+ + \mathcal{O}_-)^*(\mathcal{O}_+ + \mathcal{O}_-) + \mathrm{OP}_{-\infty} \\ &= \mathcal{O}_+^*\mathcal{O}_+ + \mathcal{O}_-^*\mathcal{O}_- + \mathcal{O}_+^*\mathcal{O}_- + \mathcal{O}_-^*\mathcal{O}_+ + \mathrm{OP}_{-\infty}. \end{aligned}$$

Из (17) следует, что $\mathcal{O}_+^*\mathcal{O}_-$ и $\mathcal{O}_-^*\mathcal{O}_+$ – сглаживающие операторы. Как было показано выше, операторы $\mathcal{O}_+^*\mathcal{O}_+$ и $\mathcal{O}_-^*\mathcal{O}_-$ являются классическими ПДО. Таким образом, главный символ $b^{(2)}$ можно записать в

виде

$$b^{(2)} = b_+^{(2)} + b_-^{(2)}, \tag{18}$$

где $b_+^{(2)}$ и $b_-^{(2)}$ – главные символы операторов $\mathcal{O}_+^*\mathcal{O}_+$ и $\mathcal{O}_-^*\mathcal{O}_-$. Далее мы приводим вычисление символа $b_+^{(2)}$. Мы воспользуемся формулой из [23, §8.6], которая в наших обозначениях принимает вид

$$b_+^{(2)}(y,\eta) = \frac{|\chi(x',t)\, a^{(1)}(x',t,\eta)|^2}{D(x',t,\eta)}\bigg|_{(x',t)=\gamma(y,\eta)}, \tag{19}$$

если точка $\gamma(y,\eta)$ определена и принадлежит Σ_0, в противном случае $b_+^{(2)}(y,\eta) = 0$. Функция D определяется следующим образом

$$D(x',t,\eta) = \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial(x',t)}(x',t,\eta)\right|.$$

Для вычисления этой функции положим

$$\psi := \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x'}(x',t,\eta) = \psi' = (\psi_1,\dots,\psi_{d-1}).$$

В силу уравнения Гамильтона-Якоби (7) справедливо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x',t,\eta) = -c(x')\,|\psi(x',t,\eta)|,$$

поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(x',t)}(x',t,\eta) = (\psi', -c\,|\psi|)\big|_{(x',t,\eta)},$$

$$\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial(x',t)}(x',t,\eta)\right| = \left|\frac{\partial(\psi',-c\,|\psi|)}{\partial\eta}\right| = \left|\frac{\partial(\psi',-c\,|\psi|)}{\partial\psi}\right|\cdot\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|.$$

Для первого множителя в полученном выражении имеем

$$\left|\frac{\partial(\psi',c|\psi|)}{\partial\psi}\right| = c(x')\,\frac{|\psi_d|}{|\psi|} = c(x')\cos\alpha(y,\eta)\big|_{y=y(x',t,\eta)}$$

(напомним, что $\alpha(y,\eta)$ – угол падения геодезической на границу $\partial\mathbb{R}^d_+$). Далее, учитывая равенство (12), имеем

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right| \\ &= \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\right| = \left|\frac{\partial y}{\partial x}(x',t,\eta)\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial y}(y,t,\eta)\bigg|_{y=y(x',t,\eta)}\right|^{-1},\end{aligned}$$

откуда

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right| = \frac{1}{c(x')\,J(x',t,\eta)}.$$

Из полученных соотношений следует формула

$$D(x',t,\eta) = \frac{\cos\alpha(y,\eta)}{J(x',t,\eta)}\bigg|_{y=y(x',t,\eta)}.$$

В формуле (19) функция $D(x',t,\eta)$ вычисляется только при таких x',t,η, что $y(x',t,\eta)\in\Omega$. Тогда $\cos\alpha(y,\eta)\neq 0$ в силу условия 2. Теперь подставим выражения для D и (14) для $a^{(1)}$ в (19):

$$b_+^{(2)}(y,\eta) = \frac{1}{4|\eta|^2}\cdot\frac{c(x')}{c(y)^4}\cdot\frac{\chi(x',t)^2}{\cos\alpha(y,\eta)}\bigg|_{(x',t)=\gamma(y,\eta)}.$$

Проведя аналогичные вычисления для $b_-^{(2)}$, с учетом (18) мы получим формулу (3). Нашим результатом является следующая

Теорема 1. *При выполнении условий* 1, 2 *композиция* $\mathcal{O}^*\mathcal{O}$ *с точностью до сглаживающего оператора совпадает с классическим ПДО в* Ω *порядка* -2, *для главного символа которого справедливо равенство* (3).

§4. Задача в полупространстве

В заключение, рассмотрим задачу определения источников, в которой волны распространяются в полупространстве ($x\in\mathbb{R}^d_+$, $t\geqslant 0$):

$$\partial_t^2\widetilde{u} - c^2\Delta_x\widetilde{u} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_d}\bigg|_{x_d=0} = 0, \tag{21}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = 0, \quad \partial_t\widetilde{u}|_{t=0} = v. \tag{22}$$

Эта задача сводится к задаче во всем пространстве, если $c(x)=\mathrm{const}$ для x, близких к границе $\partial\mathbb{R}^d_+$. В самом деле, продолжим c как четную функцию по переменной x_d и рассмотрим задачу (1)–(2) с той же функцией v, что и в (22). Решения u и $\widetilde{u}$ связаны равенством:

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) + u(x_1,\cdots,x_{d-1},-x_d,t),$$

откуда

$$\widetilde{u}|_\Sigma = 2u|_\Sigma.$$

Задаче (20)–(22) можно сопоставить оператор

$$\widetilde{\mathcal{O}}v = \chi\widetilde{u}|_{\Sigma},$$

причем выполнено

$$\widetilde{\mathcal{O}} = 2\mathcal{O}, \quad \widetilde{\mathcal{O}}^*\widetilde{\mathcal{O}} = 4\,\mathcal{O}^*\mathcal{O}.$$

Как и в случае задачи (1)–(2), для нахождения сингулярностей функции v в задаче (20)–(22) по $\widetilde{u}|_{\Sigma}$ можно применять сопряженный оператор $\widetilde{\mathcal{O}}^*$, который допускает следующее описание [4]. Рассмотрим начально-краевую задачу в области $x \in \mathbb{R}^d_+$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (напомним, T определяется соотношением (5)):

$$\partial_t^2\widetilde{U} - c^2\Delta_x\widetilde{U} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial x_d}\right|_{x_d=0} = -\chi f,$$
$$\widetilde{U}|_{t=T} = \partial_t\widetilde{U}|_{t=T} = 0,$$

f – функция на Σ. Оператор $\widetilde{\mathcal{O}}^*$ действует по правилу

$$\widetilde{\mathcal{O}}^* : f \mapsto \frac{1}{c^2}\widetilde{U}|_{\Omega\times\{t=0\}}.$$

Помимо задачи определения источников, операторы $\widetilde{\mathcal{O}}$ и $\widetilde{\mathcal{O}}^*$ участвуют в решении коэффициентных обратных задач BC-методом (см., например, уже упомянутую работу [4]). В этом случае определение операторов не содержит гладкой срезки χ, а Ω – это вся область, в которой распространяются волны (в этой работе Ω – область, в которой сосредоточены источники). Еще одно отличие состоит в том, что в BC-методе, примененном к волновому уравнению, главную роль играет композиция $\widetilde{\mathcal{O}}c^2\widetilde{\mathcal{O}}^*$, тогда как мы изучали оператор $\widetilde{\mathcal{O}}^*\widetilde{\mathcal{O}}$ или, что равнозначно, $c\widetilde{\mathcal{O}}^*\widetilde{\mathcal{O}}c$. Стоит отметить следующую связь $\widetilde{\mathcal{O}}c^2\widetilde{\mathcal{O}}^*$ и $c\widetilde{\mathcal{O}}^*\widetilde{\mathcal{O}}c$: сужения этих операторов на ортогональные дополнения к ядрам унитарно эквивалентны. Из этого, в частности, следует совпадение их спектров вне нуля (поведение спектра в случае волнового уравнения с потенциалом рассматривалось в работе [6]).

Литература

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны*, Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1985.

2. C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary.* — SIAM J. Contr. Opt. **30** (1992), 1024–1065.
3. A. Kh. Begmatov, *A Certain Inversion Problem for the Ray Transform with Incomplete Data.* — Siberian Math. J. **42**, No. 3 (2001), 428–434.
4. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems **13** (1997), R1–R45.
5. G. Beylkin, *The Inversion problem and applications for the generalized radon transform.* — Comm. Pure Appl. Math., Vol. XXXVII (1984), 579–599.
6. M. N. Demchenko, *Asymptotic behavior of singular values of the acoustic observation problem.* — `arXiv:1506.05563 [math.SP]` (2015).
7. J. J. Duistermaat, *Fourier integral operators.* Birkhäuser, Boston, 2011.
8. J. Frikel, E. T. Quinto, *Artifacts in incomplete data tomography with applications to photoacoustic tomography and sonar.* — `arXiv:1407.3453v4 [math.AP]` (2014).
9. V. Guillemin, S. Sternberg, *Some problems in integral geometry and some related problems in micro-local analysis.* — Amer. J. Math. **101**, No. 4 (1979), 915–955.
10. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV: Fourier Integral Operators, Classics in Mathematics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
11. A. P. E. ten Kroode, D.-J. Smit, A. R. Verdel, *A microlocal analysis of migration.* — Wave Motion **28** (1998), 149–172.
12. A. K. Louis, *Incomplete data problems in X-ray computerized tomography.* — Numer. Math. **48** (1986), 251–262.
13. V. P. Maslov, *Théorie des Perturbations et des Méthodes Asymptotiques.* Dunod, Paris, 1972.
14. А. С. Михайлов, В. С. Михайлов, *Уравнения метода Граничного Управления для обратной задачи об определении источника.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 121–129.
15. F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography.* SIAM's Classics in Applied Mathematics 32. Philadelphia, 2001.
16. L. V. Nguyen, *On Artifacts in Limited Data Spherical Radon Transform I: Flat Observation Surfaces.* — `arXiv:1407.4496 [math.CA]` (2014).
17. V. P. Palamodov, *Reconstruction from Limited Data of Arc Means.* — J. Fourier Analysis Appl. **6**, No. 1 (2000), 25–42.
18. M. M. Popov, *Ray Theory and Gaussian Beam for Geophysicists.* — EDUFBA, SALVADOR-BAHIA, 2002.
19. P. Stefanov, G. Uhlmann, *Is a curved flight path in SAR better than a straight one?* — SIAM J. Appl. Math. **73**, No. 4 (2013), 1596–1612.
20. И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* Москва, Мир, 1973.
21. Ch. C. Stolk, M. V. de Hoop, *Microlocal Analysis of Seismic Inverse Scattering in Anisotropic Elastic Media.* — Commun. Pure Appl. Math. **LV** (2002), 0261–0301.
22. М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы.* Москва. Мир, 1985.
23. F. Treves, *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators.* Vol. 2. University Series in Mathematics. Plenum, New York, 1980.

Demchenko M. N. On inverse source problem for wave equation.

We study the question of identification of initial data in the Cauchy problem for the wave equation with variable velocity. The wave field on some surface in the time-space is assumed to be known. Under some assumptions concerning the velocity it is shown that some part of singularities of initial data can be recovered.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 9 ноября 2015 г.