Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

А. М. Будылин, С. Б. Левин

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ АСИМПТОТИКИ ЯДРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ТРЁХ ОДНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОСРЕДСТВОМ ФИНИТНЫХ ПАРНЫХ ОТТАЛКИВАТЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Введение

В работе [4] были впервые предложены равномерные по угловым переменным асимптотические на бесконечности в конфигурационном пространстве формулы для собственных функций абсолютно непрерывного спектра оператора Шредингера в случае системы трёх одномерных квантовых частиц с парными короткодействующими отталкивательными потенциалами. Упомянутые асимптотические формулы были получены в терминах формальных асимптотических разложение в рамках достаточно тонкого эвристического анализа. Настоящая работа имеет своей целью анонсировать новый подход к построению асимптотики (на бесконечности в конфигурационном пространстве) ядра резольвенты оператора Шредингера соответствующей квантовой задачи рассеяния трех тел, в рамках которого упомянутые выше асимптотики собственных функций могут быть получены строго. Следует подчеркнуть, что ограничение рассмотрений на случай финитных потенциалов не приводит к упрощению задачи по-существу, поскольку потенциал взаимодействия всех трёх частиц остаётся не убывающим на бесконечности, но позволяет отвлечься от некоторого числа технических деталей.

В связи с тематикой данной задачи мы должны упомянуть результаты работ [6] и [7], в которых получены оценки, доказывающие отсутствие сингулярного непрерывного спектра оператора Шрёдингера для широкого класса потенциалов парных взаимодействий в рамках

Ключевые слова: асимптотики ядра резольвенты, квантовая задача рассеяния трех тел, асимптотики собственных функций.

Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 11.38.263.2014, РФФИ 14-01-0076015 А.

абстрактной теории. Наш подход, по-существу, близок к основополагающей работе [2] и в отличие от [6, 7], позволяет получить явные представления ядра резольвенты на непрерывном спектре на бесконечности в конфигурационном пространстве.

§1. Предварительные сведения

Исходная постановка и редукция задачи. В исходной постановке рассматривается нерелятивистский гамильтониан H

$$H\psi = -\Delta\psi + \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant 3} v(z_i - z_j)\psi,$$
$$z_i \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi = \psi(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{C},$$

Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, v – чётная финитная интегрируемая функция $\mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$, определяющая двухчастичное взаимодействие. В этом случае существенная самосопряжённость оператора H в пространстве квадратично интегрируемых функций хорошо известна.

Для отделения движения центра масс мы ограничиваем гамильтониан на поверхность Π, определяемую соотношением $\sum z_i = 0$. Допуская некоторую небрежность мы в дальнейшем через Δ будем обозначать оператор Лапласа–Бельтрами на плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. При этом на Π удобно использовать любую пару (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, так называемых якобиевых координат, однозначно определяемых соотношениями $x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_k - z_j)$, $y_i = \sqrt{\frac{3}{2}}z_i$, индексы (i, j, k) здесь образуют чётные перестановки. Ввиду ортонормальности якобиевых координат и инвариантности оператора Лапласа–Бельтрами имеем $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$, и наш оператор принимает вид

$$H = -\Delta + V, \quad V = \sum_{i=1}^{3} v_i, \quad v_i(x_i, y_i) = v(x_i). \tag{1.1}$$

Заметим, что носитель потенциала V лежит в бесконечной крестовой области.

Определим резольвенту оператора H: $R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \notin [0, +\infty)$, здесь и далее I – тождественный оператор. Резольвенту $(H_0 - \lambda I)^{-1}$ невозмущённого оператора $H_0 = -\Delta$ будем обозначать через $R_0(\lambda)$.

Принцип предельного поглощения. Мы интересуемся задачей рассеяния в рамках так называемого стационарного подхода. В этом случае изучение волновых операторов заменяется на изучение предельных значений $R(E \pm i0)$ резольвенты рассматриваемого оператора, когда спектральный параметр λ садится на вещественную ось ($\lambda \rightsquigarrow E \pm i0,\ E \in (0, +\infty)$). Доказательство существования таких предельных значений в подходящей топологии как раз и составляет суть принципа предельного поглощения. Коль скоро существование предельных значений резольвенты установлено, исследование собственно волновых операторов проходит по известной стандартной схеме, см., например, [8, 11].

Существование предельных значений резольвенты $R(E \pm i0)$, как правило рассматривается в следующем слабом смысле (так называемый метод оснащённого гильбертова пространства, см. [9]). В этом случае в основное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ непрерывно вкладывается некоторое банахово пространство $\mathcal{B}$, что, в свою очередь, позволяет вложить $\mathcal{H}$ в сопряженное к $\mathcal{B}$ пространство $\mathcal{B}^*$ с дальнейшим доказательством того, что $R(E \pm i\varepsilon):\ \mathcal{B} \to \mathcal{B}^*$ имеет непрерывное продолжение при $\varepsilon \downarrow 0$. Таким образом, обобщённые собственные функции в этом случае трактуются как элементы пространства $\mathcal{B}^*$, а основным объектом изучения становится скалярное произведение $(R(E \pm i\varepsilon)\varphi, \varphi),\ \varphi \in \mathcal{B}$, при $\varepsilon \downarrow 0$. В дальнейшем для определённости мы ограничимся рассмотрением лишь случая $\mathrm{Im}\lambda \downarrow 0$.

Модель Фридрихса–Фаддеева. В модели Фридрихса–Фаддеева, см. [2, 8], в рамках принципа предельного поглощения невозмущённый оператор трактуется как оператор умножения на независимую переменную, в то время как возмущение представляет собой интегральный оператор с гладким ядром. В приложениях по-существу это означает переход в двойственное импульсное представление. На эту точку зрения становимся и мы, хотя некоторый существенный анализ представляется естественным провести в исходном координатном представлении.

Для модели Фридрихса-Фаддеева характерен выбор в качестве вспомогательного пространства $\mathcal{B}$ пространства гёльдеровых функций. Этим обстоятельством будет определяться и наш выбор вспомогательного пространства, в топологии которого будут рассматриваться предельные в слабом смысле значения резольвенты. Таким пространством в импульсном представлении будет пространство $H^{\mu,\theta}(\mathbb{R}^2)$

$(0 < \theta, \mu < 1)$ гёльдеровых функций с нормой

$$\|f\|_{\mu,\theta} = \sup_{\xi,\eta}(1 + |\xi|^{1+\theta})\Big(|f(\xi)| + \frac{|f(\xi+\eta) - f(\xi)|}{|\eta|^{\mu}}\Big). \tag{1.2}$$

Пространство функций в координатном представлении, образы Фурье которых лежат в $H^{\mu,\theta}(\mathbb{R}^2)$ мы будем обозначать через $\widehat{H}^{\mu,\theta}$.

Анализ особенностей резольвенты в импульсном представлении удобно провести в рамках так называемого альтернирующего метода Шварца, см. [1, 5, 10]. Отметим, что известные уравнения Фаддеева, см. [2], также можно интерпретировать как вариант альтернирующего метода.

Альтернирующий метод Шварца. В рассматриваемой задаче прежде всего обращает на себя внимание возможность деления переменных для частичного гамильтониана $H_i = -\Delta + v_i$. Тем самым, существование предельных значений резольвенты $R_i(\lambda) = (H_i - \lambda I)^{-1}$ легко контролируется. Как следствие, встаёт вопрос об учёте таких вкладов в резольвенту $R(\lambda)$ полного гамильтониана H с сумарным потенциалом $V = \sum v_i$.

Схема такого учёта известна в литературе под названием альтернирующего метода Шварца.

Обозначим через $\{G_i\}|_{i=1}^n$ некоторый набор линейных операторов в комплексном векторном пространстве $\mathcal{X}$. Определим оператор $G = \sum_{i=1}^n G_i$. Предполагая, что все операторы $I - G_i$ биективны, положим $I - \Gamma_i = (I - G_i)^{-1}$. Оператор Γ_i называется оператором отражения относительно оператора G_i.

Суть альтернирующего метода Шварца сводится к следующему.

Биективность операторной матрицы $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} I & \Gamma_1 & \dots & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & I & \dots & \Gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_n & \dots & I \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathcal{X}^n$ эквивалентна биективности оператора $I - G$ в пространстве $\mathcal{X}$. Более того, если операторная матрица $\boldsymbol{\gamma}$ является решением уравнения $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \operatorname{diag}(\Gamma_1, \dots \Gamma_n)$, где через $\operatorname{diag}(\Gamma_1, \dots \Gamma_n)$ обозначена диагональная матрица, то оператор $\Gamma = \sum \gamma_{ij}$, где суммирование распространяется на все матричные элементы операторной матрицы $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{ij})$, определяет обратный к $I - G$ оператор равенством $(I - G)^{-1} = I - \Gamma$.

Отметим, что если операторная матрица $\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{L} - I$ в подходящем банаховом пространстве ограничена и норма её меньше единицы, то

$$\Gamma = \sum \Gamma_i - \sum_{i\neq j} \Gamma_i \Gamma_j + \sum_{i\neq j\neq k} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k - \ldots$$

где ряд сумм понимается как сходящийся по норме. Эта формула как раз объясняет название метода.

Наконец, отметим, что равенство $(I + \mathbf{\Gamma})^{-1} = (I - \mathbf{\Gamma}^2)^{-1}(I - \mathbf{\Gamma})$, сводит обращение операторной матрицы $\boldsymbol{L}$ к обращению операторной матрицы $I - \mathbf{\Gamma}^2$. Но матрица $\mathbf{\Gamma}^2$ в качестве компонент имеет суммы операторов вида $\Gamma_i\Gamma_j$ при $i \neq j$. В приложении к рассматриваемой задаче как раз результат анализа таких произведений привёл к искомому результату.

Для вложения нашей задачи в данную схему всё что нам нужно – это отделить свободную резольвенту $R_0(\lambda)$. При этом

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I - G(\lambda))^{-1}, \quad G(\lambda) = \sum G_i(\lambda), \quad G_i(\lambda) = v_i R_0(\lambda).$$

Операторы отражения по отношению к $G(\lambda)$ или $G_i(\lambda)$ будут обозначаться, соответственно, через $\Gamma(\lambda)$ и $\Gamma_i(\lambda)$. Итак,

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I - \Gamma(\lambda)). \tag{1.3}$$

§2. Краткое описание результатов

Далее мы предполагаем, что *образ Фурье финитной функции* v, *определяющей двухчастичное взаимодействие, принадлежит* $H^{\mu_0,\theta_0}(\mathbb{R})$ *при некоторых* $\mu_0 > 0$ *и* $\theta_0 > 0$.

Интегральное ядро оператора $\Gamma_j(\lambda)$ имеет вид

$$\Gamma_j(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'|\lambda) = v(x_j) \iint_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{q}\, \frac{\psi_j(\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\overline{\psi_j(\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q})}}{\boldsymbol{q}^2 - \lambda},$$

здесь $d\boldsymbol{q}$ – лебегова мера на плоскости импульсной переменной $\boldsymbol{q} = (k, p)$, двойственной к $\boldsymbol{z} = (x_j, y_j)$ и $\boldsymbol{z}' = (x_j', y_j')$, а ψ_j – обобщённая собственная функция непрерывного спектра оператора H_j, имеющая вид

$$\psi_j(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{q}) = \varphi_j(x_j, k) e^{i y_j p},$$

где $\varphi_j(x, k)$ является решением одномерного уравнения Шредингера

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)\Big)\varphi(x,k) = k^2 \varphi(x,k)$$

и определяется данными рассеяния соответствующей одномерной задачи рассеяния.

В некотором смысле ключём к доказательству анонсируемого результата явилось вычисление асимптотики ядра оператора $\Gamma_j(\lambda)\Gamma_k(\lambda)$ при $|\boldsymbol{z}| \to \infty$. Оно позволило получить разбиение оператора $\Gamma_j(\lambda)\Gamma_k(\lambda)$ в сумму

$$\Gamma_j(\lambda)\Gamma_k(\lambda) = A_{jk}(\lambda) + B_{jk}(\lambda),$$

где $A_{jk}(\lambda)$ – оператор ранга 2, включающий в себя всю «плохую» часть данного произведения, т.е. ту, которая выводит за рамки пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$ при $\mathrm{Im}\lambda \downarrow 0$, а оператор $B_{jk}(\lambda)$ – компактный оператор в $\widehat{H}^{\mu,\theta}$, сильно непрерывный по λ при $\mathrm{Im}\lambda \geqslant 0$ и $0 < c_1 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant c_2 < \infty$, если μ и θ достаточно малы (в частности, меньше μ_0 и θ_0, соответственно). Предельный оператор $A_{jk}(E+i0)$ на функциях из $\widehat{H}^{\mu,\theta}$ действует в двумерное пространство функций вида

$$v(x_j)\varphi_j(x_j,0)|y_j|^{-1/2}e^{i|y_j|\sqrt{E}}(C_1\chi(y_j) + C_2\chi(-y_j)), \tag{2.1}$$

где χ можно определить как сглаженную характеристическую функцию полуоси $(T,+\infty)$ при $T \gg 1$. Пространство таких функций имеет корневые аналитические особенности на оси в импульсном представлении, именно особенности вида $(p \pm \sqrt{E})^{-1/2}$. Мы назовём так описанный образ оператора $A_{jk}(\lambda)$ пространством функций типа A_j. Алгебраическую сумму пространств типа A_j по всем значениям j обозначим через D.

Следует подчеркнуть, что именно необходимость выделения такого оператора как A_{jk} является существенной отличительной чертой данной задачи – задачи рассеяния трёх одномерных частиц – в сравнении со случаем задачи рассеяния трёх трёхмерных частиц, рассмотренной в работе [2].

Следствием разбиения $\Gamma_j(\lambda)\Gamma_k(\lambda)$ оказывается представление

$$I - \mathbf{\Gamma}^2(\lambda) = I - \boldsymbol{A}(\lambda) - \boldsymbol{B}(\lambda),$$

где операторные матрицы $\boldsymbol{A}(\lambda)$ и $\boldsymbol{B}(\lambda)$ наследуют свойства соответствующих скалярных операторов $A_{jk}(\lambda)$ и $B_{jk}(\lambda)$. Имеет силу следующее утверждение.

Лемма 2.1. *При* $\mathrm{Im}\lambda > 0$ *оператор* $(I - \mathbf{\Gamma}^2(\lambda))^{-1}$ *имеет представление*

$$(I - \mathbf{\Gamma}^2(\lambda))^{-1} = I - \widetilde{\boldsymbol{A}}(\lambda) - \widetilde{\boldsymbol{B}}(\lambda),$$

где матричные компоненты $\widetilde{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ *являются операторами конечного ранга, действующими в пространство* D*, а матричные компоненты* $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ *являются компактными операторами в* $\widehat{H}^{\mu,\theta}$*, непрерывными в сильном смысле по* λ *при* $\mathrm{Im}\lambda \geqslant 0$ *и* $0 < c_1 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant c_2 < \infty$*, если* μ *и* θ *достаточно малы.*

Как нетрудно видеть, если φ_λ является функцией из пространства D, а $\psi \in \widehat{H}^{\mu,\theta}$, то $(R_0(\lambda)\varphi_\lambda, \psi)$ имеет предел при $\mathrm{Im}\lambda \downarrow 0$. Как следствие, для искомого скалярного оператора $\Gamma(\lambda)$ конструкции описанного выше альтернирующего метода Шварца ведут к представлению:

$$\Gamma(\lambda) = \sum \Gamma_i(\lambda) + \mathcal{N}(\lambda),$$

$$\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{A}(\lambda) + \mathcal{B}(\lambda),$$

где $\mathcal{A}(\lambda)$ – оператор конечного ранга, действующий в пространство D, а $\mathcal{B}(\lambda)$ – компактный оператор в $\widehat{H}^{\mu,\theta}$, если μ, θ достаточно малы, сильно непрерывный по $\mathrm{Im}\lambda \downarrow 0$. Отметим, что оператор $\mathcal{N}(\lambda)$ обладает тем свойством, что произведение $R_0(\lambda)\mathcal{N}(\lambda)$ имеет слабый предел в $\widehat{H}^{\mu,\theta}$ при $\mathrm{Im}\lambda \downarrow 0$ и $\mu, \theta > 0$. Конечно, само существование такого предела вытекает из результатов работ [6, 7].

Как следствие, имеет силу

Теорема 2.2. *Слабый предел* $R(\lambda)$*, т.е.*

$$\lim_{\mathrm{Im}\lambda\downarrow 0} (R(\lambda)\varphi, \varphi), \qquad \varphi \in \widehat{H}^{\mu,\theta},$$

имеет вид:

$$\sum_j \lim_{\mathrm{Im}\lambda\downarrow 0} (R_j(\lambda)\varphi, \varphi) + \lim_{\mathrm{Im}\lambda\downarrow 0} (R_0(\lambda)\mathcal{A}(\lambda)\varphi, \varphi) + \lim_{\mathrm{Im}\lambda\downarrow 0} (R_0(\lambda)\mathcal{B}(\lambda)\varphi, \varphi), \quad (2.2)$$

где операторы $\mathcal{A}(\lambda)$ *и* $\mathcal{B}(\lambda)$ *описаны выше и* $R_j(\lambda)$ *– резольвенты двухчастичных (парных) операторов Шредингера.*

Подчеркнем, что старшие члены асимптотики ядра резольвенты определяются лишь первыми двумя слагаемыми в выражении (2.2).

Отметим, что данная теорема обеспечивает законность асимптотических построений работ [3, 4].

Литература

1. A. M. Budylin, V. S. Buslaev, *Reflection operator and their applications to asymptotic investigations of semiclassical integral equations.* — Advances in Soviet Math., AMS, Providence, RI **7**, No. 6 (1991), 79–103.
2. L. D. Faddeev, *Mathematical aspects of the three-body problem of the quantum scattering theory.* — Daniel Davey and Co., Inc. (1965).
3. V. S Buslaev, S. B. Levin, P. Neittaanmäki, T. Ojala, *New approach to numerical computatio of the eigenfunctions of the continuous spectrum of three-particle Schrödinger operator*: I. *One-dimensional particles, short-range pair potentials.* — JPhysA, 2010.
4. V. S. Buslaev, S. B. Levin, *Asymptotic Behavior of the Eigenfunctions of the Many-particle Shrödinger Operator. I. One-dimentional Particles.* — Amer. Math. Soc. Transl. **2** (2008), 225.
5. А. М. Будылин, В. С. Буслаев, *Квазиклассическая асимптотика резольвенты интегрального оператора свёртки с синус-ядром на конечном интервале.* — Adv. Sov. Math., Amer. Math. Soc. **7** (1995), 107–157.
6. E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators.* — Commun. MathPhys **78** (1981), 391–408.
7. P. Perry, I. M. Sigal, B. Simon, *Spectral analysis of N-body Schrodinger operators.* — Annals of Mathematics **114** (1981), 519–567.
8. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория тассеяния.* — СПбГУ, 1994.
9. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства.* — (Обобщённые функции, вып. 4, ФМ, 1961.
10. К. Морен, *Методы гильбертова пространства.* Мир, 1965.
11. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т.* 3. *Теория Рассеяния.* Мир, 1982.

Budylin A. M., Levin S. B. To the question of Schroedinger operator kernel resolvent asymptotics construction in the three one-dimensional quantum particles scattering problem interacting by finite repulsive pair potentials.

The present work aims at announcing a new approach to a construction of the asymptotics (at infinity in configuration space) of the Schŕodinger operator resolvent kernel asymptotics in the scattering problem of three one-dimensional quantum particles interacting by the finite pair repulsive potentials. Within the framework of this approach the asymptotics of Schŕodinger operator absolutely continuum spectrum eigenfunctions can be constructed explicitly. We should emphasize that the restriction of the consideration for the case of finite pair potentials does not lead to a simplification of the problem in its essence as the potential of the interaction

of all three particles remains non-decreasing at infinity but allows to put aside a certain number of technical details.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.budylin@spbu.ru,
budylin@mph.phys.spbu.ru
E-mail: s.levin@spbu.ru

Поступило 4 июля 2015 г.