Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

А. М. Будылин, С. Б. Левин

УРАВНЕНИЯ В СВЁРТКАХ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ С СИМВОЛАМИ, ИМЕЮЩИМИ НУЛИ СТЕПЕННОГО ПОРЯДКА

§1. Исходная постановка задачи

Уравнениям в свёртках на конечном интервале, т.е. уравнениям вида

$$\int_0^L A(x-t)f(t)dt = g(x)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{1.1}$$

посвящена обширная литература в связи с их возникновением в многочисленных задачах математической физики, см. например, [9]. Как правило, данное уравнение определяется символом a, под которым понимается образ Фурье функции A, задающей ядро оператора в данном уравнении. Мы полагаем

$$a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} A(x)\, e^{-ix\xi}\, dx. \tag{1.2}$$

Отметим, что с точки зрения теории псевдодифференциальных операторов под символом следовало бы понимать функцию $\sigma(x,\xi,y) = \theta(x)a(\xi)\theta(y)$, где $\theta = \chi_{[0,L]}$ – характеристическая функция интервала $[0,L]$.

Одним из наиболее интересных и зачастую трудных вопросов в связи с уравнением (1.1) является вопрос об асимптотическом поведении решений такого уравнения при $L \to \infty$.

Ключевые слова: квазиклассические асимптотики, сингулярные интегральные уравнения, метод Винера–Хопфа, альтернирующий метод Шварца .

Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 11.38.263.2014, РФФИ 14-01-0076015 А.

Элементарная замена переменных приводит нас к эквивалентному уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} A\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big) f(t)\,dt = g(x), \quad x\in[-1,1], \tag{1.3}$$

с малым параметром $\varepsilon = 2L^{-1}$ и, естественно, переопределёнными функциями f и g. Вопросам асимптотического при $\varepsilon\to 0$ обращения оператора $\mathcal{A}$

$$(\mathcal{A}f)(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} A\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big) f(t)\,dt \tag{1.4}$$

(и некоторых его обобщений) был посвящён цикл работ [1,3–5], в которых предполагалось, что символ $\sigma(x,\xi,y) = \theta(x)a(\varepsilon\xi)\theta(y)$ ($\theta = \chi_{[-1,1]}$) оператора $\mathcal{A}$ может иметь скачок по переменной ξ. Следует заметить, что в случае гладкости символа по ξ ядро оператора $\mathcal{A}$ относится к короткодействующим (т.е. убывающим на бесконечности быстрее кулоновского), для которых возможно использовать идеи локализации. Наличие скачка превращает оператор $\mathcal{A}$ в дальнодействующий, концы интервала начинают нетривиально взаимодействовать, что препятствует использованию стандартных методов двухмасштабных разложений. Для учёта взаимодействия концов интервала в упомянутых выше работах был использован альтернирующий метод Шварца, который помогал выделить модельную задачу. Её решение уже позволяло реализовать стандартную схему возмущений.

В данной работе будет рассмотрен специальный случай, когда символ оператора $\mathcal{A}$ имеет нули. Именно, будет рассмотрен случай функции

$$a(\xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\nu+\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{1.5}$$

где $\mathrm{Re}\nu > 0$ и

$$\sqrt{1-\xi^2} = \begin{cases} \sqrt{1-\xi^2} > 0 & \text{при} \quad |\xi|<1, \\ i\sqrt{\xi^2-1} \quad (\sqrt{\xi^2-1}>0) & \text{при} \quad |\xi|>1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Данная задача известна в теории акустики и возникает, например, при описании волновода, поверхность которого покрыта слоем льда конечной толщины. В этой связи следует упомянуть работу [2], где исследована разрешимость поставленной задачи, найдены оценки для решений и описан старший член асимптотики для специального вида функционалов от решения.

Задачей данной работы будет построение асимптотики собственно обратного оператора к оператору $\mathcal{A}$, при этом будет получено асимптотическое разложение $\mathcal{A}^{-1}$, полное в степенных порядках. Следует упомянуть, также, что техника данной работы существенно отличается от техники работы [2], в которой использовался определённый вид регуляризации символа оператора, привносящий в задачу дополнительный малый параметр.

Проводимые в дальнейшем построения применимы, на самом деле, к весьма широкому классу символов со степенными особенностями. Несмотря на это, в данной работе мы решили ограничиться именно этим частным случаем, поскольку характер асимптотики весьма существенно зависит от аналитической специфики символа рассматриваемого оператора.

Подчеркнем, что, хотя ядро A рассматриваемого оператора является короткодействующим, данная асимптотическая задача не является тривиальной, поскольку взаимодействие концов интервала контролируется в значительной степени оператором с полным символом $\sigma_1(x,\xi,y) = \theta(x)[a(\varepsilon\xi)]^{-1}\theta(y)$, а следовательно, – дальнодействующим.

Альтернирующий метод Шварца и в данном случае ведёт к выделению модельной задачи, вычленение которой позволяет реализовать метод возмущений. Следует отметить, что интуитивная близость исходной задачи к уравнению Винера–Хопфа

$$\int_0^\infty A(x-t)f(t)\,dt = g(x)\,, \qquad x \geqslant 0, \tag{1.7}$$

является обманчивой и может лишь усложнить асимптотический анализ. Решение уравнения (1.7) не приводит к старшему члену асимптотики уравнения (1.1) именно в силу дальнодействия оператора с символом $\sigma_1(x,\xi,y)$.

§2. Выбор пространств

Сказанное в конце предыдущего раздела приводит нас к следующей постановке задачи. Нас будет интересовать асимптотика при $\varepsilon \downarrow 0$

оператора, обратного к оператору $\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{A}f)(x) = \int_{-1}^{1} A\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big) f(t)\,dt = g(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.1}$$

где символ $a(\xi)$ ядра A определён соотношениями (1.5), (1.6).

Для дальнейшего, мы введём оператор A как оператор с ядром $A(\frac{x-t}{\varepsilon})$ на оси, т.е.

$$(Af)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big) f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Тогда оператор в левой части равенства (2.1) запишется как $\theta A\theta$, где θ – оператор умножения на характеристическую функцию $\theta(x)$ интервала $(-1, 1)$. Мы будем рассматривать оператор $\mathcal{A} = \theta A\theta$ как оператор, действующий на пространстве функций, определённых на интервале $[-1, 1]$. Допуская некоторую вольность, обратный к нему мы обозначаем через $(\theta A\theta)^{-1}\theta$.

Введём далее оператор $\boldsymbol{a}$ умножения на функцию $a(\varepsilon\xi)$ и оператор T умножения на функцию $e^{i\xi}$. Введём также операторы p, q проецирования на функции, допускающие аналитическое продолжение, соответственно, в верхнюю и нижнюю полуплоскость комплексной плоскости. Напомним, что ядра этих операторов могут быть описаны при помощи обобщённых функций

$$p \sim \frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{\xi-\eta+i0}, \quad q \sim \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\xi-\eta-i0}.$$

Операторы p и q можно трактовать как Фурье-образы операторов Q и P умножения на характеристические функции $Q(x)$ и $P(x)$ полуосей $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ соответственно.

Рассматриваемое здесь интегральное уравнение относится к классу уравнений Винера-Хопфа на интервале с нулями символа нецелого порядка. Наиболее естественно, вероятно, искать решение такого уравнения в одном из классов L_p, см. [8], где $1 \leqslant p < \infty$. Однако техника данной работы будет привязана к известным результатам в теории сингулярных интегральных уравнений и это обстоятельство вынуждает нас исключить случай $p = 1$. На самом деле, в данной короткой работе мы ограничимся случаем $p = 2$, хотя это ограничение уже не является существенным.

Напомним, что сингулярный оператор $s = p - q$ ограничен и ограниченно обратим в пространствах квадратично интегрируемых функций с весами вида

$$|1+\xi^2|^{\varkappa/2}\prod|\xi-\xi_k|^{\varkappa_k}$$

при условии

$$-1 < \varkappa_k < -1, \quad -1 < \varkappa + \sum \varkappa_k < 1,$$

см., например, [7,8]. Фурье-образ оператора A примет вид

$$\frac{1}{4}(T^{-1}sT - TsT^{-1})\boldsymbol{a}(T^{-1}sT - TsT^{-1})$$

и, как следствие, действует как ограниченный оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\rho)$, где через $L_2(\rho)$ обозначено пространство квадратично интегрируемых функций с весом

$$\rho = \rho(\varepsilon\xi), \quad \rho(\xi) = \left|\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\right|^{\varkappa}, \quad 0 < \varkappa < 1. \tag{2.3}$$

В дальнейшем параметр $\varkappa$ будет считаться фиксированным произвольно в выбранном диапазоне. Обозначим через $H(\rho)$ пространство функций на интервале $(-1,1)$, Фурье-образы которых лежат в $L_2(\rho)$. Отметим, что $H(\rho) \subset C_0^\infty$. Для определённости, мы рассмотрим построение асимптотики обратного к $\mathcal{A}$ как оператора

$$\mathcal{A}^{-1}: \; H(\rho) \to L_2([-1,1]).$$

§3. Формула Козака

Прежде чем воспользоваться альтернирующим методом Шварца, удобно переписать обратный к $\mathcal{A}$ оператор в виде

$$(\theta A\theta)^{-1}\theta = \theta A^{-1}\theta - \theta A^{-1}(\theta' A^{-1}\theta')^{-1}\theta' A^{-1}\theta\,, \tag{3.1}$$

где $\theta' = I - \theta$. Данное соотношение хорошо известно в проекционных методах под названием формулы Козака, см. [6].

Учитывая, что символ оператора A^{-1} имеет вид $\frac{1}{a(\varepsilon\xi)} = 1 + \frac{\nu}{\sqrt{1-(\varepsilon\xi)^2}}$, положим $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}^{-1} - I$ и, соответственно, $K = A^{-1} - I$. Тогда

$$(\theta A\theta)^{-1}\theta = \theta A^{-1}\theta - \theta K(\theta' A^{-1}\theta')^{-1}\theta' K\theta. \tag{3.2}$$

Заметим, что если $\hat{f} \in L_2(\rho)$, то

$$\int\limits_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon} \left| \frac{\hat{f}(\xi)}{\sqrt{|1-(\varepsilon\xi)^2|}} \right|^2 d\xi \leqslant \int\limits_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon} \frac{d\xi}{|1-(\varepsilon\xi)^2|^{1-\varkappa}} \int\limits_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon} \frac{|\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi}{|1-(\varepsilon\xi)^2|^{\varkappa}} < \infty,$$

откуда вытекает, что операторы A^{-1} и K определены как ограниченные из $H(\rho)$ в $L_2(\mathbb{R})$. Используя метод Шварца мы покажем, что оператор $(\theta' A^{-1}\theta')^{-1}\theta'$ существует и ограничен как оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $H(\rho)$ и опишем его асимптотическое разложение.

§4. Аналитическая факторизация символа

Введем аналитическую факторизацию функции $a(\xi)$:

$$a(\xi) = a_+(\xi)a_-(\xi), \tag{4.1}$$

где $a_\pm$ – функции, аналитические соответственно в $\mathbb{C}_\pm$. Именно,

$$a_-(\xi) = \sqrt{1-\xi+i0}\cdot b_-(\xi), \quad a_+(\xi) = \sqrt{1+\xi+i0}\cdot b_+(\xi), \tag{4.2}$$

где $b_\pm$ – не имеют корней на вещественной оси, а ветвь корня выбирается как главная на плоскости с разрезом $(1, 1+i\infty)$ для $\sqrt{1-\xi+i0}$, и с разрезом $(-1,-1-i\infty)$ для $\sqrt{1+\xi+i0}$. Для того, чтобы описать функции $b_\pm$ более точно, рассмотрим функцию

$$c(\xi) = \frac{i\sqrt{\xi^2+1}}{\nu+\sqrt{1-\xi^2}} \sim 1 \quad \text{при } \xi \to \infty.$$

Она факторизуется стандартным образом $c = c_+c_-$

$$c_+ = \exp(p[\ln c]), \quad c_- = \exp(q[\ln c]),$$

с асимптотикой на бесконечности вида $c_\pm \sim 1$. Тогда можно положить

$$b_-(\xi) = \frac{-ic_-(\xi)}{\sqrt{\xi-i}} \sim \frac{-i}{|\xi|^{1/2}}, \quad b_+(\xi) = \frac{c_+(\xi)}{\sqrt{\xi+i}} \sim \frac{1}{|\xi|^{1/2}} \quad \text{при } \xi \to +\infty. \tag{4.3}$$

При этом

$$b_+(\xi)b_-(\xi) = \frac{1}{\nu+\sqrt{1-\xi^2}} = b(\xi).$$

Функция $b(\xi)$ определена на плоскости с описанными выше разрезами как мероморфная не имеющая нулей, но с парой полюсов

$$\xi = \pm\sqrt{1-\nu^2},$$

один из которых лежит в верхней полуплоскости, а другой – в нижней. Как следствие, функция $b_-(\xi)$ продолжается как аналитическая в верхнюю полуплоскость с разрезом $(1, 1+i\infty)$ и полюсом $\sqrt{1-\nu^2}$, а функция $b_+(\xi)$ продолжается в нижнюю полуплоскость с разрезом $(-1, -1-i\infty)$ и полюсом $-\sqrt{1-\nu^2}$.

Отметим, что функции $a_\pm(\xi)$ на бесконечности на вещественной оси ведут себя как единица.

Введём операторы умножения на функции $a_\pm(\varepsilon\xi)$, обозначив их соответственно $\boldsymbol{a}_\pm$. Эти операторы можно трактовать как Фурье-образы операторов $A_\pm$ свёртки на оси с символами $a_\pm(\varepsilon\xi)$.

Следующие аналитические соотношения обычно называются свойствами треугольности операторов $\boldsymbol{a}_\pm$:

$$p\boldsymbol{a}_- q = 0\,, \quad q\boldsymbol{a}_+ p = 0.$$

Фурье-прообразы этих соотношений принимают вид

$$QA_-P = 0, \quad PA_+Q = 0.$$

Обратные операторы $\boldsymbol{a}_\pm^{-1}$ также являются треугольными, при этом соотношения

$$p\boldsymbol{a}_-^{-1}q = 0, \quad q\boldsymbol{a}_+^{-1}p = 0, \quad QA_-^{-1}P = 0, \quad PA_+^{-1}Q = 0$$

остаются верными в случаях трактовки данных операторов как ограниченных при соответствующем выборе, например, весовых пространств. Мы опишем подходящие весовые пространства ниже.

Положим $\theta' = P_+ + P_-$, где P_+ – оператор умножения на характеристическую функцию полуоси $(1, \infty)$ и P_- – оператор умножения на характеристическую функцию полуоси $(-\infty, -1)$. В силу инвариантности оператора свертки относительно сдвига имеем также

$$(I - P_+)A_-^{\pm 1}P_+ = 0\,, \qquad P_-A_-^{\pm 1}(I - P_-) = 0\,,$$
$$(I - P_-)A_+^{\pm 1}P_- = 0\,, \qquad P_+A_+^{\pm 1}(I - P_+) = 0.$$

В дальнейшем, через $\theta' L_2(\mathbb{R})$ мы будем обозначать пространство функций $L_2(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$. Введём, дополнительно, весовые функции $\rho_+(\varepsilon\xi), \rho_-(\varepsilon\xi)$:

$$\rho_+(\xi) = \left|\frac{\xi - i}{\xi - 1}\right|^{\varkappa}, \quad \rho_-(\xi) = \left|\frac{\xi - i}{\xi + 1}\right|^{\varkappa}, \quad \rho = \rho_+\rho_-.$$

Как и выше, через $H(\rho_\alpha)$, $\alpha = +, -$, мы будем обозначать пространства функций, Фурье-образы которых лежат в весовых пространствах

$L_2(\rho_\alpha)$. Пространство функции из $H(\rho_+)$ с носителем на полуоси $[1,\infty)$ будет обозначаться через $P_+H(\rho_+)$. Аналогично, через $P_-H(\rho_-)$ будет обозначаться пространство функций из $H(\rho_-)$ с носителем в $(-\infty,-1]$. Прямая сумма этих пространств будет обозначена через $\oplus P_\alpha H(\rho_\alpha)$ (суммирование по α). Аналогично определяется пространство функций $\theta' H(\rho)$.

Из выписанных выше соотношений треугольности легко заключаем, что операторы

$$U = \sum P_\alpha A_\alpha P_\alpha \ : \quad \theta' L_2(\mathbb{R}) \to \oplus P_\alpha H(\rho_\alpha)\,, \tag{4.4}$$

$$V = \sum P_\alpha A_{\alpha'} P_\alpha \ : \quad \oplus P_\alpha H(\rho_\alpha) \to \theta' H(\rho) \quad \alpha = +,-\,, \quad \alpha' \neq \alpha, \tag{4.5}$$

обратимы и

$$U^{-1} = \sum P_\alpha A_\alpha^{-1} P_\alpha, \quad V^{-1} = \sum P_\alpha A_{\alpha'}^{-1} P_\alpha, \quad \alpha = +,-\,, \quad \alpha' \neq \alpha. \tag{4.6}$$

Рассмотрим оператор

$$W = U(\theta' A^{-1}\theta')V = \theta' + P_+A_+A_-^{-1}P_- + P_-A_-A_+^{-1}P_+ : \\ \oplus\, P_\alpha H(\rho_\alpha) \to \oplus P_\alpha H(\rho_\alpha). \tag{4.7}$$

При этом $\theta' A^{-1}\theta' = U^{-1}WV^{-1}$ и

$$(\theta' A^{-1}\theta')^{-1}\theta' = VW^{-1}U\,. \tag{4.8}$$

Отметим, что в силу свойств треугольности операторов $\boldsymbol{a}_\pm$ формула (3.2) примет вид

$$(\theta A\theta)^{-1}\theta = \theta A^{-1}\theta - \theta K \sum_\alpha A_{\alpha'} P_\alpha W^{-1} \sum_\beta P_\beta A_\beta K P\,, \quad \alpha' \neq \alpha. \tag{4.9}$$

§5. Альтернирующий метод Шварца для оператора W^{-1}

Оператор

$$W = \theta' + P_+A_+A_-^{-1}P_- + P_-A_-A_+^{-1}P_+. \tag{5.1}$$

в пространстве $\oplus P_\alpha H(\rho_\alpha)$ имеет вид $I - G_+ - G_-$, где мы трактуем оператор θ' как тождественный и полагаем

$$G_+ = -P_+A_+A_-^{-1}P_-, \quad G_- = -P_-A_-A_+^{-1}P_+. \tag{5.2}$$

Заметим, что $G_\alpha^2 = 0$, $\alpha = +,-$. Как следствие,

$$(I - G_+)^{-1} = I - P_+A_+A_-^{-1}P_-, \quad (I - G_-)^{-1} = I - P_-A_-A_+^{-1}P_+. \tag{5.3}$$

Положим

$$I - \Gamma_+ = (I - G_+)^{-1}, \quad I - \Gamma_- = (I - G_-)^{-1}, \tag{5.4}$$

так что

$$\Gamma_+ = P_+ A_+ A_-^{-1} P_-, \qquad \Gamma_- = P_- A_- A_+^{-1} P_+. \tag{5.5}$$

Тогда согласно альтернирующему методу Шварца [1, 4, 5]

$$(I - G_+ - G_-)^{-1} = I - \Gamma, \quad \Gamma = \sum \gamma_{\alpha\beta}, \tag{5.6}$$

где матрица операторов $\gamma_{\alpha\beta}$ является решением уравнения.

$$\begin{pmatrix} I & \Gamma_+ \\ \Gamma_- & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{++} & \gamma_{+-} \\ \gamma_{-+} & \gamma_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_+ & 0 \\ 0 & \Gamma_- \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Формально оператор Γ может быть представлен альтернирующим рядом

$$\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_- - \Gamma_+\Gamma_- - \Gamma_-\Gamma_+ + \dots$$

Для нас важно, что оператор $I - \Gamma$, в данном случае W^{-1}, может быть описан в компактной форме

$$W^{-1} = I - \Gamma = (I - \Gamma_-)(I - \Gamma_+\Gamma_-)^{-1}(I - \Gamma_+). \tag{5.8}$$

§6. Асимптотика операторов $\Gamma_\pm$ и их произведений

Найдем асимптотику операторов $\Gamma_\pm$ и их альтернирующих произведений. На носителе (т.е. при $x \geqslant 1$, $y \leqslant -1$) ядро оператора Γ_+ определяется равенством (в смысле обобщённых функций)

$$\begin{aligned} \Gamma_+(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon\xi + i0}}{\sqrt{1 - \varepsilon\xi + i0}}\, b_+(\varepsilon\xi)[b_-(\varepsilon\xi)]^{-1}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon\xi + i0}}{\sqrt{1 - \varepsilon\xi + i0}}\, b_+^2(\varepsilon\xi)[\nu + \sqrt{1 - (\varepsilon\xi)^2}]\, d\xi \\ &= \nu \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon\xi + i0}}{\sqrt{1 - \varepsilon\xi + i0}}\, b_+^2(\varepsilon\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Поясним, что в виду $b_+^2(\xi)(1 + \xi) \sim 1$ при $\xi \to \infty$, последний знак равенства оправдывается равенством (в смысле обобщённых функций)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} b_+^2(\varepsilon\xi)(1 + \varepsilon\xi)\, d\xi = 0,$$

если $x-y \geqslant 2$. В степенных порядках по ε вклад в асимптотику интеграла (6.1) (в рассматриваемой области) вносит лишь точка $\xi = \frac{1}{\varepsilon}$, что доказывается стандартной техникой ПДО (т.е. процедурой интегрирования по частям в применении к интегралу по внешности некоторой окрестности точки $\xi = \frac{1}{\varepsilon}$ от соответствующим образом сглаженной подынтегральной функции). При этом

$$\Gamma_+(x,y) \sim \sum_{k\geqslant 0} b_k^+ \int\limits_{\gamma_+} e^{i\xi(x-y)}(\varepsilon\xi-1)^k \frac{d\xi}{\sqrt{1-\varepsilon\xi+i0}} + O(\varepsilon^\infty). \tag{6.2}$$

где

$$b_0^+ = \nu\sqrt{2}b_+^2(1) \tag{6.3}$$

и контур γ_+ показан на рис. 1.

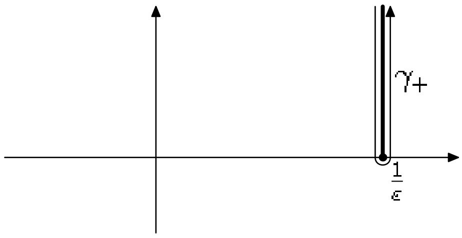

Рис. 1. Деформированный контур интегрирования.

Тогда

$$\Gamma_+(x,y) \sim e^{\frac{i}{\varepsilon}(x-y)} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k^+ \varepsilon^{k-\frac{1}{2}}}{|x-y|^{k+\frac{1}{2}}} + O(\varepsilon^\infty), \tag{6.4}$$

где

$$\gamma_0^+ = -2\sqrt{\pi} b_0^+ e^{i\frac{\pi}{4}}. \tag{6.5}$$

Аналогично, при $x \leqslant -1$, $y \geqslant 1$,

$$\Gamma_-(x,y) \sim e^{-\frac{i}{\varepsilon}(x-y)} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k^- \varepsilon^{k-\frac{1}{2}}}{|x-y|^{k+\frac{1}{2}}} + O(\varepsilon^\infty), \tag{6.6}$$

где

$$\gamma_0^- = 2\sqrt{\pi} b_0^- e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad b_0^- = \nu\sqrt{2}b_-^2(-1). \tag{6.7}$$

Отсюда заключаем, что в старшем порядке произведения $\Gamma_+\Gamma_-$ и $\Gamma_-\Gamma_+$ являются одномерными операторами с ядрами вида

$$(\Gamma_+\Gamma_-)(x,y) = \Gamma_\pm(x,y) + O(\varepsilon),\ \Gamma_\pm(x,y) \\ = e^{\frac{i}{\varepsilon}(x+y+2)} \frac{\gamma}{\sqrt{|x+1||y+1|}}, \tag{6.8}$$

$$(\Gamma_-\Gamma_+)(x,y) = \Gamma_\mp(x,y) + O(\varepsilon),\ \Gamma_\mp(x,y) \\ = e^{-\frac{i}{\varepsilon}(x+y-2)} \frac{\gamma}{\sqrt{|x-1||y-1|}}, \tag{6.9}$$

на носителях (т.е при $x, y \geqslant 1$ и $x, y \leqslant -1$ соответственно). При этом

$$\gamma = \gamma_0^+ \gamma_0^- . \tag{6.10}$$

Следует заметить, что операторы $\Gamma_\pm$ и $\Gamma_\mp$ с соответствующими ядрами определены как ограниченные в пространствах, соответственно, $P_+H(\rho_+)$ и $P_-H(\rho_-)$. Элементарное вычисление с интегрированием по частям показывает, что,

$$\Gamma_\pm^2 = O(\varepsilon), \tag{6.11}$$

откуда

$$(I - \Gamma_+\Gamma_-)^{-1} = I + \Gamma_\pm + O(\varepsilon) \tag{6.12}$$

в соответствующей операторной норме. Для оператора $(I - \Gamma_+\Gamma_-)^{-1}$ может быть выписано полное в степенных порядках по ε разложение.

Тем самым асимптотика оператора W^{-1} найдена. Она имеет вид

$$W^{-1} = I - \Gamma_+ - \Gamma_- + \Gamma_\pm + \Gamma_\mp + O(\varepsilon), \tag{6.13}$$

где погрешность оценивается в норме $\oplus P_\alpha H(\rho_\alpha)$.

Итак, нами установлена

Теорема 6.1. *Оператор* $\mathcal{A}\ :\ L_2 \to H(\rho)$ *ограниченно обратим, обратный оператор определён равенствами* (4.9), (5.8), (6.4), (6.6), *что позволяет выписать полное в степенных порядках по* ε *его асимптотическое разложение. Старший член асимптотики определён дополнительно равенствами* (6.13), (6.8), (6.9).

Мы благодарны проф. С. М. Грудскому за то, что он обратил наше внимание на эту задачу и за полезные ее обсуждения.

Литература

1. A. M. Budylin, V. S. Buslaev, *Reflection operators and their applications to asymptotic investigations of semiclassical integral equations.* — Advances in Soviet Math., AMS, Providence, RI **7** (1991), 107–157.
2. E. Ramires de Arelano, S. M.Grudsky, S. S. Mikhakovich. *The wiener-hopf integral equation on a finite interval: asymptotic solution for large intervals with an application to acoustics.* In *DD03*, 2003.
3. А. М. Будылин, В. С. Буслаев, *Квазиклассические интегральные уравнения.* — ДАН СССР **319**, No. 3 (1991), 527–530.
4. А. М. Будылин, В. С. Буслаев, *Квазиклассические интегральные уравнения с медленно убывающими ядрами на ограниченных областях.* — Алгебра и Анализ **5**, №1 (1993), 160–178.
5. А. М. Будылин, В. С. Буслаев, *Квазиклассическая асимптотика резольвенты интегрального оператора свёртки с синус-ядром на конечном интервале.* — Алгебра и Анализ **7**, №6 (1995), 79–103.
6. И. А. Фельдман, И. Ц. Гохберг, *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* Наука, 1971.
7. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.* Штиинца, Кишинев, 1973.
8. З. Прёсдорф, *Некоторые классы сингулярных уравнений.* Мир, 1979.
9. Р. Ли С. Миттра, *Аналитические методы теории волноводов.* — Мир, 1974.

Budylin A. M., Levin S. B. The equation of convolution on a large finite interval with the symbol which has zeros of nonintegral powers.

We study one equation of convolution on a large finite interval. This equation arose in acoustics for a description of a wave conductor surface with a bed of ice. The main feature of this equation is that the symbol of the corresponding operator has zeros of nonintegral degrees on the dual variable so that the inverse operator is a long-range one. We found power-order complete asymptotic expansion for a kernel of the inverse operator as a length of the interval tends to infinity.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.budylin@spbu.ru,
budylin@mph.phys.spbu.ru
E-mail: s.levin@spbu.ru

Поступило 12 октября 2015 г.