Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, А. М. Тагирджанов

ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ В БЕГУЩЕЙ ТОЧКЕ, ОСНОВАННЫЕ НА КОМПЛЕКСИФИЦИРОВАННОМ РЕШЕНИИ БЕЙТМЕНА

§1. Введение

Созданная Хёрмандером теория волновых фронтов допускает, в применении к волновому уравнению с тремя пространственными переменными

$$\Box u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - c^{-2}u_{tt} = 0, \quad c = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

существование решений, имеющих в каждый момент времени t сингулярность в одной *пространственной точке* $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, причем сингулярность бежит со скоростью c вдоль (пространственной) прямой. Пример такого решения приведен в [1, стр. 328] и обсуждался более подробно в [2].

Как функция на $\mathbb{R}^3$, зависящая от t как от параметра, это решение бесконечно дифференцируемо за исключением одной точки (зависящей от t), в которой пределы функции по всем направлениям существуют и одинаковы, однако скорость стремления к пределу не равномерна по направлению, и функция в этой точке не непрерывна. Другим примером является функция, непрерывная всюду в $\mathbb{R}^3$ и бесконечно дифференцируемая за исключением одной точки [1, 3].

В настоящей заметке мы приводим новые простые примеры решений, имеющих сингулярность в одной точке. Примеры основаны на комплексифицированном решении Бейтмена, которое содержит произвольную аналитическую функцию одной переменной. До сих пор путем подходящего выбора этой функции строились решения решения уравнения (1), описывающие сильно локализованные волновые пучки и волновые пакеты. Ниже мы выбираем эту произвольную функцию так, что она имеет полюс первого порядка.

Ключевые слова: волновое уравнение, точные решения, распространение особенностей.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 14-01-00535.

§2. Относительно неискажающиеся волны. Комплексифицированное решение Бейтмена

Начнем с классического определения (например, [4]) которое мы формулируем в принятой сейчас форме. *Относительно неискажающееся решение* уравнения (1) имеет вид

$$u = gf(\theta) \tag{2}$$

где *фаза* ("фазовая функция" в [4]) $\theta = \theta(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и амплитуда ("коэффициент искажения" в [4]) $g = g(\mathbf{r}, t)$ – фиксированные функции, а *форма волны* $f = f(\theta)$ – произвольная функция одной переменной. Курант и Гильберт [4] ограничиваются примерами, известными с XVIII века. Это плоская волна с $\theta = z - ct$, $g \equiv 1$ и сферическая волна с $\theta = ct - |\mathbf{r}|$, $g = |\mathbf{r}|^{-1}$, где $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В обоих случаях в качестве f можно взять обобщенную функцию одной переменной. В первом примере функция (2) удовлетворят уравнению (1) во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Во втором примере однородное уравнение (1) нарушается для пространственной точки $\mathbf{r} = 0$ при временах $t \in \operatorname{supp} f$.

Сейчас широко известен и еще один пример – осесимметрическое комплексифицированное решение Бейтмена, определенное формулами (см., например, [5])

$$\theta = \alpha + \frac{\rho^2}{\beta - ia}, \quad g = \frac{1}{\beta - ia} \tag{3}$$

где

$$\alpha = z - ct, \ \beta = z + ct, \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{4}$$

а $a > 0$ – произвольно фиксированная постоянная. Легко видеть, что при всех $(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ фаза θ, определенная формулой (3), принимает значения в замкнутой верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\theta(\mathbf{r}, t) \geqslant 0$, причем $\operatorname{Im}\theta(\mathbf{r}, t) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{(\mathbf{r}, t) : \ x = y = 0, \ z \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 1. *Пусть*

$$V = \frac{1}{\beta - ia} f(\theta) \tag{5}$$

где фаза θ определена выражением (3). *Если*

(i) *форма волны $f(\theta)$ аналитична в открытой верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\theta > 0$ и*

(ii) *$f(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема при $\operatorname{Im}\theta \geqslant 0$.*

Тогда функция (5) *удовлетворяет однородному уравнению* (1) *во всем пространстве-времени* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Одно из доказательств, основанное на прямом вычислении, можно найти, например, в [6].

Замечание 1. Если условие (ii) теоремы 1 не выполнено в некоторой точке вещественной оси, например, в $\theta = 0$, то (5) удовлетворяет однородному уравнению (1) при $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \setminus \{(\mathbf{r}, t) : x = y = 0,\ \alpha = 0,\ \beta \in \mathbb{R}\}$, т. е. в пространстве времени, за исключением, может быть, движущейся точки

$$\{\mathbf{r} : x = y = 0,\ z = ct\}. \tag{6}$$

Замечание 2. Требование двукратной непрерывной дифференцируемости значительно завышено.

§3. Простейшая сингулярная форма волны

Выберем в (5) форму волны $f(\theta) = 1/\theta$. Решение принимает вид

$$V = \frac{1}{\beta + ia}\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\rho^2 + \alpha(\beta + ia)} \tag{7}$$

и имеет сингулярность в пространственной точке (6) движущейся вдоль оси z. В соответствии с Замечанием 1, вне этой точки функция (7) удовлетворяет однородному уравнению (1). В пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ сингулярный носитель V есть прямая $x = y = 0$, $z = ct$. Ключевым результатом нашей работы является доказательство следующего утверждения

Теорема 2. *Функция* (7) *удовлетворяет однородному уравнению* (1) *во всем пространстве-времени* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ *в смысле обобщенных функций.*

Сначала будет доказана простая

Лемма 1. *Функция* (7) *локально абсолютно интегрируема в* $\mathbb{R}^4$.

Доказательство. Мы хотим установить, что интеграл

$$J_\Omega := \int\limits_\Omega dx\, dy\, dz\, dt\, |V| \tag{8}$$

сходится для любой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^4$.

Если Ω не пересекается с сингулярным носителем $\{\rho = 0,\ \alpha = 0,\ \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ функции V, то справедливость утверждения очевидна. Рассмотрим область Ω

$$-1 \leqslant \alpha \leqslant 1,\ \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2,\ 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

содержащую сингулярность V. Перейдя в (8) от переменных (x, y, z, t) к переменным $(\alpha, \beta, \rho, \phi)$, где

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \tag{9}$$

получаем

$$J_\Omega = \frac{1}{2c} \int\limits_{-1}^{1} d\alpha \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta \int\limits_{0}^{1} \rho d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} d\phi \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}}. \tag{10}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int\limits_{0}^{1} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}} &= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} \frac{ds}{\sqrt{(s + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(s + \alpha\beta + \sqrt{(s + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}\right)\Big|_{s=0}^{1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10) и интегрируя по углу ϕ, получаем интеграл

$$J_\Omega = \frac{\pi}{2c} \int\limits_{-1}^{1} d\alpha \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta \left(\ln \frac{1 + \alpha\beta + \sqrt{(1 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + a^2}} - \ln|\alpha| \right),$$

который, очевидно, сходится при любых $-\infty < \beta_{1,2} < +\infty$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство Теоремы 2. Мы рассматриваем V как обобщенную функцию т. е. как функционал действующий на основные функции $\psi = \psi(x, y, z, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, см. [7]. Согласно Лемме 1 это означает, что

$$(V, \psi) := \int\limits_{\mathbb{R}^4} dx\, dy\, dz\, dt\ V\psi. \tag{12}$$

Мы доказываем, что

$$(\Box V, \psi) := (V, \Box\psi) = 0 \tag{13}$$

для любой $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$. Перейдя от переменных (z,t) к переменным (α,β), получаем для левой части (13) выражение

$$(\Box V,\psi) = \frac{1}{2c}\int\limits_{\mathbb{R}^4} dx\,dy\,d\alpha\,d\beta\;V\Box\psi. \tag{14}$$

Волновой оператор (1) принимает вид

$$\Box w = 4w_{\alpha\beta} + w_{xx} + w_{yy}.$$

Выражение (14) можно записать как

$$\frac{1}{2c}\lim_{\gamma\to+0}\int\limits_{\Omega_\gamma} dx\,dy\,d\alpha\,d\beta\;V\Box\psi, \tag{15}$$

где $\Omega_\gamma = \{|\alpha| > \gamma,\ -\infty < x,y,\beta < \infty\}$. Интегрирование по частям в (15) с использованием финитности ψ дает

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} dx\,dy\,d\alpha\,d\beta\;V\Box\psi = \int\limits_{\Omega_\gamma} dx\,dy\,d\alpha\,d\beta\;\psi\Box V$$
$$-4\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\,dy\,d\beta\left(V_\beta\psi|_{\alpha=-\gamma} - V_\beta\psi|_{\alpha=\gamma}\right), \tag{16}$$

где

$$V_\beta = \frac{\partial V}{\partial\beta} = -\frac{\alpha}{(\rho^2+\alpha(\beta+ia))^2}. \tag{17}$$

Функция V удовлетворяет в Ω_γ однородному волновому уравнению, поэтому первый интеграл в правой части (16) исчезает. Для второго интеграла мы получаем выражение

$$-4\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta\int\limits_0^\infty \rho d\rho\;\left(\frac{\gamma\overline{\psi}(\rho,-\gamma,\beta)}{(\rho^2-\gamma(\beta+ia))^2} + \frac{\gamma\overline{\psi}(\rho,\gamma,\beta)}{(\rho^2+\gamma(\beta+ia))^2}\right), \tag{18}$$

где

$$\overline{\psi}(\rho,\alpha,\beta) := \int\limits_0^{2\pi}\psi(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\beta-\alpha}{2c})d\phi.$$

Рассмотрим в (18) интеграл по ρ. Замена переменной $p=\gamma^{-1/2}\rho$ дает

$$\int\limits_0^\infty\left(\frac{\overline{\psi}(\gamma^{1/2}p,-\gamma,\beta)}{(p^2-(\beta+ia))^2} + \frac{\overline{\psi}(\gamma^{1/2}p,\gamma,\beta)}{(p^2+(\beta+ia))^2}\right)p\,dp. \tag{19}$$

Ввиду гладкости $\overline{\psi}(\rho,\alpha,\beta)$, можно записать

$$\overline{\psi}(\rho,\gamma,\beta)=\overline{\psi}(\rho,0,\beta)+O(\gamma). \tag{20}$$

Как легко проверить,

$$\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{(p^2-(\beta+ia))^2}+\frac{1}{(p^2+(\beta+ia))^2}\right)p\,dp=0, \tag{21}$$

что, вместе с (20) приводит к следующему выражению для интеграла (19):

$$\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{(p^2-(\beta+ia))^2}+\frac{1}{(p^2+(\beta+ia))^2}\right)$$
$$\left(\overline{\psi}(\gamma^{1/2}p,0,\beta)-\overline{\psi}(0,0,\beta)\right)p\,dp. \tag{22}$$

Вследствие финитности $\overline{\psi}(\rho,\alpha,\beta)$, выражение (22) стремится к нулю при $\gamma\to+0$.

Мы показали, что предел (15) равен нулю, т. е. установили справедливость (13). Теорема 2 доказана. □

§4. Обобщения

Полученный результат легко обобщается на комплексифицированные решения Бейтмена, у которых форма волны имеет такую же сингулярность.

Возьмем в (5)

$$f(\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\left(2ka\left(1-\sqrt{1-\frac{i\theta}{a}}\right)\right), \tag{23}$$

где $k>0$ фиксированный числовой параметр, а ветвь корня определена условием $\operatorname{Re}\sqrt{1-i\theta/a}\geqslant 0$. Простая модификация приведенных выше рассуждений показывает, что соответствующая функция (5) тоже удовлетворяет однородному волновому уравнению (1). Такое решение экспоненциально убывает при удалении от точки (6) как в продольном направлении (вдоль оси z), так и в поперечном направлении (вдоль ρ) (см. детали в [6]).

Аналоги решения (2), (3) известны для волнового уравнения с любым $m\geqslant 2$ числом пространственных переменных [8]. Фаза, которая в (3) зависит от одного параметра a, может быть заменена функцией,

характеризуемой $m(m-1)/2$ комплексным параметром, см. [9]. Полученные выше результаты без труда переносятся и на такие решения.

Авторы признательны В. М. Бабичу, К. Бардосу, М. И. Белишеву, В. В. Грушину, М. В. Перель и А. Б. Плаченову за полезные обсуждения.

Приложение. Исследование вещественной и мнимой частей функции (7)

Очевидно, что как вещественная, так и мнимая части функции (7) являются решениями однородного волнового уравнения (1). По совету М. И. Белишева мы рассматриваем ниже их поведение в окрестности особой точки. Итак,

$$V = \frac{1}{\rho^2 + \alpha\beta + ia\alpha} = V_1 + iV_2,$$

где функции

$$V_1 = \frac{\rho^2 + \alpha\beta}{(\rho^2 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}, \quad V_2 = \frac{-a\alpha}{(\rho^2 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2} \tag{24}$$

вещественны. Окружим точку $\{\rho = 0, z = ct\} \in \mathbb{R}^3$ сферой малого радиуса ε:

$$\alpha = \varepsilon\cos\vartheta,\ \rho = \varepsilon\sin\vartheta,\ \vartheta \in [0, \pi].$$

Тогда:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\varepsilon^2\sin^2\vartheta + \beta\varepsilon\cos\vartheta}{(\varepsilon^2\sin^2\vartheta + \beta\varepsilon\cos\vartheta)^2 + a^2\varepsilon^2\cos^2\vartheta} \\ &= \frac{\varepsilon\sin^2\vartheta + \beta\cos\vartheta}{\varepsilon[(\varepsilon\sin^2\vartheta + \beta\cos\vartheta)^2 + a^2\cos^2\vartheta]}. \end{aligned}$$

Как легко видеть,

$$V_1 = \begin{cases} \varepsilon^{-2}, & \vartheta = \pi/2,\ \beta \in \mathbb{R}, \\ 0, & \vartheta = 0 \text{ и } \vartheta = \pi,\ \beta = 0, \\ O(\varepsilon^{-1}), & \vartheta \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi),\ \beta \neq 0. \end{cases} \tag{25}$$

Аналогично,

$$V_2 = \frac{-a\cos\vartheta}{\varepsilon[(\varepsilon\sin^2\vartheta + \beta\cos\vartheta)^2 + a^2\cos^2\vartheta]} = \begin{cases} 0, & \vartheta = \pi/2, \\ O(\varepsilon^{-1}), & \vartheta \neq \pi/2. \end{cases} \tag{26}$$

Оценки (25) и (26) не являются равномерными по углу ϑ. Более подробное исследование поведения функций (24) нетрудно провести анализируя их поверхности уровня $V_1 = \mathrm{const}$ и $V_2 = \mathrm{const}$. Очевидно, по-

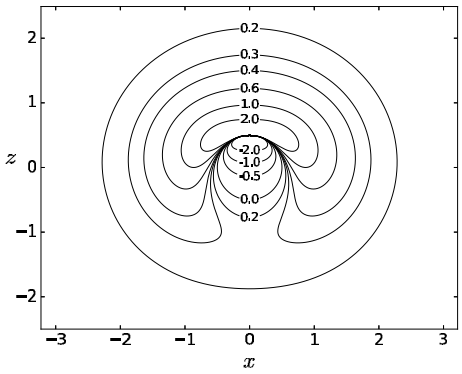

Рис. 1. Сечения поверхностей уровня функции V_1 плоскостью $y = 0$ при $t = 1/2c$.

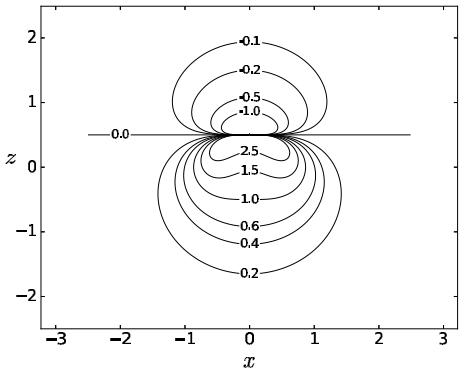

Рис. 2. Сечения поверхностей уровня функции V_2 плоскостью $y = 0$ при $t = 1/2c$.

верхности уровня касаются между собой в плоскости $z = ct$, сгущаясь при приближении к ней, что согласуется с утверждением о неравномерности оценок (25) и (26).

Из следующих рисунков видно, что при $\rho \to 0$ функции $V_{1,2}$ быстро меняются.

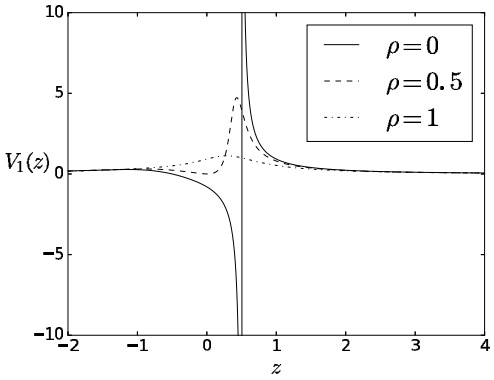

Рис. 3. V_1 как функция от z при фиксированных ρ и $t = 1/2c$.

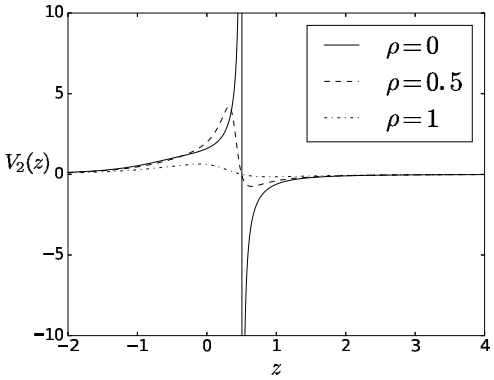

Рис. 4. V_2 как функция от z при фиксированных ρ и $t = 1/2c$.

Литература

1. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными* **I**, М., Мир, 1986.

2. А. С. Благовещенский, *Плоские волны, решения Бейтмена и источники на бесконечности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **426** (2014), 23–33.
3. Ю. В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984.
4. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, **II**, М.–Л., ГТТИ, 1945.
5. P. Hillion, *Generalized phases and nondispersive waves*, — Acta Applicandae Mathematica **30**, No. 1 (1993), 35–45.
6. A. P. Kiselev, M. V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys., **41**, No. 4 (2000), 1934–1955.
7. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщённые функции и действия над ними*, М., Физматгиз, 1959.
8. А. П. Kiselev, М. В. Перель, *Относительно неискажающиеся решения m-мерного волнового уравнения.* — Дифферциальные уравнения **38**, No. 8 (2002), 1128–1129.
9. А. П. Киселев, А. Б. Плаченов. *Точные решения m-мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 167–177.

Blagovestchenskii A. S., Kiselev A. P., Tagirdzhanov A. M. Simple solutions of the wave equation, singular at a ranning point, based on the complexified Bateman solution.

We suggest simple solutions of the homogeneous wave equation with constant propagation speed having a power-like singularity in a moving spatial point. The construction is are based on the complexified Bateman-type solution. Example of such a solution showing exponential decay with distance from the singular point is presented.

С.-Петербургский государственный университет
Университетская наб. 7/9,
199034 Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: a.blagoveshchensky@spbu.ru

Поступило 12 ноября 2015 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: kiselev@pdmi.ras.ru

Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В.О., 61,
199178 С.-Петербург, Россия
E-mail: aleksei.kiselev@gmail.com