

М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, А. Я. Казаков

ЭВОЛЮЦИЯ РАЗРЫВОВ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ ВБЛИЗИ КАУСТИК (ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДХОД)

Посвящается юбилею Василия Михайловича Бабича

§1. ВВЕДЕНИЕ

О статье. Насколько известно авторам, по крайней мере в советской (российской) литературе, математическое изучение эффектов фокусировки вблизи каустик было начато В. М. Бабичем в работах [2, 3]¹. Основным инструментом служила двумерная формула Пуассона (ФП). Дальнейший прогресс был связан с использованием анзаца Адамара, канонического оператора Маслова, теории особенностей гладких отображений и т.д. (см., например, [1, 5]). Однако, по нашему мнению, возможности ФП-подхода далеко не исчерпаны. Его привлекательная черта – геометрическая наглядность, – сочетается с аналитической простотой: особенности на каустиках описываются через асимптотику интегралов, содержащих малые параметры. Отличие нашей работы от пионерской работы В. М. Бабича состоит в использовании метода спуска: мы используем трехмерную ФП для исследования двумерной задачи.

Эффект фокусировки. Пусть $A = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и $t \geq 0$. Как известно, решение (волна) $u = u(A, t)$ задачи Коши

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (A, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad A \in \mathbb{R}^3, \quad (1.2)$$

Ключевые слова: пространственно-временные волновые поля, распространение разрывов, особенности поля вблизи каустики.

Поддержано грантами РФФИ 14-01-00535А и СПбГУ 6.38.670.2013.

Поддержано грантом СПбГУ 6.38.670.2013.

¹В [3], автором отмечена стимулирующая роль работ Адамара, вышедших в 1929–1933 годах.

дается ФП

$$u(A, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{t} \int_{S_t(A)} u_0(B) d\sigma_B \right] + \frac{1}{4\pi} \int_{S_t(A)} u_1(B) d\sigma_B ,$$

где $S_t(A) := \{B \in \mathbb{R}^3 \mid |A - B| = t\}$. Для простоты мы примем

Соглашение 1. *Всюду в работе полагаем $u_1 \equiv 0$, так что выполняемо*

$$u(A, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{t} \int_{S_t(A)} u_0(B) d\sigma_B \right] \quad (1.3)$$

Если $u_0 \in C_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$, то решение u будет классическим. В противном случае (в частности, для кусочно-непрерывной u_0), мы определим u как правую часть (1.3).

В этой работе мы изучаем эффекты концентрации энергии волны. В качестве простейшего примера возьмем

$$u_0(B) = \begin{cases} 0, & |B| < r_0, \\ 1, & |B| \geq r_0 \end{cases}$$

при $r_0 > 0$. В этом случае интеграл в (1.3) равен площади части сферы, лежащей в носителе начального возмущения u_0 :

$$\int_{S_t(A)} u_0(B) d\sigma_B = \sigma [S_t(A) \cap \text{supp } u_0] , \quad (1.4)$$

которую нетрудно посчитать явно.

- Пусть $A = (0, 0, r_0 - r)$ с $r < r_0$. Тогда имеем

$$u(A, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < r, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{r_0}{r_0 - r} + \frac{1}{r_0 - r} (t - r) \right], & r < t < 2r_0 - r, \\ 1, & t > 2r_0 - r \end{cases} \quad (1.5)$$

(см. Рис. 1).

Полагая $O = (0, 0, 0)$, имеем

$$\sigma [S_t(O) \cap \text{supp } u_0] = \begin{cases} 0, & 0 < t < r_0, \\ 4\pi t, & t > r_0, \end{cases}$$

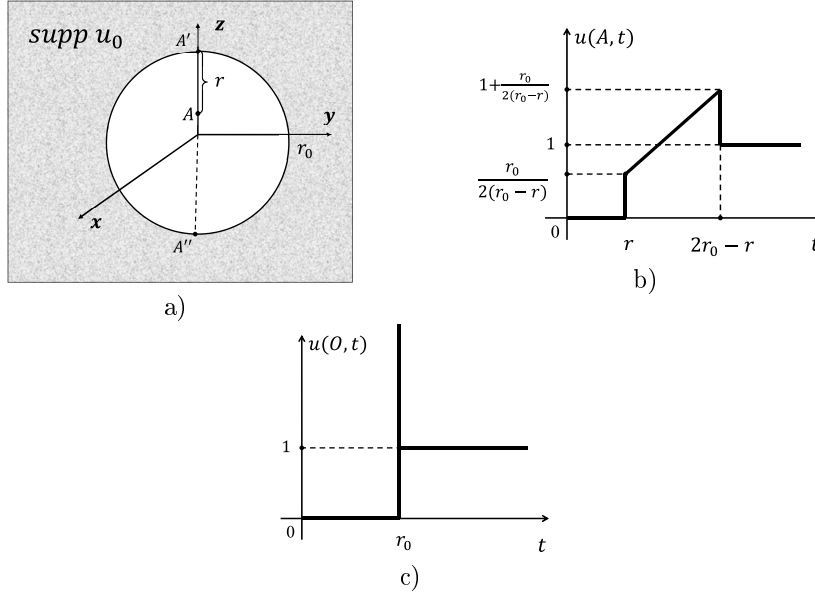


Рис. 1. Волны в шаре.

что дает

$$u(O, t) \stackrel{(1.3), (1.4)}{=} \delta(t - r_0) + \theta(t - r_0), \quad (1.6)$$

где $\delta(t)$ и $\theta(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sign } t]$, функции Дирака и Хевисайда соответственно. Физический смысл (1.5) и (1.6) вполне прост.

- Начальное возмущение u_0 разрывно: имеется скачок на сфере $S_r(O)$ ($O = (0, 0, 0)$). Соответственно волна $u(\cdot, t)$ также разрывна: у нее есть два скачка, один из них движется *внутрь* шара $|B| < r_0$ с единичной скоростью, находясь на сфере $S_{|t-r_0|}(O)$ ². Эта сфера, – передний фронт, – отделяет зону покоя от зоны возмущения.

- При $t = r$ фронт проходит точку A . Начальный скачок (амплитуды 1) движется от ближайшей точки $A' = (0, 0, r_0) \in S_r(O)$, вдоль луча $A'A$, и достигает точки A с амплитудой $\frac{r_0}{2(r_0 - r)}$. Эта амплитуда тем больше, чем A ближе к центру O : в этом и состоит эффект фокусировки (концентрации энергии).

²Второй скачок на $S_{t+r_0}(O)$ интереса для нас не представляет.

- При дальнейшем движении фронт доходит до центра при $t = r_0$ и создает особенность вида (1.6), что и является фокусировкой в наиболее выраженной форме.
- Пройдя центр, фронт доходит до A в момент $t = 2r_0 - r$, при этом возникает второй скачок (отрицательный!). Перемена знака вызвана инверсией фронта волны при прохождении фокуса O .

Комментарии. Для заданной точки A , функцию времени $u(A, \cdot)$ мы называем *сейсмограммой*. В нашем примере вклад в особенности сейсмограммы дают два луча: $A'A$ и $A''A$. При этом вклад каждого луча зависит от того, проходит он через фокус или нет.

Конечно, геометрия лучей в шаре предельно проста, и каустика переднего фронта состоит из одной лишь точки O . Наша цель состоит в изучении эффектов фокусировки в произвольном (общего положения) случае. Результаты представлены в виде сейсмограмм $u(A, \cdot)$ для различных положений точки A на луче, исходящем из некоторой точки фронта u_0 .

В двумерной задаче мы рассматриваем произвольную гладкую кривую общего положения и приводим конкретные примеры. В трехмерном случае мы ограничиваемся несколькими модельными примерами, в которых наблюдаются разные виды фокусировки.

- Авторы признательны В. М. Бабичу и А. П. Киселеву за полезные обсуждения.

§2. ДВУМЕРНАЯ ФОКУСИРОВКА

2.1. Каустики. Пусть $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая, $\sigma \subset \mathcal{L}$ — (малая) окрестность, покрываемая локальной координатой α , $n(\alpha)$ — гладкое поле единичных евклидовых нормалей к σ , $r(\alpha) := \{A \in \mathbb{R}^2 \mid A = \tau n(\alpha), \tau \geq 0\}$ — луч, порожденный нормалью. Множество

$$\mathcal{T} := \bigcup_{\alpha} r(\alpha) \subset \mathbb{R}^2$$

называется *лучевой трубкой* (с основанием σ : см. Рис. 2а).

Каждая точка $A = (x, y) \in \mathcal{T}$ лежит на некотором луче $r(\alpha)$, так что ее положение на $\mathbb{R}^2$ задано парой α, τ , — *лучевыми координатами* A . Декартовы координаты A оказываются функциями лучевых: $x = x(\alpha, \tau)$, $y = y(\alpha, \tau)$.

Множество

$$\mathcal{C} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\tau \\ y_\alpha & y_\tau \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

где $(\cdot)_{\alpha, \tau}$ – частные производные, называется *каустикой* семейства лучей, исходящих из σ . В общем случае это кривая, играющая роль *огнивающей* семейства лучей $r(\alpha)$. Например, для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и параболы $y = x^2$, каустики задаются уравнениями

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}, \quad y = \frac{1}{2} + 3 \left(\frac{x}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.1)$$

соответственно (см. Рис. 2 б,с; $F_{\pm}$ и F суть геометрические фокусы).

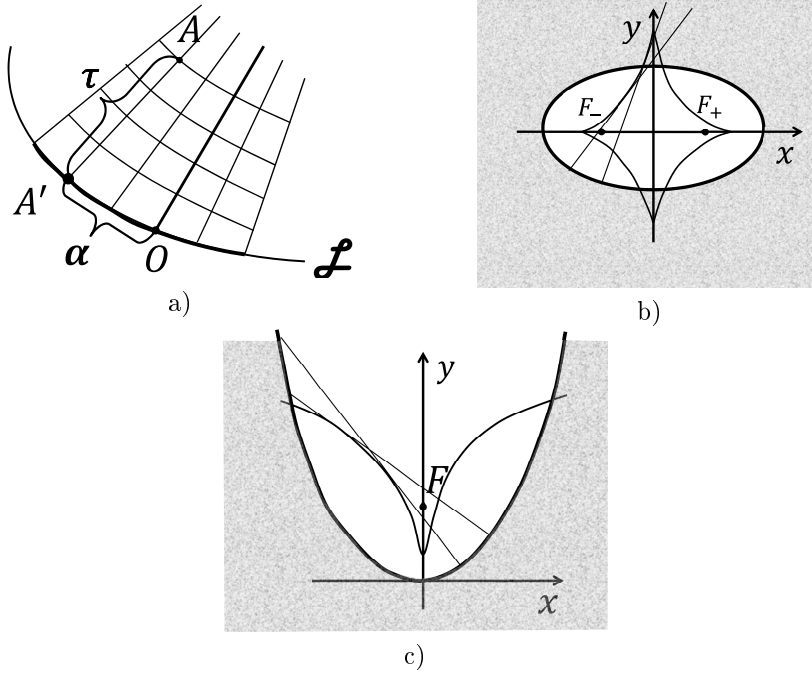


Рис. 2. Лучевые координаты и каустики.

2.2. Задача Коши. Решение двумерной задачи Коши

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (2.2)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.3)$$

представимо хорошо известной двумерной ФП; см., например, [6]. Однако для изучения эффекта фокусировки мы используем метод спуска. Этот прием основан на простом факте: если u_0 и u_1 в (1.2) не зависят от z , то решение u трехмерной задачи (1.1)–(1.2) также не зависит от z и удовлетворяет уравнению $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$.

Для точек $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $B = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, определим $A^* := (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ и $B_* := (x, y) \in \mathbb{R}^2$. В этих обозначениях функция

$$u(A, t) \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{t} \int_{S_t(A^*)} u_0(B_*) d\sigma_B \right] + \frac{1}{4\pi} \int_{S_t(A^*)} u_1(B_*) d\sigma_B, \quad (2.4)$$

где u_0, u_1 берутся из (2.3), удовлетворяет (2.2)–(2.3).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ есть область с характеристической функцией

$$\chi_\Omega(A) := \begin{cases} 1, & A \in \Omega, \\ 0, & A \notin \Omega. \end{cases}$$

Для данных Коши (2.3) вида

$$u_0 = \chi_\Omega, \quad u_1 = 0, \quad (2.5)$$

получим

$$u(A, t) \stackrel{(1.4), (2.4)}{=} \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma[S_t(A^*) \cap \Omega^*]}{t} \right],$$

где $\Omega^* := \{B \in \mathbb{R}^3 \mid B_* \in \Omega\}$, и $\sigma[S]$ - площадь S . В то же время, площадь есть

$$\begin{aligned} \sigma[S_t(A^*) \cap \Omega^*] &= 2 \iint_{D_t(A) \cap \Omega} \sqrt{1 + |\nabla z(x, y)|^2} dx dy \\ &= 2t \iint_{D_t(A) \cap \Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{t^2 - (x - x_A)^2 - (y - y_A)^2}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где круг

$$D_t(A) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid |M - A| \leq t\} = [S_t(A^*)]_*$$

является проекцией полусферы

$$z = z(x, y) = \sqrt{t^2 - (x - x_A)^2 - (y - y_A)^2}$$

на плоскость $z = 0$. Таким образом, мы приходим к представлению

$$u(A, t) \stackrel{(1.4), (2.6)}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\iint_{D_t(A) \cap \Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{t^2 - (x - x_A)^2 - (y - y_A)^2}} \right], \quad (2.7)$$

которое послужит инструментом для изучения двумерных эффектов фокусировки.

2.3. Сейсмограммы.

Кривая и область. Пусть плоская кривая $\mathcal{L}$ задана функцией $y = y(x)$ со следующими свойствами

$$y(\cdot) \in C_{\text{loc}}^4(\mathbb{R}), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y'''(0) \neq 0. \quad (2.8)$$

Тогда $y(\cdot)$ допускает представление

$$y(x) = \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(\xi(x))}{3!} x^3 \quad \text{вблизи } x = 0, \quad (2.9)$$

где $\xi(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и $|\xi(x)| < |x|$. Кроме того, пусть $y''(0) > 0$, так что в точке $O = (0, 0)$ кривая $\mathcal{L}$ имеет положительную кривизну, равную

$$r_0 = \frac{1}{y''(0)}.$$

Положим

$$C_t(A) := \partial D_t(A) = \{(x, y) \mid x^2 + (y - r)^2 = t^2\}.$$

Как известно, ближайшей к O каустической точкой на луче $y > 0$ будет $A_0 = (0, r_0)$: это та точка, для которой $C_{r_0}(A_0)$ является *соприкасающейся окружностью* с кривой $y = y(x)$. Последнее означает

$$y(x) - y_0(x) = o(x^2) \quad \text{вблизи } x = 0,$$

где $y_0(x) := r_0 - \sqrt{r_0^2 - x^2}$ — нижняя часть $C_{r_0}(A_0)$.

Теперь в качестве начальных данных в (2.5) возьмем

$$u_0 = \chi_\Omega, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq y(x)\}$$

и $u_1 = 0$. Наша цель — описать зависимость сейсмограммы $u(A, \cdot)$ в точке $A = (0, r)$ от расположения этой точки на луче $y > 0$. Нам нужно разобрать три случая: $r < r_0$, $r > r_0$, и (критический) $r = r_0$.

Случай $r < r_0$. Фиксируем $A = (0, r)$ с положительным $r < r_0$.

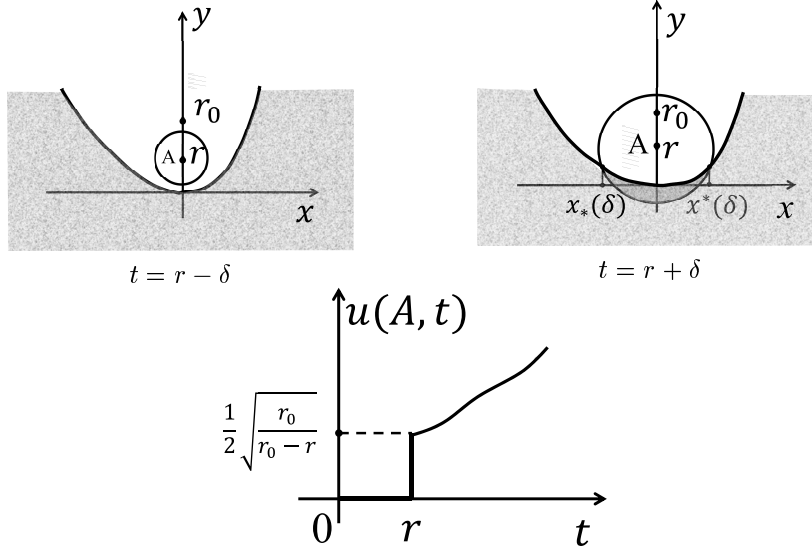


Рис. 3. Случай $r < r_0$.

- При временах $t < r$, имеем $D_t(A) \cap \Omega = \emptyset$ и, следовательно, $u(A, t) \stackrel{(2.7)}{=} 0$ (см. Рис. 3).
- Пусть теперь $t = r + \delta$ с малым $\delta > 0$. Область $D_t(A) \cap \Omega \neq \emptyset$ ограничена кривыми $y = y(x)$ и

$$y = y_\delta(x) := r - \sqrt{t^2 - x^2} = r - \sqrt{(r + \delta)^2 - x^2}. \quad (2.10)$$

Она находится между корнями $x_*(\delta) < 0$ и $x^*(\delta) > 0$ уравнения $y(x) = y_\delta(x)$, причем эти корни стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$ (см. Рис. 3).

Согласно (2.9), при $x_*(\delta) < x < x^*(\delta)$ имеем

$$\begin{aligned}
 y(x) - y_\delta(x) &= \delta + \frac{1}{2} [y''(0) - y''_\delta(0)] x^2 + \frac{1}{6} [y'''(\xi(x)) - y'''_\delta(\eta(x))] x^3 \\
 &= \delta - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r + \delta} - \frac{1}{r_0} \right] x^2 + \alpha(x, \delta) x^3 \\
 &= \delta - [\gamma^2 + O(\delta)] x^2 + \alpha(x, \delta) x^3 \\
 &= \delta - \gamma^2 \psi^2(x, \delta)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

с

$$\begin{aligned}
 \gamma &:= \sqrt{\frac{|y''(0) - y''_0(0)|}{2}} = \sqrt{\frac{r_0 - r}{2r_0 r}}, \quad \psi(x, \delta) = x [1 + o(1)], \\
 \psi'(x, \delta) &= 1 + o(1), \quad \psi'(x, 0) = 1,
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

где величины $o(1)$ зависят от x, δ и стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$ равномерно по δ .

Интеграл в (2.7) есть

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_t(A) \cap \Omega} \dots &= \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} dx \int_{y_\delta(x)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{t^2 - x^2 - (y - r)^2}} \stackrel{(2.10)}{=} \\
 &= \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} dx \int_{y_\delta(x)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{(r - y_\delta)^2 - (r - y)^2}} = \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r - y(x)}{r - y_\delta(x)} \right] dx.
 \end{aligned}$$

Применяя $\frac{d}{dt}$ с учетом $y(x_*(\delta)) = y_\delta(x_*(\delta))$, $y(x^*(\delta)) = y_\delta(x^*(\delta))$, имеем

$$\begin{aligned}
 u(A, t) &\stackrel{(2.7)}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{r - y(x)}{r - y_\delta(x)} \right]^2}} \left[-\frac{r - y(x)}{[r - y_\delta(x)]^2} \right] \left[-\frac{dy_\delta(x)}{dt} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} \frac{(r + \delta)[r - y(x)]}{[r - y_\delta(x)]^2} \frac{dx}{\sqrt{[r - y_\delta(x)]^2 - [r - y(x)]^2}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} \frac{\Phi(x, \delta)}{\sqrt{y(x) - y_\delta(x)}} dx
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

с

$$\Phi(x, \delta) := \frac{(r + \delta)[r - y(x)]}{[r - y_\delta(x)]^2 \sqrt{2r - y(x) - y_\delta(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2r}} [1 + o(1)],$$

где $o(1) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ равномерно по $x \in (x_*(\delta), x^*(\delta))$. Поэтому, согласно (2.11), для достаточно малых δ , получим

$$\begin{aligned} u(A, t) &= \frac{\Phi(\tilde{x}(\delta), \delta)}{2\pi} \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} \frac{dx}{\sqrt{\delta - \gamma^2 \psi^2(x, \delta)}} \\ &= \frac{1 + o(1)}{2\pi\sqrt{2r}} \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} \frac{dx}{\sqrt{\delta - \gamma^2 \psi^2(x, \delta)}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $x_*(\delta) < \tilde{x}(\delta) < x^*(\delta)$. Заменяя переменную интегрирования на $s = \psi(x, \delta)$, $x = x(s)$ (так, что $dx = [\psi'(x(s), \delta)]^{-1} ds$) и учитывая равенства

$$\psi(x_*(\delta), \delta) = -\frac{\sqrt{\delta}}{\gamma}, \quad \psi(x^*(\delta), \delta) = \frac{\sqrt{\delta}}{\gamma},$$

которые вытекают из (2.11), получаем

$$\begin{aligned} \int_{x_*(\delta)}^{x^*(\delta)} \dots &= \int_{-\frac{\sqrt{\delta}}{\gamma}}^{\frac{\sqrt{\delta}}{\gamma}} \frac{ds}{\psi'(x(s), \delta) \sqrt{\delta - \gamma^2 s^2}} \stackrel{(2.12)}{=} \frac{1 + o(1)}{\gamma} \arcsin \frac{\gamma s}{\sqrt{\delta}} \Big|_{s=-\frac{\sqrt{\delta}}{\gamma}}^{s=\frac{\sqrt{\delta}}{\gamma}} \\ &= \frac{\pi}{\gamma} [1 + o(1)] = \pi \sqrt{\frac{2r_0 r}{r_0 - r}} [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (2.14) и суммируя результаты, приходим к представлению

$$u(A, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r_0 - r}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \sim r + 0 \quad (2.15)$$

(см. Рис. 3).

Таким образом, начальный скачок амплитуды 1 исходит из $O = (0, 0)$, движется вдоль луча $y > 0$, достигает точки $A = (0, r)$ при $t = r$ и производит разрыв. Амплитуда последнего равна $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r_0 - r}}$; она растет при приближении r к r_0 .

Такая картина вполне согласуется с известными результатами геометрической оптики. Тем не менее, здесь она получена элементарными средствами, без использования анзатца Адамара, уравнений переноса и т.п.: см., e.g., [4].

Случай $r > r_0$. Фиксируем $A = (0, r)$ с положительным $r > r_0$, и выберем малое $\delta > 0$. Не теряя общности, мы рассматриваем “невыврожденный”, случай, изображенный на Рис. 4.

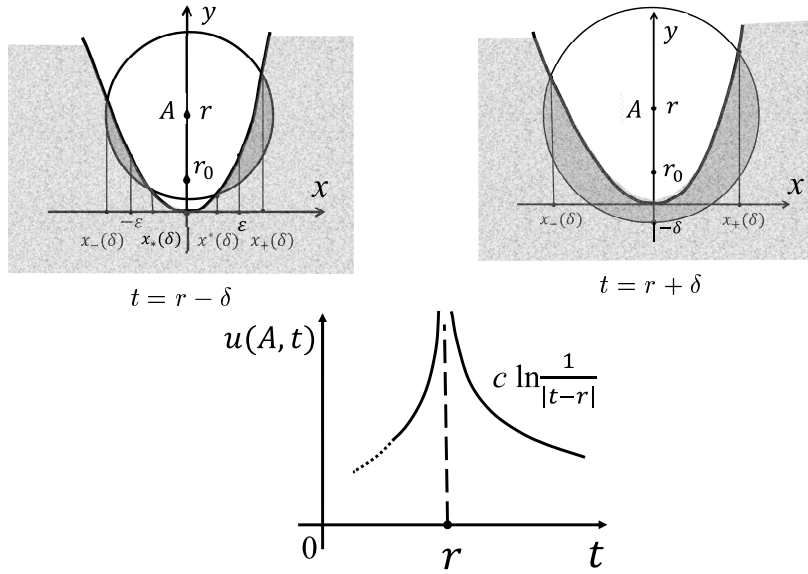


Рис. 4. Случай $r > r_0$.

Его особенностью является поведение корней уравнения

$$y(x) = y_\delta(x) \quad (= r - \sqrt{(r \mp \delta)^2 - x^2})$$

мы предполагаем, что

$$x_-(\delta) \rightarrow x_-(0) < 0, \quad x_+(\delta) \rightarrow x_+(0) > 0, \quad x_*(\delta) \rightarrow 0, \quad x^*(\delta) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

• Пусть $t = r - \delta$ так, что $y_\delta(x) = r - \sqrt{(r - \delta)^2 - x^2}$. Тогда разность в (2.11) принимает вид

$$\begin{aligned} y(x) - y_\delta(x) &\stackrel{(2.9)}{=} -\delta + \frac{1}{2} [y''(0) - y''_\delta(0)] x^2 + \frac{1}{6} [y'''(\xi(x)) - y'''_\delta(\eta(x))] x^3 \\ &= -\delta + \gamma^2 \psi^2(x, \delta) \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{|y''(0) - y''_\delta(0)|}{2}} = \sqrt{\frac{r - r_0}{2r_0 r}}, \quad \psi(x, \delta) = x [1 + o(1)], \\ \psi'(x, \delta) &= 1 + o(1), \quad \psi'(x, 0) = 1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Повторяя рассуждения, приведшие к (2.13), легко получим

$$u(A, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x_-(\delta)}^{x_*(\delta)} + \int_{x_*(\delta)}^{x_+(\delta)} \right] \frac{\Phi(x, \delta)}{\sqrt{y(x) - y_\delta(x)}} dx \quad (2.18)$$

с

$$\Phi(x, \delta) := \frac{(r - \delta)[r - y(x)]}{[r - y_\delta(x)]^2 \sqrt{2r - y(x) - y_\delta(x)}}, \quad \Phi(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2r}}. \quad (2.19)$$

Теперь выберем (достаточно малое) $\varepsilon > 0$ так, что (2.16) выполнено для $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и представим

$$\int_{x_-(\delta)}^{x_*(\delta)} + \int_{x^*(\delta)}^{x_+(\delta)} = \int_{x_-(\delta)}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{x_*(\delta)} + \int_{x^*(\delta)}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{x_+(\delta)}.$$

Первый и четвертый интегралы $\Psi_1(\delta) := \int_{x_-(\delta)}^{-\varepsilon}$ и $\Psi_4(\delta) := \int_{\varepsilon}^{x_+(\delta)}$ ведут себя регулярно при $\delta \rightarrow 0$ и не дают вклада в особенность $u(A, t)$. Для третьего интеграла, с учетом

$$\gamma \psi(x^*(\delta), \delta) \stackrel{(2.16)}{=} \sqrt{\delta},$$

имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{x_*(\delta)}^{\varepsilon} \frac{\Phi(x, \delta)}{\sqrt{y(x) - y_\delta(x)}} dx \stackrel{(2.16)}{=} \int_{x_*(\delta)}^{\varepsilon} \frac{\Phi(x, \delta)}{\sqrt{\gamma^2 \psi^2(x, \delta) - \delta}} dx \\
&= \int_{x_*(\delta)}^{\varepsilon} \frac{\Phi(x, \delta)}{\gamma \psi'(x, \delta)} d \ln \left[\gamma \psi(x, \delta) + \sqrt{\gamma^2 \psi^2(x, \delta) - \delta} \right] \\
&= - \frac{\Phi(x^*(\delta), \delta)}{\gamma \psi'(x^*(\delta), \delta)} \ln \sqrt{\delta} + \tilde{\Psi}_3(\delta) \stackrel{(2.17), (2.19)}{=} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r - r_0}} \ln \frac{1}{\delta} + \Psi_3(\delta)
\end{aligned}$$

с регулярным $\Psi_3(\delta)$, стремящимся к *конечному* значению $\Psi_3(0)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Как легко проверить, второй интеграл дает аналогичный вклад:

$$\int_{-\varepsilon}^{x_*(\delta)} \frac{\Phi(x, \delta)}{\sqrt{y(x) - y_\delta(x)}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r - r_0}} \ln \frac{1}{\delta} + \Psi_2(\delta).$$

Объединяя результаты, мы представляем (2.18) в виде

$$u(A, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_0}{r - r_0}} \ln \frac{1}{r - t} + \Psi(t) \quad \text{вблизи } t = r \quad (2.20)$$

с непрерывной Ψ , для которой значение $\Psi(r - 0)$ конечно.

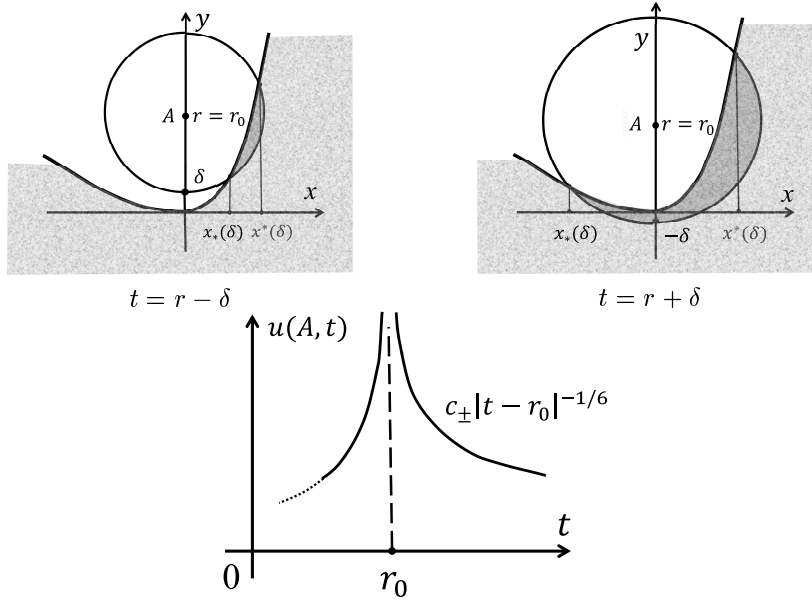
• Случай $t \rightarrow r + 0$ разбирается аналогично. Результат вполне аналогичен (2.20) и, окончательно, мы приходим к представлению сейсмограммы в форме

$$u(A, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_0}{r - r_0}} \ln \frac{1}{|t - r|} + \Psi(t) \quad \text{вблизи } t = r, \quad (2.21)$$

где Ψ имеет конечные значения $\Psi(r \pm 0)$.

Таким образом, пройдя точку каустики $A_0 = (0, r_0)$, конечный изначальный разрыв превращается в логарифмическую особенность.

Случай $r = r_0$. Исследуя критический случай, мы имеем дело с “невырожденной”, ситуацией, показанной на Рис. 5. Также, для простоты, в дополнение к (2.8) мы предполагаем, что $y^{IV}(0) \neq 0$. Благодаря этому, используемое нами разложение Тейлора–Лагранжа дифференцируемо вплоть до членов третьего порядка.


 Рис. 5. Случай $r = r_0$.

- Пусть $A = (0, r_0)$ и $t = r_0 - \delta$. Учитывая $y''(0) = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} = y_0(0)$, получим

$$\begin{aligned} y(x) - y_\delta(x) &= -\delta + \frac{y'''(0)}{6} x^3 + \frac{y^{IV}(\xi(x))}{24} x^4 \\ &= -\delta + \lambda^3 \psi^3(x, \delta) \end{aligned} \quad (2.22)$$

с

$$\begin{aligned} \lambda &:= \left[\frac{y'''(0)}{6} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad \psi(x, \delta) = x [1 + o(1)], \\ \psi'(x, \delta) &= 1 + o(1), \quad \psi'(x, 0) = 1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где величины $o(1)$ зависят от x, δ и стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$ равномерно по δ . Первый корень $x_*(\delta)$ уравнения $y(x) - y_\delta(x) = 0$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$ и

$$\lambda \psi(x_*(\delta), \delta) \stackrel{(2.22)}{=} \delta^{\frac{1}{3}}. \quad (2.24)$$

Для второго корня выполняется $x^*(\delta) \rightarrow x^*(0) > 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что (2.22) верно для $0 < x < \varepsilon$. Сейсмограмма представится тогда в виде

$$u(A, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x_*(\delta)}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{x_*(\delta)} \right] \frac{\Phi(x, \delta)}{\sqrt{y(x) - y_\delta(x)}} dx \quad (2.25)$$

с

$$\Phi(x, \delta) := \frac{(r_0 - \delta)[r_0 - y(x)]}{[r_0 - y_\delta(x)]^2 \sqrt{2r_0 - y(x) - y_\delta(x)}}, \quad \Phi(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2r_0}}. \quad (2.26)$$

Второй интеграл регулярен при $\delta \rightarrow 0$, а первый можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{x_*(\delta)}^{\varepsilon} \frac{\Phi(x, \delta)}{\sqrt{y(x) - y_\delta(x)}} dx \stackrel{(2.22), (2.24)}{=} \int_{\frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{\lambda}}^{\psi(\varepsilon, \delta)} \frac{\Phi(x(s), \delta)}{\psi'(x(s), \delta) \sqrt{\lambda^3 s^3 - \delta}} ds \\ &= \int_1^{\lambda \psi(\varepsilon, \delta) \delta^{-\frac{1}{3}}} \frac{\Phi\left(x\left(\frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{\lambda} t\right), \delta\right) \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{\lambda}}{\psi'\left(x\left(\frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{\lambda} t\right), \delta\right) \delta^{\frac{1}{2}} \sqrt{t^3 - 1}} dt \stackrel{(2.23), (2.26)}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2r_0}} \left[\frac{6}{y'''(0)} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}} \right] \delta^{-\frac{1}{6}} [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Следовательно, получено представление

$$u(A, t) \stackrel{(2.25)}{=} c_- (r_0 - t)^{-\frac{1}{6}} + \Psi_-(t) \quad (2.27)$$

с постоянной

$$c_- := \frac{1}{2\pi\sqrt{2r_0}} \left[\frac{6}{y'''(0)} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}} \right]$$

и непрерывной Ψ_- , имеющей конечный предел $\Psi_-(r_0 - 0)$.

• Вполне аналогичный анализ случая $t = r_0 + \delta$, дает асимптотики той же формы (2.27) и ведет к представлению

$$u(A, t) \stackrel{(2.25)}{=} c_{\mp} |t - r_0|^{-\frac{1}{6}} + \Psi_{\mp}(t) \quad \text{при } t \sim r_0 \mp 0, \quad (2.28)$$

причем

$$c_+ := \frac{1}{2\pi\sqrt{2r_0}} \left[\frac{6}{y'''(0)} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\int_{-1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}} \right],$$

и непрерывной $\Psi_{\mp}$ такой, что $\Psi_{\mp}(r_0 \pm 0) \neq \infty$.

Таким образом, в каустической точке $A_0 = (0, r_0)$ эффект фокусировки выражен наиболее ярко.

Выпуклая Ω . Подобным образом можно проанализировать случай, представленный на Рис. 6, в котором $y''(0) = -\frac{1}{r_0} < 0$. Пунктирная линия есть окружность, соприкасающаяся с кривой $y = y(x)$.

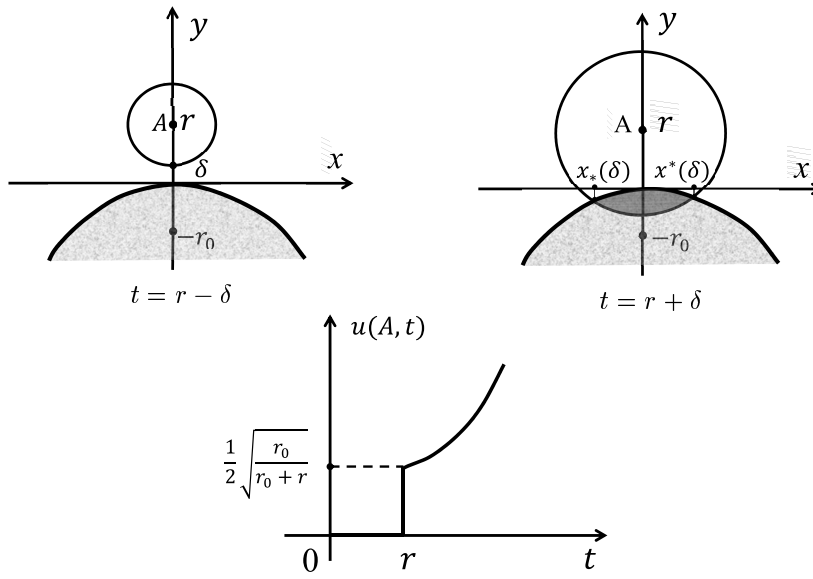


Рис. 6. Выпуклая Ω .

Результат таков: для любого $A = (0, r)$ ($r > 0$) сейсмограмма имеет вид

$$u(A, t) = \begin{cases} 0, & t < r, \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r+r_0}} [1 + o(1)], & t \sim r + 0. \end{cases}$$

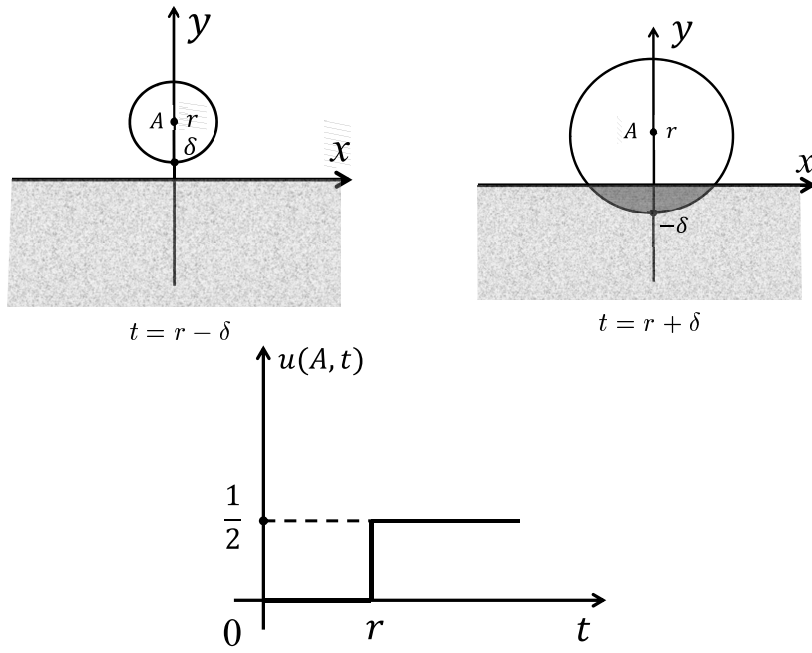


Рис. 7. Полуплоскость.

Итак, здесь имеет место эффект *дефокусировки*: амплитуда скачка в A уменьшается с увеличением r .

2.4. Примеры. Здесь, опуская вычисления, мы приводим список результатов, полученных в рамках представленной выше техники.

Полуплоскость. Пусть $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ и $A = (0, r)$ ($r > 0$). Сейсмограмма имеет вид

$$u(A, t) = \frac{\theta(t - r)}{2}, \quad (2.29)$$

что отвечает решению задачи (2.2)–(2.3) вида

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} [\theta(-y + t) + \theta(-y - t)],$$

показанному на Рис. 7. Амплитуда скачка в момент $t = r$ не зависит от r .

Круг. Пусть $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq r_0\}$.

- Для $A = (0, r)$ с $0 < r < r_0$, сейсмограмма изображена на Рис. 8. Постоянные суть $a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r_0 - r}}$, $b = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_0}{r - r_0}}$, что согласуется с (2.15) и (2.21).

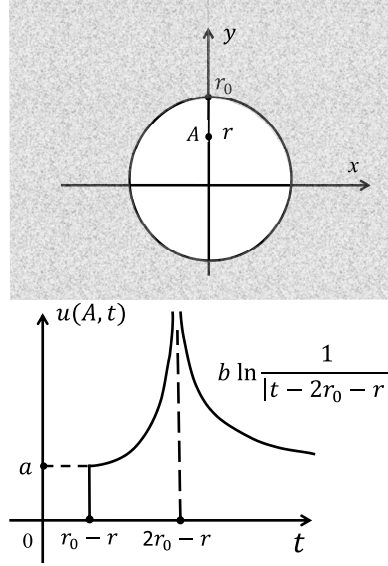


Рис. 8. Круг.

- Для $A = O = (0, 0)$, представление (2.7) легко ведет к

$$u(O, t) = \begin{cases} 0, & t < r_0, \\ \frac{t}{\sqrt{t^2 - r_0^2}}, & t > r_0, \end{cases} \quad t \sim_{r_0+0} c(t - r_0)^{-\frac{1}{2}} [1 + o(1)] \quad (2.30)$$

с $c = \sqrt{\frac{r_0}{2}}$ и дает сейсмограмму, изображенную на Рис. 9.

Особенность $(t - r_0)^{-\frac{1}{2}}$ описывает максимально возможную для плоскости фокусировку; при этом она слабее чем в пространстве, см. (1.6).

Парабола. Пусть $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$, так что кривая $\mathcal{L}$ есть парабола с каустикой $\mathcal{C}$ вида (2.1). В зависимости от положения точки A внутри параболы, функция расстояния $r_A(B) := |A - B|$ of $B \in \mathcal{L}$ может иметь один, два или три экстремума A' , $\{A', A''\}$, и $\{A', A'', A'''\}$

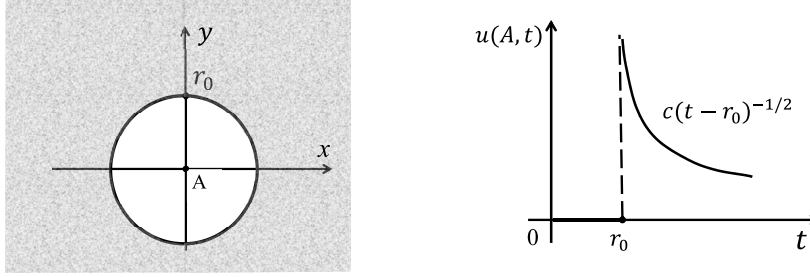


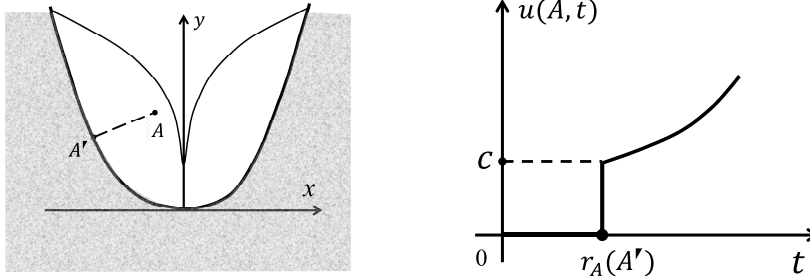
Рис. 9. Круг.

на $\mathcal{L}$. В каждом из этих случаев сейсмограмма $u(A, \cdot)$ имеет свою специфику. В дальнейшем $c > 0$ означает некоторую константу.

- Пусть $A = (x_A, y_A)$ расположена *под* $\mathcal{C}$ так, что

$$x_A^2 < y_A < \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x_A}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(Рис. 10). Для нее расстояние $r_A(\cdot)$ имеет один минимум $A' \in \mathcal{L}$, и сейсмограмма имеет единственный скачок при $t = r_A(A')$, который соответствует случаю $r < r_0$ в разделе 2.3.

Рис. 10. A ниже $\mathcal{C}$.

- Если $A = (0, \frac{1}{2})$ – вершина рога на $\mathcal{C}$ (Рис. 11), то $r_A(\cdot)$ также достигает единственного минимума при $A' = (0, 0)$, и сейсмограмма имеет вид

$$u(A, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ c(t - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{4}} + \Psi(t), & t > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.31)$$

с $c = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ и непрерывной Ψ , удовлетворяющей $|\Psi(\frac{1}{2} + 0)| < \infty$.

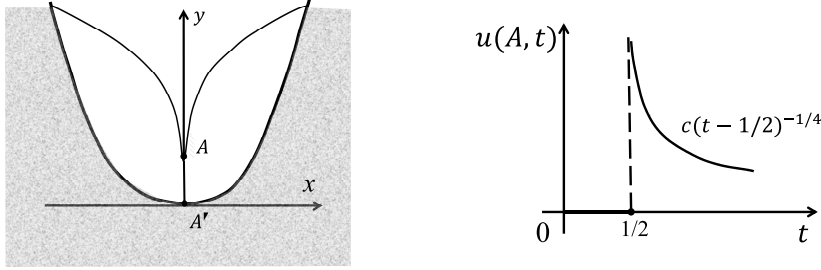


Рис. 11. A в вершине рога.

Таким образом, фокусировка на роге имеет место, но эффект слабее чем в центре круга (сравнить с (2.30)).

- Для каустической точки $A \in \mathcal{C}$ общего положения с $x_A \neq 0$ (Рис. 12) имеют место два локальных минимума $A', A'' \in \mathcal{L}$ of $r_A(\cdot)$, при этом выполнено $r_A(A') < r_A(A'')$.

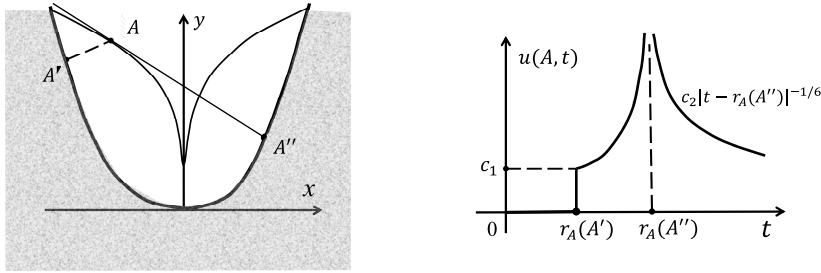
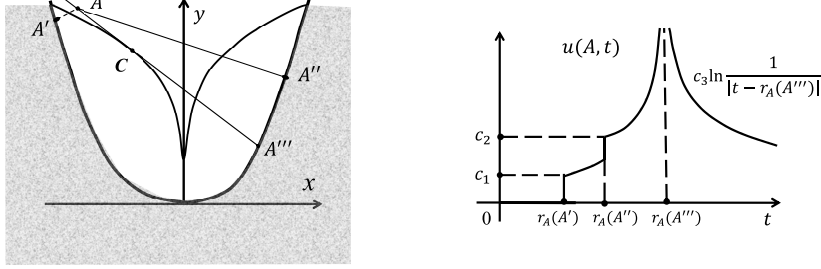


Рис. 12. Общий случай $A \in \mathcal{C}$.

Соответственно, сейсмограмма имеет две сингулярности. Первая – это скачок, порожденный начальным скачком, пришедшим из ближайшей точки A' ; A' ; он соответствует случаю $r < r_0$ в разделе 2.3, его амплитуда вычисляется по (2.15). Вторая сингулярность возникает из скачка, пришедшего из A'' , и имеет вид (2.28) (см. случай $r = r_0$ в разделе 2.3). Таким образом, фокусировка в A в момент $t = r_A(A'')$ имеет место, но она слабее чем в вершине.

- Пусть теперь A такова, что $x_A \neq 0$, $y_A > x_A^2$, и $y_A > \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x_A}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$, то есть она лежит *выше* каустики (Рис. 13). Расстояние $r_A(\cdot)$ достигает минимума в трех точках – $A', A'', A''' \in \mathcal{L}$. Луч AA' есть самый короткий путь из A до $\mathcal{L}$; AA'' – самый короткий путь из A до правой ветви $\mathcal{L}$; луч AA''' – касается каустики в C и ортогонален параболе в A'' . При этом $r_A(A') < r_A(A'') < r_A(A''')$.

Рис. 13. Общий случай $A \in \mathcal{C}$.

Каждый луч привносит особенности в сейсмограмму. Именно, начальные скачки в A' и A'' дают скачки в A вида (2.15), что отвечает случаю $r < r_0$ раздела 2.3. Скачок, идущий из A''' , проходит через каустику в C , приобретает логарифмическую особенность (2.21) и привносит ее в сейсмограмму (как в случае $r > r_0$ раздела 2.3).

Если $x_A = 0$, $y_A > \frac{1}{2}$, то $r_A(A') = r_A(A'')$, и скачки из A' и A'' приходят в A одновременно. В этом особом случае скачки амплитуды имеют вид (2.15) и просто складываются. Скачок из $A''' = (0, 0)$ дает логарифмическую особенность в момент $t = y_A$.

Кубическая парабола. Для кривой $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$ и области $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^3\}$ результаты аналогичны предыдущим. Специфика лишь в том, что здесь имеется *точка уплощения* $O = (0, 0) \in \mathcal{L}$, в которой $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$. В этом случае анализ приводит к следующему.

Пусть $A = (0, r)$ лежит над точкой уплощения, но, для простоты, ниже каустики: см. Рис. 14. Тогда сейсмограмма содержит скачок вида (2.15) при $t = r$, пришедший из O , причем его амплитуда равна $\frac{1}{2}$. Примечательно, что амплитуда *не зависит от r* . Это можно объяснить взаимной компенсацией эффектов фокусировки на

правой ветви $\{(x, y) \in \mathcal{L} \mid 0 < x < \varepsilon\}$ и дефокусировки на левой $\{(x, y) \in \mathcal{L} \mid -\varepsilon < x < 0\}$. В результате амплитуда выглядит так же как и в плоском случае: см. (2.29) и Рис. 7.

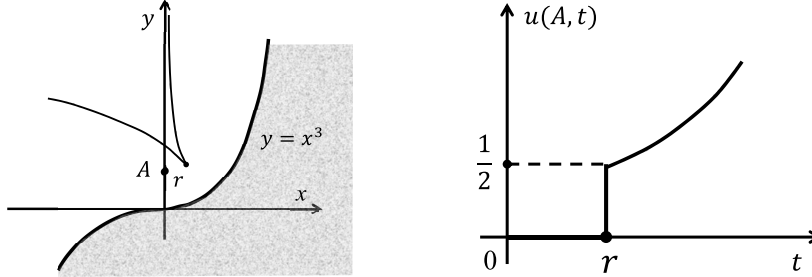


Рис. 14. A над точкой уплощения.

§3. ТРЕХМЕРНАЯ ФОКУСИРОВКА

3.1. Каустики. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ есть гладкая поверхность, $\sigma \subset \mathcal{S}$ (малая) окрестность с заданными на ней локальными координатами α и β , $n(\alpha, \beta)$ – гладкое поле единичных евклидовых нормалей к σ , $r(\alpha, \beta) := \{A \in \mathbb{R}^3 \mid A = \tau n(\alpha, \beta), \tau \geq 0\}$ – луч, порожденный нормалью. Множество $\mathcal{T} := \bigcup_{\alpha, \beta} r(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^3$ называется *лучевой трубкой* ((с основанием σ)). Каждая точка $A = (x, y, z) \in \mathcal{T}$ лежит на некотором луче $r(\alpha, \beta)$, так что ее положение в $\mathbb{R}^3$ задано тройкой α, β, τ – *лучевыми координатами*. Декартовы координаты A при этом оказываются функциями лучевых: $x = x(\alpha, \beta, \tau)$, $y = y(\alpha, \beta, \tau)$, $z = z(\alpha, \beta, \tau)$.

Множество

$$\mathcal{C} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \det \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta & x_\tau \\ y_\alpha & y_\beta & y_\tau \\ z_\alpha & z_\beta & z_\tau \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

называется *каустикой* семейства лучей, исходящих из σ . Обычно это кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$.

3.2. Примеры. Наш подход, основанный на ФП, вполне эффективен в исследовании трехмерной фокусировки. Однако, в общем случае, соответствующие вычисления весьма громоздки и мы ограничились парой конкретных примеров.

В этих примерах мы выбираем $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq z(x, y)\}$ с гладкой $z(x, y)$, такой что

$$z(0, 0) = 0, \quad \nabla z(0, 0) = 0,$$

и полагаем $u_0 = \chi_\Omega$. Далее, мы рассматриваем первую точку каустики $A_0 = (0, 0, r_0)$ на луче $z \geq 0$, идущем из $O = (0, 0, 0)$, и строим сейсмограмму $u(A, \cdot)$ в точке $A = (0, 0, r)$ с $r < r_0$, $r = r_0$, и $r > r_0$ по формуле

$$u(A, t) \stackrel{(1.3), (1.4)}{=} \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma[S_t(A) \cap \Omega]}{t} \right].$$

Площадь дается выражением

$$\sigma[S_t(A) \cap \Omega] = \iint_{\text{pr}[S_t(A) \cap \Omega]} \sqrt{1 + |\nabla z(x, y)|^2} \, dx \, dy, \quad (3.1)$$

где $\text{pr} : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ есть проекция. Основная задача состоит в оценке асимптотического поведения этого интеграла при $t \sim r \pm \delta$ ($\delta \rightarrow 0$).

Параболоид. Пусть $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq x^2 + y^2\}$. В этом осесимметрическом случае луч $z \geq 0$ содержит единственную каустическую точку $(0, 0, \frac{1}{2})$, и мы интересуемся сейсмограммой $u(A, \cdot)$ для $A = (0, 0, r)$ с положительным $r < \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, и $r > \frac{1}{2}$. В силу осевой симметрии параболоида, $\text{pr}[S_t(A) \cap \Omega]$ есть или круг, или кольцо, и интеграл в (3.1) легко вычисляется в полярных координатах в (x, y) -плоскости. Результаты таковы.

- При $r < \frac{1}{2}$, сейсмограмма имеет вид

$$u(A, t) = \begin{cases} 0, & t < r, \\ c + \Psi(t), & t > r \end{cases} \quad (3.2)$$

с $c = \frac{1}{2(1-2r)}$ и гладкой Ψ такой, что $\Psi(\frac{1}{2} + 0) = 0$. Таким образом, имеется конечный скачок в момент $t = r$, других особенностей нет.

- При $r = \frac{1}{2}$, сейсмограмма имеет вид

$$u(A, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} (t - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} + \Psi(t), & t > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.3)$$

с гладкой Ψ такой, что $|\Psi(\frac{1}{2} + 0)| < \infty$. Таким образом, эффект фокусировки присутствует, причем особенность слабее, чем в центре шара (см. (1.6)), но сильнее, чем на вершине рога для параболы на плоскости

(см. (2.31)). Последнее вполне ожидаемо по физическим соображениям.

- При $r > \frac{1}{2}$ сейсмограмма содержит две особенности и имеет вид

$$u(A, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \sqrt{r - \frac{1}{4}}, \\ c_1 \left(t - \sqrt{r - \frac{1}{4}} \right)^{-\frac{1}{2}} - c_2 \theta(t - r) + \Psi(t), & t > \sqrt{r - \frac{1}{4}} \end{cases} \quad (3.4)$$

с $c_1 = \frac{(4r-1)^{\frac{1}{4}}}{2}$, $c_2 = \frac{r}{2r-1}$, и гладким Ψ . Особенность $t = \sqrt{r - \frac{1}{4}}$ создают скачки, идущие из точек окружности, которая лежит на параболоиде и состоит из точек, ближайших к $(0, 0, r)$.

- В более общем случае $z = ax^2 + by^2$ с постоянными $a, b, 0 < b < a$, представление (3.2) сохраняется (с подходящей $c > 0$), при этом вторая строка в (3.3) принимает вид

$$u(A, t) = c (t - r_0)^{-\frac{1}{4}} + \Psi(t), \quad t > r_0, \quad (3.5)$$

с

$$r_0 = \frac{1}{2a}, \quad c = \frac{3a^{\frac{1}{4}}(a-b)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-s^4} ds, \quad (3.6)$$

и гладким Ψ , так что фокусировка становится слабее.

Замечание. Если a и b постоянны, то $(0, 0, 0)$ будет точкой параболоида, в которой Гауссова кривизна максимальна, а $(0, 0, r_0)$ – острие рога каустики, что является исключительным случаем. Общий случай может быть сведен к $z = a(x, y)x^2 + b(x, y)y^2$ с гладкими a, b , удовлетворяющими $0 < b(0, 0) < a(0, 0)$, $|\nabla a(0, 0)| + |\nabla b(0, 0)| \neq 0$. В этом случае (3.2) сохраняется (с подходящей положительной c), но, вместо (3.3) и/или (3.5), будет

$$u(A, t) = c (t - r_0)^{-\frac{1}{6}} + \Psi(t), \quad t \sim r_0 + 0$$

с $r_0 = \frac{1}{2a(0,0)}$ и некоторой $c > 0$. Таким образом, если симметрия отсутствует, фокусировка будет наиболее слабой, что вполне ожидаемо по физическим соображениям.

Седло. Пусть $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq x^2 - y^2\}$. В этом случае луч $z \geq 0$, идущий из седловой точки $O = (0, 0, 0)$ содержит единственную каустическую точку $(0, 0, \frac{1}{2})$, лежащую на вершине каустического рога. Опуская вычисления, приведем результат.

- При $r < \frac{1}{2}$, сейсмограмма в точке $A = (0, 0, r)$ имеет вид

$$u(A, t) = \begin{cases} 0, & t < r \\ \frac{1}{2\sqrt{1-4r^2}} + \Psi(t), & t > r \end{cases} \quad (3.7)$$

с гладкой Ψ , такой что $\Psi(\frac{1}{2}+0) = 0$. Таким образом, имеется скачок в момент $t = r$. Интересно сравнить его амплитуду с амплитудой скачка в случае кубической параболы (см. Рис. 14). Напомним, что тогда амплитуда не зависела от r . Форма седла такова, что и здесь одна часть окрестности седловой точки $(0, 0, 0)$ *фокусирует* лучи, а другая *расфокусирует* их. Тем не менее, как показывает (3.7), амплитуда растет при $r \rightarrow \frac{1}{2} - 0$, то есть фокусировка превалирует.

- При $r = \frac{1}{2}$, имеем сейсмограмму

$$u(A, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ c (t - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{4}} + \Psi(t), & t > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.8)$$

с

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + 1 + s^2}}$$

и гладким Ψ таким, что $|\Psi(\frac{1}{2}+0)| < \infty$. Таким образом, фокусировка имеется, причем сингулярность слабее, чем для каустического рога у параболоида: см. (3.3).

- При $r > \frac{1}{2}$ и временах $t \sim r$, в сейсмограмме есть логарифмическая особенность:

$$u(A, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{4r^2-1}} \ln \frac{1}{|t-r|} + \Psi(t) \quad (3.9)$$

с гладкой Ψ такой, что $|\Psi(r)| < \infty$.

- В более общем случае $z = ax^2 - by^2$ с положительными постоянными a и b остаются верными представления (3.7) и (3.9) (с подходящими коэффициентами), но в (3.8) вторая строка примет вид

$$u(A, t) = c (t - r_0)^{-\frac{1}{4}} + \Psi(t), \quad t > r_0, \quad (3.10)$$

с

$$r_0 = \frac{1}{2a}, \quad c = \frac{3a^{\frac{1}{4}}(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-s^4} ds, \quad (3.11)$$

и гладкой Ψ . Чтобы получить (3.11), нужно просто заменить b в (3.6) на $-b$.

Однако, если a и b постоянны, то в точке $(0, 0, 0)$ секционная кривизна достигает максимума, а точка $(0, 0, r_0)$ лежит на вершине каустического рога, что есть случай исключительный. Общий случай можно свести к $z = a(x, y)x^2 - b(x, y)y^2$ с гладкими a, b при условии

$$0 < a(0, 0) < b(0, 0), \quad |\nabla a(0, 0)| + |\nabla b(0, 0)| \neq 0.$$

Тогда (3.7) и (3.9) остаются верны, но вместо (3.8) или (3.10), нужно взять

$$u(A, t) = c_{\mp} |t - r_0|^{-\frac{1}{6}} + \Psi(t), \quad t \sim r_0 \mp 0$$

с $r_0 = \frac{1}{2a(0,0)}$, постоянными $c_{\mp}$, которые определяются значениями $a(0, 0)$, $b(0, 0)$, $a_x(0, 0)$, $a_y(0, 0)$, $b_x(0, 0)$, $b_y(0, 0)$, и Ψ — гладкое. Таким образом, при отсутствии симметрии фокусировка оказывается слабой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1. М., Наука, 1982.
2. В. М. Бабич, *Распространение нестационарных волн и каустики. Динамические проблемы в теории упругости IV*. — Ученые записки ЛГУ, Ленинград (1958), 228–259.
3. В. М. Бабич, *Аналитический характер поля нестационарной волны в окрестности каустики. Проблемы динамической теории распространения сейсмических волн*. — Изд. ЛГУ, Ленинград, 1961, стр. 115–144.
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. М., 1972.
5. Yu. A. Kravtsov, Yu. I. Orlov, *Caustics, catastrophes and wave fields*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1999.
6. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*. М., Наука, 1971.

Belishev M. I., Vakulenko A. F., Kazakov A. Ya. Evolution of wave field jumps near caustics (elementary approach).

The Poisson formula solving a 3-dim Cauchy problem for the wave equation is applied to study behavior of the wave field singularities (jumps) near

caustics in the 2-dim and 3-dim cases. The approach of quite elementary character enables one to describe the focusing effects in detail.

Санкт-Петербургское отделение

Поступило 12 октября 2015 г.

Математического института

им. В. А. Стеклова РАН,

Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург;

Санкт-Петербургский государственный университет,

Университетская наб. 7/9,

199034, С.-Петербург,

Россия

E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Санкт-Петербургское отделение

Математического института

им. В. А. Стеклова РАН,

Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,

Россия

E-mail: vak@pdmi.ras.ru

Санкт-Петербургский

государственный университет

технологии и дизайна,

Санкт-Петербургский государственный университет

аэрокосмического приборостроения

E-mail: a-kazak@mail.ru