

В. М. Бабич, А. А. Мацковский

ГОЛОВНАЯ ВОЛНА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО  
ТИПА (ВОЛНА БУЛДЫРЕВА) И СООБРАЖЕНИЯ  
ЛОКАЛЬНОСТИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть гладкая кривая  $S$  разделяет две среды 1 и 2. Рассматривается плоская скалярная задача. Скорость волн в среде 1 пусть  $c_1 = \text{const} > 0$ , в среде 2 — гладкая положительная функция  $c_2(x, y)$ . Волновой процесс в средах 1 и 2 описывается уравнениями

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c_j^2} \right) U_j = 0, j = 1, 2; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Предполагается, что на  $S$  выполнены следующие краевые условия:

$$U_1|_S = U_2|_S, \quad \frac{1}{\varkappa_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} \Big|_S = \frac{1}{\varkappa_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} \Big|_S, \quad (2)$$

$\varkappa_j$  — гладкие положительные функции, заданные на  $S$ ,  $n$  — нормаль к  $S$ , направленная вглубь среды 1.

Пусть из среды 1 на границу  $S$  падает волна, заданная своим геометро-оптическим разложением:

$$U^{\text{inc}} \sim e^{i\omega r(x, y)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j^{\text{inc}}(x, y)}{(-i\omega t)^{j+\xi}}. \quad (3)$$

Мы предполагаем, что вблизи  $S$   $c_2(x, y) > c_1$  и луч падающей волны, пришедший в точку  $O$  (см. Рис. 1) предельный в том смысле, что соответствующий преломленный луч касателен к  $S$ . Так будет, если соответствующий угол скольжения  $\alpha_0$  таков, что

$$\cos \alpha_0 = \left( \frac{c_1}{c_2} \right)_O. \quad (4)$$

---

*Ключевые слова:* дифракция, точечный источник, головная волна интерференционного типа, волна Булдырева, волны шепчущей галереи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 14-01-00535А и частично гранта НШ-1771.2014.1.

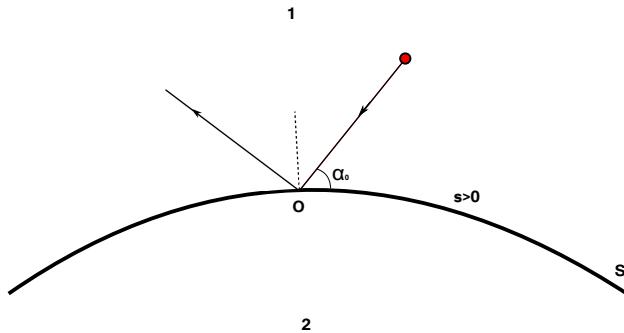


Рис. 1. Предельный луч падающей на границу раздела двух сред волны.

Пусть  $\alpha = \alpha(s)$  – углы скольжения на  $S$  лучей волны  $U^{\text{inc}}$ . Мы предполагаем, что

$$\frac{d}{ds} \left( \cos \alpha - \frac{c_1}{c_2} \right) \Big|_{s=0} < 0, \quad (5)$$

то есть в окрестности точки  $O$  при  $s > 0$  лучи падающей волны будут преломляться, а при  $s < 0$  – испытывать полное внутреннее отражение. В том случае, когда имеет место неравенство (5), естественно предположить, что слева от точки  $O$  вдоль границы будет распространяться волна шепчущей галереи, амплитуда которой должна быть пропорциональна амплитуде падающей волны. Основным результатом работы [2] является формула, из которой в частности следует, что если области 1 и 2 – полуплоскости  $y > 0$  и  $y < 0$  (см. Рис. 2),  $c_1 = \text{const}$ , а  $c_2 = c_2(y)$ ;  $c_2(0) > c_1$  и  $\frac{dc_2}{dy} \Big|_{y=0} < 0$ , в точке  $M_0$  – точечный источник колебаний:

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) U_j = \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (6)$$

то амплитуда волны шепчущей галереи, распространяющейся влево от точки  $O$  не меняется, когда источник колебаний перемещается

вдоль полупрямой  $OM_0$ . Амплитуда падающей волны пропорциональна  $\frac{1}{\sqrt{|OM_0|}}$ , а в формуле (28) см. [2] такого множителя нет. Исследование точного решения для случая, когда скорость в среде 1 постоянна ( $c_1(x, y) = c_1 = \text{const}$ ) а в среде 2 удовлетворяет соотношению  $\frac{c_1^2}{c_2^2(y)} = \alpha_1 + \alpha_2 y$  ( $0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 > 0$ ) подтверждает этот вывод.

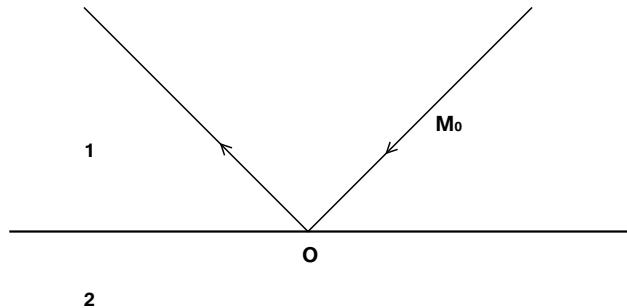


Рис. 2. Предельный случай, области 1 и 2 – полу平面ости,  $\frac{c_1^2}{c_2^2(y)} = \alpha_1 + \alpha_2 y$ . Подробные результаты исследования этой задачи изложены в работе [6].

Несмотря на кажущуюся парадоксальность ситуации, с принципом локальности здесь “все в порядке”, о чем пойдет речь далее.

## §2. ОСНОВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ

Узкая лучевая полоска, состоящая из лучей, встречающих  $S$  (см. Рис. 1) при  $s > 0$ , преломляясь в среду 2 дает волну шепчущей галереи. В. С. Булдырев показал, что если соответствующий угол скольжения преломленной волны больше  $\varepsilon_0$  (см. Рис. 3)

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\Delta} \left[ \frac{\omega P(s)}{2c_2(s)} \right]^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{\omega P(s)}{2c_2(s)} \right)^\delta, \quad (7)$$

$\Delta = \text{const} = O(1), 0 < \delta < \frac{1}{12}$ , (см. книгу [3], где изложены соответствующие рассмотрения и приводятся ссылки на работы В. С. Булдырева), то преломленные волны, последовательно отражаясь от  $S$ , сохраняют “геометро-оптическую индивидуальность”. Следуя В. С. Булдыреву, будем  $\varepsilon_0$  считать условной предельной границей, начиная с которой волны в среде 2 образуют волну шепчущей галереи.

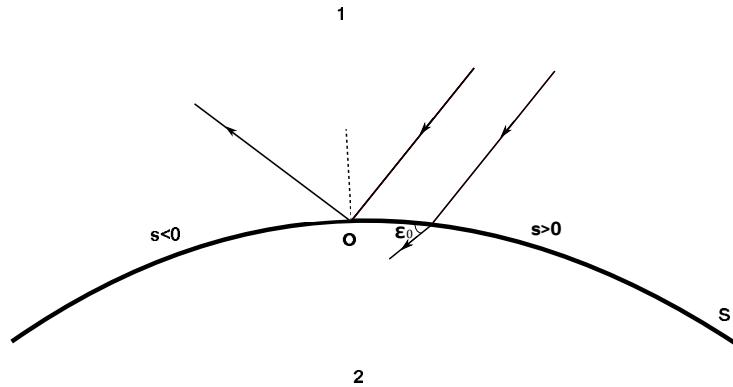


Рис. 3. Преломленная под углом скольжения  $\varepsilon_0$  волна – условная предельная граница, начиная с которой волны в среде 2 образуют волну шепчущей галереи.

Как известно модуль потока энергии волнового поля  $U$  через участок  $S' \subset S$  в направлении нормали  $n$  равен

$$\int_{S'} \frac{\omega c^2}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial U}{\partial n} U^* \right) ds, \quad (8)$$

здесь символ  $"^*$  означает комплексное сопряжение,  $c$  - скорость волн.

Пусть здесь  $U = U^{\text{inc}}$ ,  $S'$  - отрезок  $0 \leq s \leq \Delta s$  кривой  $S$ , где  $\Delta s$  таково, что угол скольжения соответствующего преломленного луча равен  $\varepsilon_0$  (см. (7)). Часть волнового поля волны  $U^{\text{inc}}$ , соответствующая лучам, падающим на отрезок  $[0, \Delta s] \subset S$  преломляясь дает начало волне шепчущей галереи.

Перейдем теперь к нашим основным предположениям. Мы предположим, что:

1. Поток энергии, распространяющейся вдоль  $S$  от точки  $s = 0$  в сторону  $s < 0$  волны шепчущей галереи, в первом приближении пропорционален

$$\int_0^{\Delta s} \operatorname{Im} \left( U^{\text{inc}*} \frac{\partial U^{\text{inc}}}{\partial n} \right) \Big|_{s=0} ds, \quad (9)$$

причем коэффициент пропорциональности зависит (тоже в первом приближении) от  $\omega$  и значений  $c_1, c_2, \kappa_1, \kappa_2, \rho, P$ , где  $\frac{1}{\rho}$  кривизна

$S, P$  - эффективный радиус кривизны  $P = \left[ \frac{1}{\rho} - \frac{1}{c_2} \frac{\partial c_2}{\partial n} \right]^{-1}$  (см. [?, гл. 6]) в точке  $s = 0, s \in S$ .

Заметим далее, что в силу малости  $\Delta s$  (мы рассматриваем высокочастотную ситуацию) модуль интеграла (9) в первом приближении равен  $|U_0^{\text{inc}}|^2 \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_0 \Delta s$  ( $\alpha_0$  – угол скольжения луча  $M_0 O$  падающей волны  $U^{\text{inc}}$ ) см. Рис. 1. С последней формулой связано предположение:

2. Коэффициент возбуждения волны шепчущей галереи пропорционален в первом приближении

$$U_0^{\text{inc}} \sqrt{\Delta s}, \quad (10)$$

причем коэффициент пропорциональности зависит только от  $\omega$  и значений  $c_1, c_2, \varkappa_1, \varkappa_2, \rho, P$  в точке  $s = 0$ . Заметим, что модуль выражения (10) пропорционален в первом приближении квадратному корню из интеграла (9).

Предположение 2 разумеется необоснованная гипотеза. В её “оправдание” можно привести лишь тот факт, что модуль потока энергии вдоль узкой полоски лучей в первом приближении тоже пропорционален квадрату модуля дифракционного коэффициента.

### §3. ФОРМУЛА ДЛЯ $\Delta s$

Пусть  $\alpha(s)$  – угол скольжения падающей волны.

Обозначим (см. Рис. 4)  $O$  – точку, где  $s = 0$ ,  $O'$  точку, где  $s = \Delta s$ , тогда в первом приближении

$$\Delta \alpha = \alpha(\Delta s) - \alpha_0 = \alpha(\Delta s) - \alpha(0) = \frac{d\alpha}{ds} \Big|_{s=0} \Delta s. \quad (11)$$

Закон Снелиуса в точке  $O'$  даёт

$$\frac{\cos(\alpha_0 + \Delta \alpha)}{\cos \varepsilon_0} = \left( \frac{c_1}{c_2} \right)_{\Delta s}. \quad (12)$$

Учитывая, что  $\Delta \alpha$  и  $\varepsilon_0$  малы (см. (7)), имеем:

$$\frac{\cos(\alpha_0 + \Delta \alpha)}{1 - \frac{\varepsilon_0^2}{2}} \approx \left( \frac{c_1}{c_2} \right)_{s=0} + \left( \frac{d}{ds} \frac{c_1}{c_2} \right)_{s=0} \Delta s \approx \left( 1 + \frac{\varepsilon_0^2}{2} \right) (\cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \Delta \alpha). \quad (13)$$

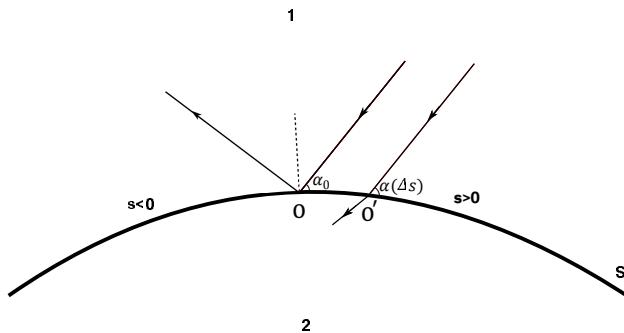


Рис. 4. Лучи волн падающих на границу раздела  $S$  под углами  $\alpha_0$  и  $\alpha(\Delta s)$ .

Учитывая, что в точке  $s = 0$  имеет место закон Снеллиуса  $\cos \alpha_0 = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)_{s=0}$ , получаем с точностью до главных членов:

$$\left( \frac{d}{ds} \frac{c_1}{c_2} \right)_{s=0} \Delta s + \sin \alpha_0 \Delta \alpha = \frac{\varepsilon_0^2}{2} \cos \alpha_0. \quad (14)$$

На равенства (11) и (14) можно смотреть как на систему уравнений для нахождения  $\Delta s$  и  $\Delta \alpha$ , откуда

$$\Delta s = \frac{\frac{\varepsilon_0^2}{2} \cos \alpha_0}{\sin \alpha_0 \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{c_1}{c_2} \right) \Big|_{s=0}}. \quad (15)$$

Если учесть, что  $\varepsilon_0$  и  $\alpha_0$  зависит только от  $\omega$  и значений  $c_1, c_2, \kappa_1, \kappa_2$ ,  $\frac{1}{\rho}$  и  $P$  в точке  $s = 0$ , получим, что коэффициент возбуждения в силу формулы (10) пропорционален

$$U_0^{\text{inc}} \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_0 \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{c_1}{c_2} \right) \Big|_{s=0}}}. \quad (16)$$

Интересно отметить, что подкоренное выражение здесь только множителем  $-1$  отличается от левой части неравенства (5).

#### §4. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ БУЛДЫРЕВА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Вернемся к введению. Если падающая на границу  $S$  волна описывается разложением (3), то естественно предположить, что соприкоснувшись с  $S$  в точке  $O$ , волна частично отразится, частично перейдет в волну шепчущей галереи(см. участок  $QO$  на Рис. 5). К участку  $QO$

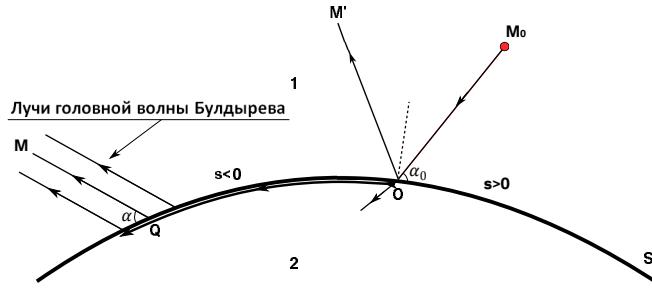


Рис. 5. Лучи головной волны Булдырева порожденные “волной шепчущей галереи”, распространяющейся вблизи границы раздела двух сред.

будет примыкать “волновая бахрома” порожденная множеством волн, угол скольжения которых превосходит  $\varepsilon_0$ (см. формулу (7)). Распространяясь вдоль границы  $S$ , эта волна будет “просачиваться” сквозь  $S$ , что приводит к затуханию волны шепчущей галереи. Эти просачившиеся через  $S$  волны, как естественно ожидать, будут распространяться в среде 1 вдоль “геометро-оптических” лучей, углы соскальзывания которых( $\alpha$  на рис. 5), удовлетворяют условию

$$\cos \alpha = \frac{c_1}{c_2}. \quad (17)$$

Это регулярное поле лучей. Формула 17) соответствует естественному предположению, что волны шепчущей галереи, возникшие в точке  $O$  распространяются со скоростью  $c_2|_S$ . Эти геометро-оптические лучи(см. луч  $QM$  на рис. 5) – это лучи головной волны Булдырева. Исходя из соображений локальности можно написать выражение для

головной волны Булдырева в первом приближении. Фазовый множитель естественно должен быть равен

$$e^{i\omega\tau(M_0,M)}, \quad \tau(M_0,M) = \frac{|M_0O|}{c_1} + \int_Q^O \frac{ds}{c_2(s)} + \frac{|QM|}{c_1}. \quad (18)$$

Далее волна, распространяющаяся вдоль луча  $M_0O$  в точке  $O$  частично отразится (см. отраженный луч  $OM'$  на рис. 5), частично перейдет в среде 2 в волну шепчущей галереи. Естественно ожидать, что интенсивность волны шепчущей галереи будет определяться множителем вида (см. формулы (9) и (16)):

$$\left. \frac{1}{(-i\omega)^3} U_0^{\text{inc}} \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_0 \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{c_1}{c_2}}} \right|_O T(O). \quad (19)$$

Здесь  $T(O)$  определяется значениями  $c_1$ ,  $c_2(O)$ ,  $\rho(O)$ ,  $\varkappa_1(O)$ ,  $\varkappa_2(O)$ ,  $P(O)$ ,  $\omega$  и не зависит от падающей волны. Далее волна распространяется вдоль  $S$  как волна шепчущей галереи (с волновой "бахромой"). В точке  $Q$  берет начало луч головной волны Булдырева. Таким образом мы приходим к искомой формуле для головной волны интерференционного типа:

$$\begin{aligned} W \simeq & e^{i\omega\tau(M_0,M)} \frac{1}{(-i\omega)^\xi} U_0^{\text{inc}} \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha_0 \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{c_1}{c_2}}} \Bigg|_O T(O) \\ & \times e^{-\int_Q^O \beta(s) ds} \sqrt{\frac{J(Q)}{J(M)}} T(Q) G_M(\gamma). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\beta(s)$  зависит от  $\omega$ ,  $\varkappa_1$ ,  $\varkappa_2$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  в точке  $s$ ,  $J$  – геометрическое расхождение лучей головной волны в соответствующей точке,  $T(Q)$  – играет роль дифракционного коэффициента головной волны:

$$\beta(s) = - \int_0^s \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \frac{c_1}{c_2(\tau)} \frac{d\tau}{\sin \alpha(\tau) P(\tau)}, \quad (21)$$

$$T(Q) = \frac{\varkappa_1 c_1}{\varkappa_2 c_2(Q)}. \quad (22)$$

Функция  $G_M(\gamma)$  введена В. С. Булдыревым(см. [1–3]) и описывает волновое поле вблизи фронта рассматриваемой головной волны:

$$G_M(\gamma) = \int_L^{\infty} \left[ \frac{w_1(\xi)}{w_2(\xi)} \right]^M \frac{e^{i\gamma\xi}}{v(\xi)w_2(\xi)} d\xi; \quad \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} - 1 < M \leq \frac{\gamma}{2\sqrt{3}}. \quad (23)$$

Здесь  $L$  прямая  $\left(+\infty \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}}, +\infty \cdot e^{\frac{\pi i}{3}}\right)$ ,  $M$  – целое число,

$$\gamma = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \int_Q^O \frac{ds}{c_2^{1/3}(s)P^{2/3}(s)}. \quad (24)$$

Формулы (20)–(24) выведенные здесь на основании соображений локальности, полностью соответствуют формуле (28) работы [2], полученной В. С. Булдыревым с помощью других(но тоже эвристических) рассуждений. Таким образом, формула В. С. Булдырева и принцип локальности, столь важный для теории коротких волн, полностью согласуются друг с другом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Булдырев, *Исследование функции Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре I*. — Журнал выч. матем. и мат. физики **4** (1964), 275–286.
2. В. С. Булдырев, *Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения*. — ИВУЗ **10**, №. 5 (1967), 699–711.
3. V. M. Babich, *Boundary layer approach to describe an interference head wave*. — Wave motion **46** (2009), 169–173.
4. В. М. Бабич, *Погранслойный подход к описанию головной волны интерференционного типа*. *Математические вопросы теории распространения волн*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **43** (2014), 18–26.
5. J. B. Keller, *Diffracton by an convex cylinder*. — IRE Trans. on Antennas and Prop., AP-4, No. 3 (1956).
6. А. А. Мацковский, *Коротковолновый точечный источник колебаний вблизи неоднородной полуплоскости*. *Математические вопросы теории распространения волн*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2013), 107–20.
7. А. А. Мацковский, *Головная волна интерференционного типа в задаче дифракции волн точечного источника на неоднородной полуплоскости*. — ЖКВМ и МФ.(принято к печати)
8. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. М., Наука, 1972.

Babich V. M., Matskovskiy A. A. An interference head wave (Buldyrev's wave) and localization principle.

In the series of articles V. S. Buldyrev was considering interference head waves. We will call these waves as Buldyrev waves. Our main goal is to obtain formulas describing Buldyrev's wave using localization principle. Similar formulas were deduced (from another but also heuristic considerations) by V. S. Buldyrev earlier. Different point of view on a Buldyrev's wave was proposed by V. M. Babich. Some formulas for the waves of this class contain an illusory contradiction with concept of localization. We demonstrate that the contradiction is fictitious and formulas deduced by V. S. Buldyrev and results obtained later agree with localization principle.

Санкт-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,  
Россия

*E-mail:* [babich@pdmi.ras.ru](mailto:babich@pdmi.ras.ru)

Поступило 12 октября 2015 г.

Санкт-Петербургский  
государственный университет,  
Университетская наб. д.7-9, 199034 С.-Петербург,  
Россия

*E-mail:* [androbasrm@rambler.ru](mailto:androbasrm@rambler.ru)