Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

В. М. Бабич

ВОЛНА РЕЛЕЯ, ИМЕЮЩАЯ ХАРАКТЕР ВОЛНОВОГО ВАЛА

В работе рассматриваются волны Релея, сосредоточенные в окрестности некоторой кривой, двигающейся с релеевской скоростью. Соответствующие решения уравнений эластодинамики нам представляется разумным называть “волнами Релея, имеющими характер волнового вала”. “Волновые валы” строились и раньше [1–3], но методика этих работ непосредственно на волны Релея не переносится.

§1. Исходные (известные, см., например, [4]) формулы

Пусть S (гладкая) поверхность упругого тела, q^1, q^2 – регулярная система координат на S, n – расстояние от точки упругого тела до S. Возьмем n в качестве третьей коориначы. Вблизи от поверхности S, т.е, при малых n система координат q^1, q^2, n регулярна. Положим $n = q^3$. Пусть

$$G_{ij} dq^i dq^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

– квадрат элемента длины в системе координат $q^1, q^2, q^3 (= n)$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} &G_{13} = G_{31} = G_{13} = G_{31} = 0, \quad G_{33} = 1, \\ &G_{ij} = g_{ij}(q^1, q^2) - 2n b_{ij}(q^1, q^2) + O(n^2) \\ &(i, j = 1, 2, n \to 0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь g_{ij} и b_{ij} соответственно коэффициенты первой и второй квадратичных форм Гаусса.

Ковариантные компоненты вектора смещений мы будем обозначать $\varphi_r (= \varphi_r(q^1, q^2, q^3, t))$ $(r = 1, 2, 3)$ Тензор деформаций тогда можно записать в виде

$$\varepsilon_{kl} = -\Gamma^r_{kl} \varphi_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q^l} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial q^k} \right). \tag{1.3}$$

Ключевые слова: пространственно-временной лучевой метод, волны Релея, формальные степенные ряды, анизотропная упругая среда.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 14-01-00535А и частично гранта НШ-1771.2014.1.

Здесь $\Gamma^r_{kl}(q^1,q^2,q^3)$ – символ Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma^r_{kl} = \frac{1}{2}G^{ra}\left(\frac{\partial G_{ka}}{\partial q^l} + \frac{\partial G_{al}}{\partial q^k} - \frac{\partial G_{kl}}{\partial q^a}\right); \quad (G^{ra}) = (G_{ra})^{-1}. \tag{1.4}$$

Пусть $C^{ijkl}(q^1,q^2,q^3)$ $(\in C^\infty)$ контравариантные компоненты тензора упругих модулей. Для тензора (σ^{ij}) напряжений имеет место формула:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}. \tag{1.5}$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$C^{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl} \geqslant \mathrm{const}\sum_{i,j=1}^{3}\eta_{ij}^2; \quad \eta_{ij} = \eta_{ji}, \quad \mathrm{const} > 0 \tag{1.6}$$

для любых вещественных η_{ij} и фиксированных q^1,q^2,q^3, а также соотношения

$$C^{ijkl} = C^{klij} = C^{jikl} = C^{ijlk}; \quad i,j,k,l = 1,2,3. \tag{1.7}$$

Уравнение движения упругой среды можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\left(-\rho G^{i\alpha}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} + \Gamma^\alpha_{ij}\sigma^{ij}\right)\sqrt{G} + \frac{\partial}{\partial q^i}(\sigma^{\alpha j}\sqrt{G}) = 0,\\ &G = \det(G_{ij}). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Мы будем требовать отсутствия напряжений на поверхности S упругого тела:

$$\begin{aligned} \sigma^{i3}\big|_{n=0} &= C^{i3kl}\varepsilon_{kl}\big|_{n=0}\\ &= C^{i3kl}\left(-\Gamma^r_{kl}\varphi_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial q^l} + \frac{\partial\varphi_l}{\partial q^k}\right)\right)\Big|_{n=0} = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Под пространственно-временным геометро-оптическим разложением волны Релея мы подразумеваем ряд вида

$$\varphi_l \simeq e^{ip\theta(q^1,q^2,t)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Phi_{sl}(q^1,q^2,t,\nu)}{(ip)^s}, \quad \nu = pn, \quad 0 \leqslant \nu < +\infty, \tag{1.10}$$

который формально удовлетворяет уравнениям (1.8), краевым условиям (1.9) и требованию

$$\Phi_{sl} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0. \tag{1.11}$$

Здесь p – большой параметр задачи см. [5]. (О смысле параметра p в подобных построениях см. [6, глава 1, §1].)

Если ряд (1.10) подставить в уравнение (1.8) и краевые условия (1.9) и приравнять выражение при последовательных степенях $\frac{1}{p}$ к нулю, то мы придем к рекуррентной системе уравнений и краевых условий (см. [5]). Выпишем первое уравнение

$$(N_0\mathbf{\Phi}_0)^\alpha = -\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t^2\Phi_{oi} + C^{\alpha jkl}(Q_jQ_l\Phi_{ok})\sqrt{G} = 0 \tag{1.12}$$

$$Q_j = \begin{cases} \theta_j & j = 1,2 \\ -i\frac{\partial}{\partial\nu} & j = 3 \end{cases} \qquad \theta_j = \frac{\partial\theta}{\partial q^j} \tag{1.13}$$

и соответствующие краевые условия

$$C^{i3kl}Q_l\Phi_{0k}\big|_{\nu=0} = 0, \quad \Phi_{0i} \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.14}$$

В равенствах (1.12) и (1.14) ρ, $\sqrt{G}$, $G^{i\alpha}$, $C^{\alpha jkl}$ взяты при $n = 0$, т.е. на поверхности S. Приравнивая нулю члены при p в первой степени, придем к векторному уравнению

$$N_0\mathbf{\Phi}_1 + N_1\mathbf{\Phi}_0 = 0, \tag{1.15}$$

где оператор N_0 определен формулой (1.12), а

$$\begin{aligned}(N_1(\mathbf{\Phi}))^\alpha = {}& -2\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} - \rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_{tt}\Phi_i \\ & - i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho\sqrt{G}G^{i\alpha})\Phi_i \\ & + C^{ijkl}\sqrt{G}Q_k\Phi_l\Gamma_{ij}^\alpha - C^{\alpha jkl}\sqrt{G}Q_j\Phi_r\Gamma_{kl}^r \\ & + Q_k\Phi_l\frac{\partial}{\partial q^j}(C^{\alpha jkl}\sqrt{G}) \\ & + i\frac{\partial}{\partial n}(C^{\alpha jkl}\sqrt{G})\nu Q_jQ_k\Phi_l + C^{\alpha jk'l}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial\Phi_l}{\partial q^{k'}} \\ & + C^{\alpha j'kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial\Phi_l}{\partial q^{j'}} + \frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}C^{\alpha j'k'l}\Phi_l, \\ & j',k' = 1,2, \quad i,j,k,l,r = 1,2,3.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Соответствующие краевые условия имеют вид:

$$C^{\alpha 3kl}(Q_l\Phi_{1k} - \Gamma_{kl}^r\Phi_{0r})|_{n=0} + C^{\alpha 3kl'}\frac{\partial\Phi_{0k}}{\partial q^{l'}}\bigg|_{n=0} = 0,$$

$$\Phi_{1k} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.17}$$

Последующие уравнения мы не выписываем, интересуясь построением выражения для φ_l лишь в первом приближении.

§2. О краевой задаче для $\Phi_{0\alpha}$

При вещественных θ_j и фиксированных q^j краевая задача (1.12)–(1.14) – самосопряженная краевая одномерная задача о нахождении собственного вектора $\mathbf{\Phi}_0$ с компонентами $\Phi_{0\alpha}$ $\alpha = 1, 2, 3$ как функции ν $(0 \leqslant \nu < +\infty)$. Роль собственного числа играет θ_t^2. При $|\theta_1| + |\theta_2| > 0$ для θ_t^2 получаются положительные значения. Полагая в соответствии с традицией $-\theta_t > 0$, придем к уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\theta_t + H(q^1, q^2, \theta_1, \theta_2) = 0, \tag{2.1}$$

где $H > 0$ при ненулевых θ_1, θ_2. Мы предполагаем, что в рассматриваемой области изменения $q^1, q^2, \theta_1, \theta_2$ функция Гамильтона H гладкая, как функция этих переменных и что θ_t^2 однократное собственное значение краевой задачи (1.12)–(1.14). (Предполагается, что $q^1, q^2, \theta_1, \theta_2$ фиксированы и (1.12)–(1.14) – векторная краевая задача на полуоси $0 \leqslant \nu < +\infty$).

Пусть $\mathbf{\Phi}_{00} = \{\Phi_{00\alpha}(q^1, q^2, \theta^1, \theta_2, \nu); \alpha = 1, 2, 3\}$ фиксированный собственный вектор. Мы предполагаем, что $\Phi_{00\alpha}$ – гладкая функция своих аргументов в рассматриваемой области их изменения. Любая собственная вектор-функция $\{\Phi_{0\alpha}; \alpha = 1, 2, 3\}$ задачи (1.12)–(1.14) пропорциональна $\Phi_{00\alpha}$: $\Phi_{0\alpha} = \chi_0 \Phi_{00\alpha}$, где χ_0 – скалярный множитель, не зависящий от ν.

Пусть l – гладкая кривая $q^j = q^j(\sigma)$, $l \subset S$ и на l заданы $\theta = \theta(\sigma)$, $\theta_j = \theta_j(\sigma)$ $j = 1, 2$. Пусть θ и θ_j – гладкие функции от σ и выполнено условие согласования

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \theta_1 \frac{dq^1}{d\sigma} + \theta_2 \frac{dq^2}{d\sigma}. \tag{2.2}$$

Из каждой точки кривой l выпустим кривую – характеристику уравнения (2.1), т.е. кривую, удовлетворяющую каноническим уравнениям

$$\frac{dq^j}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \theta_j}, \quad \frac{d\theta_j}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}, \quad \frac{dt}{ds} = 1 \tag{2.3}$$

и начальным условиям:

$$t|_{s=0} = 0, \; q^j\big|_{s=0} = q^j(\sigma), \; \theta_j\big|_{s=0} = \theta_j(\sigma), \; j = 1, 2, \; \operatorname{Im} \theta_j = 0. \tag{2.4}$$

Пусть на l определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial\theta_1}, & \frac{\partial H}{\partial\theta_2} \\ \frac{dq^1}{d\sigma}, & \frac{dq^2}{d\sigma} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.5}$$

Это неравенство обеспечивает (по крайней мере, вблизи фиксированной точки на l) гладкость в пространстве–времени $S \times [0 \leqslant t < +\infty)$ поверхности (Σ), заданной равенствами:

$$t = s, \quad q^j = q^j(\sigma, s), \quad j = 1, 2. \tag{2.6}$$

Неравенство (2.5) позволяет (вблизи фиксированной точки кривой l) ввести новые координаты σ, s на S. Все дальнейшие построения мы будем проводить в этой системе координат. Чтобы не усложнять обозначения, сохраним для этой новой координатной системы обозначения q^1, q^2. Точки кривой l в этой системе координат – это точки $(q^1, 0)$. (См. [7], где вводилась такая же координатная система), точки поверхности Σ – это t, q^1, t. Если

$$\theta|_{t=0}, \quad \theta_j|_{t=0} \quad j = 1, 2, \quad \Phi_{0\alpha}|_{t=0} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

заданы на l, то $\Phi_{0\alpha}$ можно найти в каждой точке поверхности Σ. В самом деле, начальные данные $\theta|_{t=0}$, $\theta_j|_{t=0}$ однозначно определят $\theta_j = \frac{\partial\theta}{\partial q^j}$ на Σ и, следовательно, $\Phi_{00\alpha}(q^1, q^2, \theta_1, \theta_2)$. Остается найти χ_0, ибо $\Phi_{0\alpha} = \chi_0\Phi_{00\alpha}$.

Как находить χ_0, а также векторы Φ_1, $\Phi_2 \dots$ в случае вещественного $\theta(t, q^1, q^2)$ описано в работе [5]. Волны, имеющие характер волнового вала, соответствуют комплексным эйконалам, что вносит существенные осложнения. Перейдем к построению аналитического выражения для волнового поля в этом случае.

§3. Анзац

Мы будем предполагать, что θ и $\Phi_{0\alpha}, \Phi_{1\alpha}, \dots$ – формальные степенные ряды (ф.с.р.) по $q^2 - t$:

$$\theta \simeq \theta^0(q^1, t) + \theta^1(q^1, t)\frac{(q^2 - t)}{1!} + \theta^2(q^1, t)\frac{(q^2 - t)^2}{2!} + \dots \tag{3.1}$$

$$\Phi_{r\alpha} \simeq \Phi^0_{r\alpha}(q^1, t, \nu) + \Phi^1_{r\alpha}(q^1, t, \nu)\frac{q^2 - t}{1!} + \dots . \tag{3.2}$$

При $t = 0$ все коэффициенты разложений (3.1), (3.2) предполагаются заданными, причем мы предполагаем, что $\theta^2(q^1, t)$ при $t = 0$ имеет положительную мнимую часть. Задаче нахождения $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \ldots$ посвящена работа [7]. Ряды (3.1), (3.2) имеют вид рядов Тейлора, а их коэффициенты – соответствующих производных от θ и $\Phi_{r\alpha}$ по q^2 при $q^2 = t$. Так их мы и будем обозначать.

Наша цель – найти формальные решения уравнений (1.12), (1.13), (1.16), удовлетворяющие (тоже, разумеется, формально) краевым условиям (1.11), (1.14), (1.17).

Приближенные выражения для φ_l мы получим, если заменим ряд (1.10) частной суммой и ряды (3.1)–(3.2) тоже заменим суммами нескольких первых слагаемых. Полученные выражения можно рассматривать как приближенное выражение для поверхностей волны, если сделать адекватные предположения о малости $q^2 - t$. Положив $q^2 - t = \frac{\mathrm{const}}{p\beta}$, $\beta > 0$, мы придем к разложениям, имеющим асимптотический характер с малым параметром $\frac{1}{p}$. Если $q^2 - t$ мало, то это означает, что рассмотрения ведутся в малой окрестности поверхности Σ, см.(2.6) или (что то же) вблизи движущейся вдоль S кривой $(q^1, q^2 = t)$. Из малости $q^2 - t$, $\frac{1}{p}$ и положительности $\mathrm{Im}\, \frac{\partial^2\theta}{(\partial q^2)^2}$ при $q^2 = t$ следует, что вне малой окрестности Σ приближенные выражения для φ_r экспоненциально малы.

§4. О нахождении $\Phi^j_{r\alpha}(q^1, t, \nu)$, $\alpha = 1, 2, 3$; $r, j = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Чтобы найти $\Phi_{00\alpha}$, т.е. коэффициенты $\Phi^0_{00\alpha}$, $\Phi^1_{00\alpha}, \ldots$ степенного ряда

$$\Phi_{00\alpha} = \Phi^0_{00\alpha} + (q^2 - t)\Phi^1_{00\alpha} + \ldots, \tag{4.1}$$

следует воспользоваться тем, что $\Phi_{00\alpha}$ – гладкая функция $q^1, q^2, \theta_1, \theta_2$ (см. раздел 2) подставить (формально) разложение для $\frac{\partial\theta}{\partial q^j}$ $j = 1, 2$ (см. формулу (3.1)) вместо θ_j и переразложить полученное выражение по степеням $q^2 - t$. На этом пути в принципе находятся все "производные" от $\Phi_{00\alpha}$ по q^2 при $q^2 = t$. Для нахождения разложения $\Phi_{0\alpha}$ по степеням $q^2 - t$ остается найти разложение χ_0 в "ряд Тейлора" по степеням $q^2 - t$ и перемножить формальные степенные ряды, которым являются $\Phi_{00\alpha}$ и χ_0. Для нахождения χ_0 в работе [5], где χ_0 не ф.с.р., а "настоящая" гладкая функция, использовалось условие разрешимости краевой задачи (1.15)–(1.17). Это условие разршимости имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^{+\infty} \Bigg[\Bigg(- 2\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\frac{\partial\Phi_{0i}}{\partial t} - \rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_{tt}\Phi_{0i} \\
&- i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho\sqrt{G}G^{i\alpha})\Phi_{0i}\Bigg)\overline{\Phi}_{00\alpha} \\
&+ C^{\alpha jkl}\sqrt{G}Q_k\Phi_{0l}\Gamma^{\alpha}_{ij}\overline{\Phi}_{00\alpha} - C^{\alpha jkl}\sqrt{G}\Phi_{0r}\Gamma^{r}_{kl}\overline{Q_j\Phi_{00\alpha}} \\
&+ Q_k\Phi_{0l}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(C^{\alpha j'kl}\sqrt{G})\overline{\Phi}_{00\alpha} \\
&+ i\frac{\partial}{\partial n}(C^{\alpha jkl}\sqrt{G})\nu Q_k\Phi_{0l}\overline{Q_j\Phi_{00\alpha}} \\
&+ C^{\alpha jk'l}\sqrt{G}\frac{\partial\Phi_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j\Phi_{00\alpha}} + C^{\alpha j'kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial\Phi_{0l}}{\partial q^{j'}}\overline{\Phi}_{00\alpha} \\
&+ \frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}C^{\alpha j'k'l}\Phi_{0l}\overline{\Phi}_{00\alpha}\Bigg]\,d\nu = 0, \\
&j',k' = 1,2, \quad \alpha,i,j,k,l,r = 1,2,3,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

где

$$
\Phi_{0\alpha} = \chi_0\Phi_{00\alpha}, \;\; \chi_0 = \chi_0(q^1,q^2,t), \;\; \Phi_{00\alpha} = \Phi_{00\alpha}(q^1,q^2,t). \tag{4.3}
$$

Равенство (4.2), если учесть (4.3), является линейным уравнением в частных производных для нахождения

$$
\chi_0 = \chi_{00}(t,q',t) + \chi_{01}(t,q^1,t)(q^2 - t) + \dots .
$$

При нахождении χ_0, когда χ_0 ф.с.р. мы тоже воспользуемся равенством (4.2), подставляя в него ф.с.р., которыми являются $\Phi_{00\alpha}$ и χ_0. Для нахождения χ_{00} положим в (4.2) $q^2 = t$. Полученное соотношение имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\infty}\Big(- 2\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\Phi_{00i}\overline{\Phi}_{00\alpha}\Big)d\nu\frac{\partial\chi_{00}}{\partial t} \\
&\quad + C^{\alpha jk'l}\sqrt{G}\int\limits_0^{\infty}\Phi_{00l}\,\overline{Q_j\Phi_{00\alpha}}\,d\nu\frac{\partial\chi_{00}}{\partial q^{k'}} \\
&\quad + C^{\alpha j'kl}\sqrt{G}\int\limits_0^{\infty}(Q_k\Phi_{00l})\overline{\Phi}_{00\alpha}d\nu\frac{\partial\chi_{00}}{\partial q^{j'}} + \Xi\chi_{00} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где Ξ не зависит от χ_{00}, а операторы Q_j даются формулой (1.13). Равенство (4.4) – это линейное соотношение, связывающее $\frac{\partial \chi_{00}}{\partial t}$, $\frac{\partial \chi_{00}}{\partial q^{j'}}$ $(j' = 1, 2)$ и χ_{00}. Уравнение (4.4), как и в работе [5], записывается в виде

$$\frac{\partial \chi_{00}}{\partial s} + \mathcal{K}\chi_{00} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} + v^{j'}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}; \quad v^{j'} = \frac{\partial H}{\partial \theta_{j'}}, \tag{4.5}$$

где

$$\mathcal{K} = \Xi \cdot [-2\rho\theta_t\sqrt{G}G^{i\alpha}\int\limits_0^\infty \Phi_{00i}\overline{\Phi}_{0\alpha}d\nu]^{-1}. \tag{4.6}$$

Для нахождения χ_{01}, $\chi_{02}, \ldots$ формулу (4.2) следует "дифференцировать" – т.е. находить коэффициенты при $\frac{(q^2-t)^j}{j!}$ $j = 1, 2, \ldots$. Мы получим уравнения вида

$$\frac{\partial \chi_{0j}}{\partial s} + \mathcal{K}\chi_{0j} = \Upsilon_j, \tag{4.7}$$

где Υ_j выражаются через $\chi_{0j'}$, $j' < j$. Начальные данные для уравнений (4.5), (4.7) находятся однозначно, если заданы коэффициенты разложения ф.с.р. $\Phi_{0\alpha}\big|_{t=0}$ по степеням q^2. Найдя χ_{0j}, на том же пути можно последовательно находить коэффициенты разложения ф.с.р. $\Phi_{1\alpha}$, $\Phi_{2\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$.

§5. Фаза Берри

Если считать разложение θ в ф.с.р. известным, то для нахождения выражения для φ_r $r = 1, 2, 3$ в первом приближении надо найти выражение для $\chi_0\big|_{q^2=t} = \chi_0(q^1, q^2, t)\big|_{q^2=t}$. Считая, что $q^2 = t$, обратимся к равенству (4.2). Надо иметь в виду, что "производные" выше первой степени от θ и "производные" начиная с первой от $\Phi_{00\alpha}$ – комплексны. Равенство (4.2) – это линейное уравнение первого порядка для $\chi_0\big|_{q^2=t} = \chi_{00}$. Это уравнение удается упростить. Будем искать χ_{00} в виде

$$\chi_{00} = \psi e^{iV}. \tag{5.1}$$

Потребуем, чтобы V удовлетворяло уравнению:

$$\int\limits_0^{+\infty}\Big[-2i\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\frac{\partial V}{\partial t}\Phi_{00i}\overline{\Phi}_{00\alpha} - i\nu\theta_t^2\Phi_{00i}\overline{\Phi}_{00\alpha}\frac{\partial}{\partial n}(\rho\sqrt{G}G^{i\alpha})$$
$$+ C^{\alpha jkl}\sqrt{G}\Gamma^r_{kl}\overline{\Phi}_{00r}Q_j\Phi_{00\alpha} - C^{\alpha jkl}\sqrt{G}\Gamma^r_{kl}\Phi_{00r}\overline{Q_j\Gamma_{00\alpha}}$$

$$
\begin{aligned}
&+ i\frac{\partial}{\partial n}\big(C^{\alpha jkl}\sqrt{G}\big)\nu Q_k\Phi_{00l}\overline{Q_j\Phi_{00\alpha}}\\
&+ iC^{\alpha jk'l}\sqrt{G}\,\frac{\partial V}{\partial q^{k'}}\Phi_{00l}\overline{Q_j\Phi_{00\alpha}}\\
&+ iC^{\alpha j'kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial V}{\partial q^{j'}}\Phi_{00l}\overline{\Phi}_{00\alpha}\Bigg]\,d\nu
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

и начальному условию

$$
V\big|_{t=0} = 0. \tag{5.3}
$$

Используя обозначения работы [5], получим:

$$
\begin{aligned}
V = \int\limits_0^s \Big[\beta_1\frac{\partial}{\partial n}\ln\sqrt{G} + \beta_{i\alpha}\big(\frac{\partial}{\partial n}G^{i\alpha}\big) + \beta_\alpha^{ij}\Gamma_{ij}^\alpha\\
+ \beta_2\frac{\partial\rho}{\partial n} + \beta_{ijkl}\big(\frac{\partial}{\partial n}C^{ijkl}\big)\Big]\,ds,
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

где

$$
\beta_1 = \gamma\Bigg(-\int\limits_0^{+\infty}\rho G^{i\alpha}\theta_t^2\nu\Phi_{00i}\overline{\Phi}_{00\alpha}d\nu + C^{\alpha jkl}\int\limits_0^{+\infty}\nu Q_\alpha\Phi_{00j}\overline{Q_k\Phi_{00l}d\nu}\Bigg),
\tag{5.5}
$$

$$
\beta_{i\alpha} = \gamma\int\limits_0^{+\infty}\rho\theta_t^2\nu\Phi_{00i}\overline{\Phi}_{00\alpha}d\nu, \tag{5.6}
$$

$$
\beta_\alpha^{ij} = 2\gamma C^{ijkl}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{Im}(\Phi_{00\alpha}\overline{Q_k\Phi_{00l}})d\nu, \tag{5.7}
$$

$$
\beta_2 = \gamma\int\limits_0^{+\infty}G^{i\alpha}\theta_t^2\nu\Phi_{00i}\overline{\Phi}_{00\alpha}d\nu, \tag{5.8}
$$

$$
\beta_{\alpha jkl} = \gamma\int\limits_0^{+\infty}\nu Q_\alpha\Phi_{00j}\overline{Q_k\Phi_{00l}}d\nu, \tag{5.9}
$$

$$
\gamma = \Bigg[-2\theta_t\rho G^{i\alpha}\int\limits_0^{+\infty}\Phi_{00i}(M,\nu)\Phi_{00\alpha}(M,\nu)d\nu\Bigg]^{-1}. \tag{5.10}
$$

Здесь M – точка на поверхности Σ с координатами q^1, $q^2(=t), t$. Функции ρ, $G^{i\alpha}$, $\frac{\partial\rho}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial n}C^{ijkl}$, $\sqrt{G}$ – это функции, заданные на поверхности упругого тела, т.е. при координате $q^3 = n = 0$.

Функция V – это фаза Берри для нашей задачи. Уравнение для ψ довольно громоздкое, но оно все же проще уравнения для χ_0. Если это уравнение умножить на ψ, то мы придем к равенству:

$$\int_0^\infty \big[-2\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\psi\overline{\Phi}_{00\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\psi\Phi_{00i}) - \rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_{tt}\psi^2\Phi_{00\alpha}$$
$$+ \psi^2 Q_k\Phi_{00l}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(C^{\alpha j'kl}\sqrt{G})\overline{\Phi}_{00\alpha} + \big(C^{\alpha jk'l}\sqrt{G}\overline{Q_j\Phi_{00\alpha}}\frac{\partial}{\partial q^{k'}}(\psi\Phi_{00l})$$
$$+ C^{\alpha j'kl}\sqrt{G}\overline{\Phi}_{00\alpha}Q_k\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(\psi\Phi_{00l})\big)\psi + \psi^2\frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}$$
$$\times\sqrt{G}C^{\alpha j'k'l}\Phi_{00l}\overline{\Phi}_{00\alpha}\big]d\nu = 0. \tag{5.11}$$

§6. Нахождение дивергентной части в уравнении (5.11)

Нам потребуется выделить из левой части равенства (5.11) дивергентную часть. Сделаем некоторые замечания. Напомним, что уравнение (5.11) рассматривается когда точка q^1, q^2, t лежит на поверхности Σ и в этой точке заданы вещественные θ_1, θ_2, определяемые из канонической системы уравнений.

При вещественных θ_1 и θ_2

$$\Phi_{00\alpha} = \Phi^R_{00\alpha} = \Phi^R_{00\alpha}(q', q^2, \theta_1, \theta_2) + i\Phi^J_{00\alpha}(q', q^2, \theta_1, \theta_2), \tag{6.1}$$

где $\Phi^R_{00\alpha}$ и $\Phi^J_{00\alpha}$ – гладкие вещественные функции своих вещественных аргументов. Формула (5.11) содержит производные от $\Phi_{00\alpha}$. При их вычислении мы дифференцируем $\Phi^R_{00\alpha}$ и $\Phi^J_{00\alpha}$ как сложную функцию (θ_1 и θ_2 – ф.с.р., по степеням $q^2 - t$). В силу того, что “производные” от θ выше первой на поверхности Σ комплексны, то и “производные” от $\Phi^R_{00\alpha}$ и $\Phi^J_{00\alpha}$ на Σ комплексны, в то время как $\Phi^R_{00\alpha}$ и $\Phi^J_{00\alpha}$ на Σ – вещественны. Введем обозначение

$$\check{\Phi}_{00\alpha} := \Phi^R_{00\alpha}(q^1, q^2, \theta_1, \theta_2) - i\Phi^J_{00\alpha}(q^1, q^2, \theta_1, \theta_2). \tag{6.2}$$

Сначала преобразуем члены формулы (5.11), содержащие θ_t и θ_{tt}:

$$\begin{aligned}
&-2\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\frac{\partial}{\partial t}(\psi\Phi_{00i})\cdot\psi\check{\Phi}_{00\alpha}-\rho\psi^2\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_{tt}\Phi_{00i}\check{\Phi}_{00\alpha}\\
&\quad=-\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\frac{\partial\psi^2}{\partial t}\Phi_{00i}\check{\Phi}_{00\alpha}-2\rho\psi^2\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\frac{\partial\Phi_{00i}}{\partial t}\check{\Phi}_{00\alpha}\\
&\qquad-\rho\psi^2\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_{tt}\Phi_{00i}\overline{\Phi}_{00\alpha}\\
&\qquad=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi^2\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\Phi_{00i}\check{\Phi}_{00\alpha})+\psi^2A, \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

где

$$A:=-\rho\sqrt{G}G^{i\alpha}\theta_t\left(\frac{\partial\Phi_{00i}}{\partial t}\check{\Phi}_{00\alpha}-\Phi_{00i}\frac{\partial\check{\Phi}_{00\alpha}}{\partial t}\right). \qquad (6.4)$$

По близкой (и более громоздкой) схеме преобразуются члены формулы (5.11), содержащие тензор $C^{\alpha jkl}$.

Пользуясь обозначением (6.2), их можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\psi^2Q_k\Phi_{00l}\big(\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(C^{\alpha j'kl}\sqrt{G})\big)\check{\Phi}_{00\alpha}+C^{\alpha jk'l}\sqrt{G}\psi\big(\frac{\partial}{\partial q^{k'}}\psi\Phi_{00l}\big)Q_j^*\check{\Phi}_{00\alpha}\\
&\quad+\psi C^{\alpha j'kl}\sqrt{G}\big(Q_k\big(\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(\psi\Phi_{00l})\big)\check{\Phi}_{00\alpha}\\
&\quad+\psi^2\frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}C^{\alpha j'k'l}\Phi_{00l}\check{\Phi}_{00\alpha}. \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

Здесь

$$Q_k=\begin{cases}\theta_j & j=1,2\\ -i\frac{\partial}{\partial\nu} & j=3,\end{cases}\qquad Q_k^*=\begin{cases}\theta_j & j=1,2\\ i\frac{\partial}{\partial\nu} & j=3.\end{cases} \qquad (6.6)$$

Вычтем из (6.3) выражение

$$\frac{\partial}{\partial q^{j'}}\left[C^{\alpha j'kl}\sqrt{G}\cdot\psi^2\frac{(Q_k\Phi_{00l})\check{\Phi}_{00\alpha}+\Phi_{00\alpha}Q_k^*\check{\Phi}_{00l}}{2}\right] \qquad (6.7)$$

и прибавим его. Преобразуем разность, учитывая, что на Σ θ_j вещественны, а $\check{\Phi}_{00\alpha}=\overline{\Phi}_{00\alpha}$. После ряда сокращений этой разности можно придать вид:

$$\begin{aligned}
B:=\frac{1}{2}C^{\alpha j'kl}\sqrt{G}\Big[&\frac{\partial\Phi_{00\alpha}}{\partial q^{j'}}\overline{Q_k\Phi_{00l}}-\frac{\partial\check{\Phi}_{00\alpha}}{\partial q^{j'}}Q_k\Phi_{00l}\\
&+\left(\left(Q_k\frac{\partial\Phi_{00l}}{\partial q^{j'}}\right)\overline{\Phi}_{00\alpha}-\Phi_{00\alpha}\left(Q_k^*\frac{\partial\check{\Phi}_{00l}}{\partial q^{j'}}\right)\right)\Big]. \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Если бы производные от θ выше первого порядка были бы вещественны (как в работе [5]), тогда выражение в квадратных скобках было бы чисто мнимым. В нашем случае это не так и вещественная часть выражения (6.8) вообще говоря отлична от нуля.

Подведем итоги. Итак, чтобы найти в первом приближении искомый вектор надо определить χ на Σ. Пусть точка $(q^1, q^2, t) \in \Sigma$, т.е. $q^2 = t$. Полагая $\chi = \psi e^{iV}$ (см. (5.1)), мы пришли к выражению (5.4) для V. Левая часть уравнения для ψ^2 имеет вид суммы "дивергентной" части и "недивергентного" слагаемого:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\rho\psi^2 G^{i\alpha} Q_t \Phi_{00i}\check{\Phi}_{00\alpha}) + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}\left[C^{\alpha j' kl}\cdot\frac{1}{2}\left(\check{\Phi}_{00\alpha}Q_k\Phi_{00l} + \Phi_{00\alpha}Q_k^*\check{\Phi}_{00l}\right)\right] + \psi^2(A+B) = 0. \quad (6.9)$$

Выражения для A и B даются формулами (6.4) и (6.8).

§7. Формула для волнового поля в первом приближении

Для вывода формулы для ψ^2 в первом приближении удобно иметь дело не с "малой" переменной $q^2 - t$, а с другой переменной, о которой речь пойдет ниже. Вернемся для этого к задаче нахождения θ в виде ф.с.р. Кроме подхода, о котором шла речь в начале раздела 3, возможен подход, основанный на решении (в виде ф.с.р.) канонической системы уравнений (2.3). Будем решать эту систему, считая, что при $s = 0$

$$q^1 = a^1,\ q^2 = 0,\ \theta = \theta^0(a^1),\ \theta_1 = \frac{\partial\theta^0(a^1)}{\partial a^1},\ \theta_2 = \theta^1(a^1), \quad (7.1)$$

т.е. в соответствии с равенством (3.1). Решая задачу Коши для системы (2.3) с начальными условиями (7.1) для q^1, q^2, θ_1, θ_2, мы придем к поверхности Σ. Далее будем искать q^1, q^2, θ_1, θ_2 в виде ф.с.р. по степеням "малой" переменной a^2. Для "производных"

$$\frac{\partial^r q^i}{(\partial a^2)^r}\Big|_{a^2=0}, \quad \frac{\partial^r \theta_i}{(\partial a^2)^r}\Big|_{a^2=0}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

а точнее для коэффициентов ф.с.р. в которые "разлагаются" q^i и θ_i, на каждом шаге приходится решать систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти "производные" от q^i, θ_i по

a^2 при $a^2 = 0$ вообще говоря комплексны, потому, что по условию $\operatorname{Im}\theta^2(q^1, t) > 0$ при $t = 0$ (см. раздел 3).

Центральный момент в построениях – это возможность перейти в уравнении (6.9) к переменным s, a^1, a^2. Рассуждая стандартно (см., например, [6, глава 1]), придем к соотношению, выполняющемуся при $a^2 = 0$ (т.е. на Σ):

$$\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{J\psi^2}{2\gamma}\right) + \psi^2(A+B) = 0, \quad J = \frac{\mathcal{D}(q^1, q^2)}{\mathcal{D}(a^1, a^2)}. \tag{7.2}$$

Выражение для γ дает формула (5.10).

Равенство (7.2) – это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно ψ^2. Его решение не представляет трудностей.

Из (7.2) следует, что

$$\psi(s, a^1, a^2)\Big|_{a^2=0} = \psi(s, a^1, a^2)\Big|_{\substack{a^2=0\\ s=0}} \sqrt{\frac{(J\gamma)_{s=0}}{J\gamma}}\; e^{-\int\limits_0^s \cdot\gamma(A+B)\,ds}. \tag{7.3}$$

Литература

1. В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* Наука, М., 1970.
2. В. М. Бабич, *Формальные степенные ряды и их приложения в математической теории дифракции.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 5–16.
3. А. И. Попов, *Волновые валы на поверхности тяжелой жидкости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 151–177.
4. В. М. Бабич, А. П. Киселёв, *Упругие волны – высокочастотная теория.* С.Петербург, БХВ Петербург, 2014.
5. V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, *A new approach to the Rayleigh wave propagation of elastic surface waves.* Wave Motion **46**, No. 3 (2004), 2009–2024.
6. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод.* Изд–во ЛГУ, Л. (1985).
7. В. М. Бабич, А. И. Попов, *Асимптотическое решение уравнения Гамильтона–Якоби, сосредоточенное вблизи поверхности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 23–28.

Babich V. M. Rayleigh waves concentrated in a small neighborhood of a moving curve.[1]

An analytical expression for a Rayileigh wave concentrated in a small neighborhood of a moving curve is deduced. The cuses of nongomogeneous and anisotropic media are considered.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 6 ноября 2015 г.

[1]Термина “волновой вал” вряд ли существует в английском языке. Английский вариант заглавия соответствует смыслу работы.