Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 437, 2015 г.

П. П. Никитин

ЭРГОДИЧЕСКИЕ $O(\infty)$- И $\mathrm{Sp}(\infty)$-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ БЕСКОНЕЧНЫХ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ И АНТИЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ

Введение

В работе [6] (см. также [12]) А. М. Вершик и Г. И. Ольшанский получили эргодическую теорему для индуктивных пределов компактных групп. Эта теорема позволяет приближать эргодические меры для действия таких групп последовательностью орбитальных мер для действия исходных компактных групп (см. точную формулировку ниже, в теореме 1). Затем она была применена для классификации инвариантных эргодических мер для действия бесконечной унитарной группы $U(\infty) := \varinjlim U(n)$ сопряжениями на пространстве бесконечных эрмитовых матриц $H = \varprojlim H(n)$. Эта классификация была изначально получена Д. Пикреллом [8, 9] (отметим также работы М. Рабави [10, 11], в которых метод Вершика–Ольшанского применен для действия унитарной группы на пространстве всех комплексных матриц).

В данной работе нас будет интересовать именно "эргодический метод" Вершика–Ольшанского, который позволяет описать последовательности мер, слабо сходящиеся к каждой из рассматриваемых предельных эргодических мер. Наша цель – классификация таких мер для бесконечной ортогональной и бесконечной симплектической групп. Ниже мы подробно рассматриваем случай асимптотики орбитальных мер для ортогональной группы четной размерности, $G = O(2n)$; основной результат – теорема 10. Случаи групп $O(2n+1)$ и $\mathrm{Sp}(n)$ полностью аналогичны, см. замечание 12 в конце работы.

Я благодарен А. И. Буфетову за постановку задачи; я также признателен А. М. Вершику и Г. И. Ольшанскому за полезные обсуждения. Работа поддержана грантом A*MIDEX No. ANR-11-IDEX-0001-02.

Ключевые слова: эргодические меры, бесконечная ортогональная группа, бесконечная симплектическая группа, интеграл Хариш-Чандры.

§1. Предварительные сведения

Во-первых, напомним эргодическую теорему из работы [6] (см. также [12]).

Пусть $\mathcal{K}(1) \subset \mathcal{K}(2) \subset \ldots$ – возрастающая цепочка компактных подгрупп и $\mathcal{K} = \varinjlim \mathcal{K}(n)$ – соответствующий индуктивный предел топологических групп.

Пусть $\mathcal{X}$ – сепарабельное метрическое пространство и $C(\mathcal{X})$ – банахово пространство ограниченных непрерывных функций на $\mathcal{X}$. Будем рассматривать непрерывные (как функции двух переменных) действия $(u, x) \mapsto u \cdot x$ группы $\mathcal{K}$ на пространстве $\mathcal{X}$.

Возьмем нормированную меру Хаара на $\mathcal{K}(n)$ и рассмотрим ее образ при отображении $u \mapsto u \cdot x$, где u пробегает $\mathcal{K}(n)$ (иначе говоря, мы рассматриваем единственную $\mathcal{K}(n)$-инвариантную вероятностную меру на орбите $\mathcal{K}(n) \cdot x$). Обозначим через $f_{n,x}$ характеристическую функцию этой меры.

Под *мерой* на пространстве $\mathcal{X}$ ниже всегда понимается борелевская вероятностная мера.

Теорема 1 ([6, 12]). *Пусть ν – эргодическая $\mathcal{K}$-инвариантная борелевская мера на пространстве $\mathcal{X}$, и пусть f – характеристическая функция этой меры. Тогда для ν-почти всех точек $x \in \mathcal{X}$ выполняется соотношение $f_{n,x} \to f$ при $n \to \infty$, равномерно на компактных множествах.*

Мы будем доказывать сходимость характеристических функций, опираясь на сходимость коэффициентов Тейлора и используя следующие два предложения.

Предложение 2 ([6]). *Пусть $f, f_1, f_2, \ldots$ – аналитические функции на $\mathbb{R}^k$, удовлетворяющие следующим условиям:*

- *$f_1, f_2, \ldots$ положительно определены и нормированы в начале координат;*
- *коэффициенты Тейлора функции f_n в нуле сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим коэффициентам Тейлора функции f;*
- *разложение Тейлора функции f_n сходится абсолютно и равномерно по n в окрестности нуля, не зависящей от n.*

Тогда $f_n \to f$ равномерно на компактных подмножествах в $\mathbb{R}^k$.

Предложение 3 ([6]). *Пусть $f_1, f_2, \ldots$ и f – гладкие положительные функции на $\mathbb{R}^k$, нормированные в нуле. Разложим их в ряд Тейлора в* *нуле, и пусть каждый коэффициент Тейлора функции f_n стремится, при $n \to \infty$, к соответствующему коэффициенту функции f. Наконец, пусть проблема моментов для коэффициентов функции f имеет единственное решение (это условие выполняется, например, если f аналитична).*

Тогда последовательность (f_n) сходится к f равномерно на компактных подмножествах в $\mathbb{R}^n$.

Как мы видим из теоремы 1, наш основной инструмент – это последовательность $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, характеристических функций для последовательности $\{M_n \in \mathcal{M}_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, орбитальных мер. Напомним, что по определению

$$f_n(A) = \int\limits_{\Omega_n} e^{i\,\mathrm{tr}(AB)} M_n(dB), \qquad A \in \mathcal{X}(n),$$

где Ω_n – это орбита группы $\mathcal{K}(n)$, на которой сосредоточена мера M_n, и $\mathcal{X} = \varinjlim \mathcal{X}(n)$.

Ниже мы в интересующих нас случаях получим явное разложение в ряд Тейлора для $f_n(A)$, пользуясь теоремой Хариш-Чандры [3]. Эта теорема дает явную формулу в случае присоединенного действия группы Ли на своей алгебре Ли. Именно, пусть G – компактная связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, Ad – присоединенное действие группы G на $\mathfrak{g}$ и $(X, Y) = \mathrm{tr}(XY)$ – невырожденное инвариантное скалярное произведение. Также обозначим через $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ подалгебру Картана, через $\alpha(X)$ – линейное действие корня α на элемент $X \in \mathfrak{h}$ и через $\mathcal{W}$ – группу Вейля. Тогда для $X, Y \in \mathfrak{h}$

$$\mathcal{Z}(X, Y) = \int\limits_G d\Omega e^{-(X, \mathrm{Ad}(\Omega) Y)} = \mathrm{const}\ \Delta(X)\Delta(Y) \sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) e^{-(X, w(Y))},$$

где $\epsilon(w) = (-1)^{\lambda(w)}$, $\lambda(w)$ – число отражений, порождающих w, и

$$\Delta(X) = \prod_{\alpha > 0} \alpha(X)$$

– произведение положительных корней в $\mathfrak{g}$.

В случае классических групп $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ формулы для орбитального интеграла можно получать, например, используя теорему Дюйстермаата–Хекмана, см., например, [1, 2].

В интересующих нас терминах результат можно сформулировать так. Рассмотрим два элемента $X, Y \in \mathfrak{h}$ вида

$$
\begin{aligned}
X &= \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & X_1 \\ -X_1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & X_n \\ -X_n & 0 \end{bmatrix} \right), \\
Y &= \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & Y_1 \\ -Y_1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & Y_n \\ -Y_n & 0 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Тогда справедлива следующая формула для характеристической функции меры M_n на орбите $\mathcal{K}(n)(Y)$, для фиксированного $Y \in \mathfrak{h}$.

Предложение 4.

$$
\begin{aligned}
f_n(X) &= f_Y^{O(2n)}(X) = \mathcal{Z}(iX, Y) \\
&= \mathrm{const}_{O(2n)} \frac{\det(2\operatorname{ch}(2iX_kY_j))_{j,k=1,\dots,n}}{\Delta(X)\Delta(Y)} \\
&= \mathrm{const}_{O(2n)} \frac{\det(2\cos(2X_kY_j))_{j,k=1,\dots,n}}{\Delta(X)\Delta(Y)},
\end{aligned} \tag{2}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta(X) &= \prod_{i<j} (X_i^2 - X_j^2), \\
\mathrm{const}_{O(2n)} &= \frac{(2n!)(2(n-1))!\dots(2!)}{(-4)^{n(n-1)/2}}.
\end{aligned}
$$

Замечание 5. Мы всегда можем считать элементы $\{Y_i\}_{i=1}^n$ положительными, для этого достаточно рассмотреть сопряжение матрицей вида

$$
\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right);
$$

и мы всегда можем считать, что $Y_1 \geqslant Y_2 \geqslant \dots$ после сопряжения подходящей матрицей подстановки.

Теперь мы можем описать разложение Тейлора для $f_n(A)$. Как видно из формул предложения 4, эти функции симметричны, и нам будет удобно записать их как сумму многочленов Шура с некоторыми коэффициентами.

Мы будем использовать стандартные факты и обозначения, связанные с диаграммами Юнга и разбиениями (см., например, монографию И. Макдональда [5]). Запись $\mu \vdash m$ означает, что μ – это разбиение числа m (иначе говоря, m равно $|\mu|$, т.е. числу клеток в μ), через $\ell(\mu)$ обозначается число ненулевых строк в μ. Через $(p,q)\in\mu$ мы обозначим клетку в диаграмме μ, лежащую на пересечении p-й строки и q-го столбца, через μ_i – длину i-й строки. Для фиксированного $n\in\mathbb{N}$ мы полагаем также $m_i=\mu_i+n-i$.

Напомним следующее известное соотношение (см., например, [4, теорема 1.2.1]).

Лемма 6. *Для любого степенного ряда*

$$g_i(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{(i)}t^m,\qquad i=1,\dots,n,$$

выполняется равенство

$$\frac{\det\,[g_i(t_j)]_{1\leqslant i,j\leqslant n}}{\prod\limits_{i<j}(t_i-t_j)}=\sum_{\mu}\det\,[a^{(i)}_{\mu_j+n-j}]\,s_\mu(t_1,\dots,t_n),$$

где μ пробегает все разбиения длины $\leqslant n$.

После замены переменных $\{t_k=s_k^2\}$ получаем такое следствие.

Следствие 7.

$$\frac{\det\,[h_j(s_k)]_{1\leqslant j,k\leqslant n}}{\prod\limits_{j<k}(s_j^2-s_k^2)}=\sum_{\mu}\det\,[a^{(j)}_{\mu_k+n-k}]\,s_\mu(s_1^2,\dots,s_n^2),$$

где

$$h_j(s)=g_j(s^2)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{(j)}s^{2m},\quad i=1,\dots,n.$$

Используя это равенство, мы приходим к следующему предложению.

Предложение 8.

$$f_Y^{O(2n)}(X)=f_Y^{O(2n)}(X_1,\dots,X_n)=\sum_{\mu}c_\mu s_\mu(X_1^2,\dots,X_n^2),$$

где

$$\begin{aligned}c_\mu&=\prod_{(p,q)\in\mu}\frac{1}{(2(n-p+q))(2(n-p+q)-1)}s_\mu(-4Y_1^2,\dots,-4Y_n^2)\\&=(-4)^{|\mu|}\prod_{(p,q)\in\mu}\frac{1}{(2(n-p+q))(2(n-p+q)-1)}s_\mu(Y_1^2,\dots,Y_n^2).\end{aligned}\tag{3}$$

Доказательство. Напомним, что $\cos(s) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} s^{2m}$, и положим $h_j(s) = 2\cos(2Y_j s)$. В силу предложения 4 и следствия 7 получаем

$$f_Y^{O(2n)}(X) = \frac{\mathrm{const}_{O(2n)}}{\Delta(Y)} \cdot \frac{\det(2\cos(2X_kY_j))_{j,k=1,\ldots,n}}{\Delta(X)}$$
$$= \frac{\mathrm{const}_{O(2n)}}{\Delta(Y)} \cdot \sum_{\mu} \det\left[\frac{(-1)^{\mu_k+n-k}(2Y_j)^{2(\mu_k+n-k)}}{(2(\mu_k+n-k))!}\right] s_\mu(X_1^2,\ldots,X_n^2). \quad (4)$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i + n(n-1)/2 = |\mu| + n(n-1)/2$, подставляя значение для $\mathrm{const}_{O(2n)}$, получим

$$\frac{\mathrm{const}_{O(2n)}}{\Delta(Y)} \cdot \sum_{\mu} \det\left[\frac{(-1)^{\mu_k+n-k}(2Y_j)^{2(\mu_k+n-k)}}{(2(\mu_k+n-k))!}\right] s_\mu(X_1^2,\ldots,X_n^2)$$
$$= \sum_{\mu}\left(\frac{(-4)^{\sum_{i=1}^{n} m_i}}{(-4)^{n(n-1)/2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2(n-k))!}{(2(\mu_k+n-k))!} \frac{\det\left[((Y_j)^2)^{\mu_k+n-k}\right]}{\Delta(Y)} s_\mu(X_1^2,\ldots,X_n^2)\right). \quad (5)$$

Вспоминая определение многочленов Шура

$$s_\mu(t_1,\ldots,t_n) = \frac{\det\left[(t_j)^{\mu_k+n-k}\right]}{\prod\limits_{j<k}(t_j - t_k)},$$

мы наконец получаем

$$f_Y^{O(2n)}(X)$$
$$= \sum_{\mu}\left((-4)^{|\mu|} \prod_{(p,q)\in\mu} \frac{1}{(2(n-p+q))(2(n-p+q)-1)} s_\mu(Y_1^2,\ldots,Y_2^2) s_\mu(X_1^2,\ldots,X_n^2)\right)$$
$$= \sum_{\mu}\left(\prod_{(p,q)\in\mu} \frac{1}{(2(n-p+q))(2(n-p+q)-1)} s_\mu(-4Y_1^2,\ldots,-4Y_n^2) s_\mu(X_1^2,\ldots,X_n^2)\right). \quad (6)$$

□

Рассмотрим частный случай $X = (x, 0, \ldots, 0)$. Мы будем обозначать m-ю полную симметрическую функцию через h_m. Напомним, что $s_\mu = h_m$ при $\mu = (m)$; в частности, $s_m(x, 0, \ldots, 0) = x^m$; кроме того, $s_\mu(x, 0, \ldots, 0) = 0$, если μ_2 отлично от нуля, поэтому выполняется следующее равенство.

Следствие 9.

$$f_Y^{O(2n)}((x,0,\dots,0)) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{h_m(-4Y_1^2,\dots,-4Y_n^2)}{(2n-1)2n\cdots(2(n+m-1))}x^{2m}.$$

§2. Основной результат

Теорема 10. *Пусть* $\{M_n \in \mathcal{M}_n\}$ *– бесконечная последовательность орбитальных мер, задаваемых последовательностью* $\{\Omega_n \subset X(n)\}$ *орбит групп* $\mathcal{K}(n)$. *Для* $n = 1,2,\dots$ *выберем для каждой орбиты* Ω_n *представителя вида*

$$Y(n) = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & Y_1(n) \\ -Y_1(n) & 0 \end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix} 0 & Y_n(n) \\ -Y_n(n) & 0 \end{bmatrix}\right),$$
$$Y_1(n) \geqslant Y_2(n) \geqslant \dots \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (7)$$

(*отметим, что такая последовательность* $\{Y_n\}$ *однозначно задается орбитой* Ω_n).

1. *Пусть существуют следующие пределы*:

$$y_k = \lim_{n\to\infty} \frac{Y_k(n)}{n} \geqslant 0, \qquad k = 1,2,\dots, \qquad (8)$$

$$\widetilde{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_k Y_k^2(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2}\,\mathrm{tr}(Y^2(n)). \qquad (9)$$

Тогда меры M_n *слабо сходятся к эргодической мере* $M \in \mathcal{M}$ *с мультипликативной характеристической функцией* f, *которая для элемента*

$$X = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & X_1 \\ -X_1 & 0 \end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix} 0 & X_n \\ -X_n & 0 \end{bmatrix}\right)$$

задается формулой

$$f(X) = \prod_{i=1}^n F_{\gamma,y}(X_i),$$

где

$$F_{\gamma,y}(x) = e^{-\gamma x^2}\prod_k \frac{1}{1+(y_k x)^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

здесь параметры $y_k \geqslant 0$ *заданы в* (8) *и*

$$\gamma = \widetilde{\gamma} - \sum_k (y_k)^2, \qquad (10)$$

где $\widetilde{\gamma}$ *задано в* (9).

2. *Обратно, если меры M_n слабо сходятся к некоторой вероятностной мере на H, то пределы* (8), (9) *существуют.*

Доказательство. Для доказательства достаточности приведенных условий сходимости мер мы используем теорему 1 вместе с предложением 3. (Функция $f(X)=\prod_{i=1}^n F_{\gamma,y}(X_i)$ аналитична как равномерный на компактных подмножествах предел аналитических функций в полосе $\Im(z)<\min\{1/y_n, n\in\mathbb{N}\}$.)

Шаг 1. Мы начинаем с рассмотрения случая

$$X=\left(\begin{bmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{bmatrix},0,\dots,0\right),$$

т.е. мы хотим доказать сходимость характеристических функций

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F_{\gamma,y}(x)$$

через сходимость соответствующих коэффициентов Тейлора, исходя из существования пределов (8), (9). Здесь f_n – характеристическая функция вероятностной меры M_n и

$$f_n(x)=f_n(\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{bmatrix},0,\dots,0\right)).$$

Запишем наши функции в виде

$$f_n(x)=\sum_{m\geqslant 0} c_m^{(n)}x^m,\qquad F_{\gamma,y}(x)=\sum_{m\geqslant 0} c_m^{(\infty)}x^m. \tag{11}$$

Нам достаточно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} c_m^{(n)}=c_m^{(\infty)},\quad m=0,1,2,\dots. \tag{12}$$

В силу следствия 9 имеем $c_{2m+1}^{(n)}=0$,

$$\begin{aligned} c_{2m}^{(n)} &= \frac{h_m(-4Y_1(n)^2,\dots,-4Y_n(n)^2)}{(2n-1)2n\cdots(2(n+m-1))}\\ &= \frac{(2n)^{2m}}{(2n-1)2n\cdots(2(n+m-1))}\,h_m\left(\frac{-Y_1^2(n)}{n^2},\dots,\frac{-Y_n^2(n)}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Понятно, что в (12) мы можем заменить $c_{2m}^{(n)}$ на

$$\widetilde{c}_{2m}^{(n)}:=h_m\left(\frac{-Y_1^2(n)}{n^2},\dots,\frac{-Y_n^2(n)}{n^2}\right). \tag{14}$$

Более того, вместо рядов $\sum \widetilde{c}_{2m}^{(n)} x^{2m}$ и $\sum c_{2m}^{(\infty)} x^{2m}$ удобнее работать с их логарифмами $\ln(\sum \widetilde{c}_{2m}^{(n)} x^{2m})$ и $\ln(\sum c_{2m}^{(\infty)} x^{2m})$.

Напомним известное равенство из теории симметрических функций:

$$\sum_{m\geqslant 0} h_m(\,\cdot\,)a^m = \exp\left(\sum_{m\geqslant 1} p_m(\,\cdot\,)\,\frac{a^m}{m}\right), \tag{15}$$

где $p_m(\,\cdot\,)$ – степенные суммы Ньютона (см., например, [5]). Из (14) и (15) следует, что

$$\ln\left(\sum_{m\geqslant 0} \widetilde{c}_{2m}^{(n)} x^{2m}\right) = \sum_{m\geqslant 1} p_m\left(\frac{-Y_1^2(n)}{n^2}, \dots, \frac{-Y_n^2(n)}{n^2}\right)\frac{x^{2m}}{m}. \tag{16}$$

С другой стороны, по определению функции $F_{\gamma,y}$

$$\ln\left(\sum_{m\geqslant 0} c_{2m}^{(\infty)} x^{2m}\right) = -\gamma x^2 + \sum_{m=1}^{\infty} p_m(-y^2)\,\frac{x^{2m}}{m},$$

где

$$p_m(-y^2) = (-1)^m p_m(y^2) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{2m}. \tag{17}$$

Отметим, что сумма в правой части равенства (17) сходится, так как в силу предположения (9) выполняется условие $p_1(y^2) < \infty$.

Таким образом, нам достаточно проверить следующие равенства:

$$\lim_{n\to\infty} p_1\left(\frac{-Y_1^2(n)}{n^2}, \dots, \frac{-Y_n^2(n)}{n^2}\right) = -\gamma + p_1(-y^2), \tag{18}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_m\left(\frac{-Y_1^2(n)}{n^2}, \dots, \frac{-Y_n^2(n)}{n^2}\right) = p_m(-y^2), \qquad m \geqslant 2. \tag{19}$$

При этом (18) немедленно следует из (9) и (10). Действительно, в силу (9)

$$\lim_{n\to\infty} p_1\left(\frac{-Y_1^2(n)}{n^2}, \dots, \frac{-Y_n^2(n)}{n^2}\right) = -\widetilde{\gamma}.$$

Теперь, используя (10), получим

$$-\widetilde{\gamma} = -\gamma - \sum_k (y_k)^2 = -\gamma + p_1(-y^2).$$

Проверим равенство (19):

$$p_m\left(\frac{-Y_1^2(n)}{n^2},\dots,\frac{-Y_n^2(n)}{n^2}\right)=(-1)^m\sum_{r\geqslant 1}\left(\frac{Y_r^2(n)}{n^2}\right)^m, \tag{20}$$

$$p_m(-y^2)=(-1)^m\sum_{r\geqslant 1}y_r^{2m}. \tag{21}$$

Чтобы вывести (19) из (8), достаточно проверить, что сумма в правой части равенства (20) сходится абсолютно и равномерно по n. В силу наших предположений $Y_1(n)\geqslant Y_2(n)\geqslant\cdots$, поэтому для $m\geqslant 2$, $N=1,2,\dots$

$$\begin{gathered}\left|(-1)^m\sum_{r\geqslant N}\left(\frac{Y_r^2(n)}{n^2}\right)^m\right|=\sum_{r\geqslant N}\left(\frac{Y_r^2(n)}{n^2}\right)^m\\ \leqslant\left(\frac{Y_N^2(n)}{n^2}\right)^{m-1}\sum_{r\geqslant N}\frac{Y_r^2(n)}{n^2}\leqslant\left(\frac{Y_N^2(n)}{n^2}\right)^{m-1}p_1\left(\frac{Y_1^2(n)}{n^2},\dots,\frac{Y_n^2(n)}{n^2}\right).\end{gathered} \tag{22}$$

В силу (9) значение $p_1(Y_1^2(n)/n^2,\dots,Y_n^2(n)/n^2)$ остается ограниченным при $n\to\infty$. Наконец, $y_N\to 0$ при $N\to\infty$, и $Y_N^2(n)/n^2\to y_N^2$ при $n\to\infty$, поэтому выражение $Y_N^2(n)/n^2$ может быть сделано сколь угодно малым при выборе достаточно большого N, а затем достаточно большого n.

Шаг 2. Теперь в предположениях шага 1 докажем более общий результат: для любого фиксированного $k=1,2,\dots$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix}0 & X_1\\ -X_1 & 0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0 & X_k\\ -X_k & 0\end{bmatrix}\right))=\prod_{p=1}^{k}F_{\gamma,y}(X_p) \tag{23}$$

равномерно на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^k$.

Введем обозначение

$$f_n(X_1,\dots,X_k):=f_n(\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix}0 & X_1\\ -X_1 & 0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0 & X_k\\ -X_k & 0\end{bmatrix}\right)).$$

Мы снова будем проверять сходимость коэффициентов Тейлора. Поскольку наши функции симметричны, нам будет удобно записать разложения Тейлора как ряды по многочленам Шура, точнее даже как ряды по многочленам Шура вида $s_\mu(X_1^2,\dots,X_k^2)$, где μ пробегает все диаграммы Юнга, для которых $\ell(\cdot) \leqslant k$:

$$f_n(X_1, \dots, X_k) = \sum c_\mu^{(n)} s_\mu(X_1^2, \dots, X_k^2), \tag{24}$$

$$\prod_{p=1}^{k} F_{\gamma,y}(X_p) = \sum c_\mu^{(\infty)} s_\mu(X_1^2, \dots, X_k^2). \tag{25}$$

Как и для шага 1, в силу предложения 3 нам достаточно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} c_\mu^{(n)} = c_\mu^{(\infty)} \quad \text{для всех } \mu \text{ с } \ell(\mu) \leqslant k.$$

В силу предложения 8

$$\begin{aligned} c_\mu^{(n)} &= \prod_{(p,q)\in\mu} \frac{1}{(2(n-p+q))(2(n-p+q)-1)} s_\mu(-4Y_1^2, \dots, -4Y_n^2) \\ &= \prod_{(p,q)\in\mu} \frac{4n^2}{(2(n-p+q))(2(n-p+q)-1)} s_\mu\biggl(-\frac{Y_1^2}{n^2}, \dots, -\frac{Y_n^2}{n^2}\biggr), \end{aligned} \tag{26}$$

т.е. в нашем утверждении можно заменить $c_\mu^{(n)}$ на

$$\widetilde{c}_\mu^{(n)} := s_\mu\biggl(-\frac{Y_1^2}{n^2}, \dots, -\frac{Y_n^2}{n^2}\biggr).$$

Напомним формулу Якоби–Труди, выражающую многочлены Шура через полные симметрические функции (см., например, [5, часть I, (3.4)]):

$$s_\mu = \det\,[h_{\mu_i - i + j}]_{i,j=1}^{k}, \qquad \ell(\mu) \leqslant k.$$

Из (14) следует, что

$$\widetilde{c}_\mu^{(n)} = \det\,[\widetilde{c}_{2(\mu_i - i + j)}^{(n)}]_{i,j=1}^{k}.$$

В силу шага 1 имеем $\widetilde{c}_{2m}^{(n)} \to c_{2m}^{(\infty)}$ при $n \to \infty$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{c}_\mu^{(n)} = \det\,[c_{2(\mu_i - i + j)}^{(\infty)}]_{i,j=1}^{k}.$$

Кроме того, хорошо известно, что для произвольного формального степенного ряда $\sum\limits_{m\geqslant 0} c_m a^m$ с $c_0 = 1$ выполняется равенство

$$\prod_{p=1}^{k} \biggl(\sum_{m=0}^{\infty} c_m a_p^m\biggr) = \sum_{\ell(\mu)\leqslant k} \det\,[c_{\mu_i - i + j}]_{i,j=1}^{k} s_\mu(a_1, \dots, a_k).$$

Применяя его к левой части равенства (25), мы получаем, что

$$c_\mu^{(\infty)} = \det\,[c^{(\infty)}_{2(\mu_i - i + j)}]_{i,j=1}^k = \lim_{n\to\infty} \widetilde{c}_\mu^{(n)}.$$

Таким образом, сходимость характеристических функций доказана. Это завершает доказательство для шага 2.

Осталось заметить, что, так как функция f мультипликативна, соответствующая мера M эргодична (см., например, теорему о мультипликативности в [7]; в указанной работе теорема доказана для других групп, но доказательство без изменения переносится и на наш случай). Пункт 1 теоремы полностью доказан.

Шаг 3. Зафиксируем последовательность

$$\{Y(n)\}, \quad Y(n) = (Y_1(n), \dots, Y_n(n)),$$

и рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, определенных на шаге 1. Пусть выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

равномерно на ограниченных множествах в $\mathbb{R}$, где $f(x)$ – функция на $\mathbb{R}$ (она автоматически будет непрерывной). Докажем,что последовательность $\{Y(n)\}$ должна удовлетворять условиям (8), (9) теоремы.

Сначала предположим, что

$$\sup_n \left\{ p_1\left(\frac{Y_1^2(n)}{n^2}, \dots, \frac{Y_n^2(n)}{n^2}\right)\right\} < \infty. \tag{28}$$

Рассмотрим бесконечную подпоследовательность индексов N', для которой существуют пределы (8), (9). В силу шага 1 при $n \in N'$ имеем $f_n \to F_{\gamma,y}$ при $n \to \infty$, поэтому $F_{\gamma,y} = f$. Для любого другого N' параметры γ и y будут такими же, поскольку они однозначно определяются самой функцией (достаточно рассмотреть ее полюса). Следовательно, пределы (8), (9) существуют и для индексов n, пробегающих все множество натуральных чисел.

Пусть теперь неравенство (28) не выполняется. Докажем, что это приводит к противоречию с изначальным предположением (27).

Действительно, функция p_1 однородна по $Y(n)$, поэтому можно выбрать такое подмножество $N \subseteq \{1, 2, \dots\}$ и такую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n \mid n \in N\}$, что выполняется соотношение

$\lim\limits_{n\in N}\varepsilon_n = 0$ и

$$\lim_{n\in N} p_1\left(\frac{\varepsilon_n Y_1^2(n)}{n^2}, \dots, \frac{\varepsilon_n Y_n^2(n)}{n^2}\right) = 1.$$

Теперь, заменяя N на подходящую подпоследовательность N', мы получим, что для $\{\varepsilon_n Y(n)\}$ пределы (8) будут существовать для индексов $n \in N'$.

Но умножить $Y(n)$ на ε_n – это то же самое, что умножить x на ε_n. Поэтому в силу шага 1

$$\lim_{n\in N'} f_n(\varepsilon_n x) = F_{\gamma,y}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

При этом по построению $\widetilde{\gamma} = 1$, так что из определения функции $F_{\gamma,y}$ следует, что она не равна тождественно единице. Но это аналитическая функция, поэтому то же справедливо и для произвольной малой окрестности точки $x = 0$. Сравнивая (29) с (27), мы приходим к противоречию.

Пункт 2 теоремы доказан. □

Замечание 11. Теорему 10 можно также доказывать на основании предложения 2, как это было сделано в работе [6]. Тогда дополнительно потребуется доказательство абсолютной и равномерной сходимости разложения Тейлора (аргументы работы [6] несложно адаптируются к рассматриваемой здесь ситуации).

Замечание 12. Для $O(2n+1)$ и $\mathrm{Sp}(n)$ формула в предложении 4 заменится на

$$\begin{aligned} f_{n,Y}(X) &= \mathrm{const}\frac{\det(2\,\mathrm{sh}(2iX_kY_j))_{j,k=1,\dots,n}}{\Delta(X)\Delta(Y)\prod X_j \prod Y_j} \\ &= \mathrm{const}\frac{\det(2\sin(2X_kY_j))_{j,k=1,\dots,n}}{\Delta(X)\Delta(Y)\prod X_j \prod Y_j} \end{aligned} \tag{30}$$

и в доказательстве аналога предложения 8 понадобится рассмотреть вместо четных функций $h_j(s) = 2\cos(2Y_js)$ четные функции $h_j(s) = 2\sin(2Y_js)/Y_j$. Однако после замены (14) доказательство основной теоремы становится в обоих случаях одинаковым – и в итоге формулировка основной теоремы совпадает для бесконечной ортогональной и бесконечной симплектической группы.

Литература

1. J. J. Duistermaat, G. J. Heckman, *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space.* — Invent. Math. **69**, No. 2 (1982), 259–268.
2. A. Ferrer, B. Eynard, P. Di Francesco, J.-B. Zuber, *Correlation functions of Harish-Chandra integrals over the orthogonal and the symplectic groups.* — J. Stat. Phys. **129** (2007), 885–935.
3. Harish-Chandra, *Differential operators on a semisimple Lie algebra.* — Amer. J. Math. **79** (1957), 87–120.
4. Хуа Ло-кен, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
5. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* Clarendon Press, Oxford, 1979.
6. G. I. Olshanski, A. M. Vershik, *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices.* In: Contemporary Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 137–175.
7. G. I. Olshanski, *Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe.* In: Representation of Lie Groups and Related Topics (A. M. Vershik, D. P. Zhelobenko, eds.), Gordon and Breach, New York etc., 1990, pp. 269–463.
8. D. Pickrell, *Mackey analysis of infinite classical motion groups.* — Pacific J. Math. **150**, No. 1 (1991), 139–166.
9. D. Pickrell, *Separable representations of automorphism groups of infinite symmetric spaces.* — J. Funct. Anal. **90** (1990), 1–26.
10. M. Rabaoui, *Asymptotic harmonic analysis on the space of square complex matrices.* – J. Lie Theory **18**, No. 3 (2008), 645–670.
11. M. Rabaoui, *A Bochner type theorem for inductive limits of Gelfand pairs.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58**, No. 5 (2008), 1551–1573.
12. A. M. Vershik, *A description of invariant measures for actions of certain infinite-dimensional groups.* — Dokl. Akad. Nauk SSSR **218** (1974), 749–752.

Nikitin P. P. $O(\infty)$- and $\mathrm{Sp}(\infty)$-invariant ergodic measures on the spaces of infinite antisymmetric and quaternionic antihermitian matrices.

The ergodic measures for the actions of the infinite orthogonal group $O(\infty)$ and the infinite symplectic group $\mathrm{Sp}(\infty)$ by conjugations on the spaces of infinite real antisymmetric and infinite quaternionic antihermitian matrices are classified, with the use of the Vershik–Olshanski "ergodic method."

Aix-Marseille University, Marseille, France
E-mail: pnikitin0103@yahoo.co.uk

Поступило 8 октября 2015 г.