

А. А. Лодкин, А. Р. Минабутдинов

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ АВТОМОРФИЗМА ПАСКАЛЯ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим эргодический автоморфизм  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , функцию  $g \in L^2(\Omega, \mu)$  и соответствующую эргодическую сумму

$$S_x^g(j) = \sum_{k=0}^{j-1} g(T^k x).$$

По эргодической теореме для п.в.  $x$  имеет место сходимость

$$\frac{1}{n} S_x^g(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} g d\mu. \quad (1)$$

В работе [36] рассмотрены отклонения от эргодической теоремы для квадратично суммируемых функций. Показано (см. [36, теорема 4]), что для всякого эргодического автоморфизма  $T$  можно найти функцию  $f \in L^2(\Omega, \mu)$  и семейство гауссовских независимых одинаково распределенных величин  $\{Z_i\}_{i=0}^{\infty}$ , для которых выполнен принцип инвариантности<sup>1</sup>:

$$\frac{|S_x^f(n) - \sum_{i=0}^{n-1} Z_i|}{\sqrt{n \log \log n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

для  $\mu$ -п.в.  $x \in \Omega$ . Поэтому в работе [24] ее авторы предложили ограничиться рассмотрением только функций, принадлежащих некоторому подпространству  $\mathcal{F} \subset L^\infty(\Omega, \mu)$ , для элементов которого могут получаться более интересные результаты, чем в общем случае. Они предложили рассматривать случайные (параметр случайности – это  $x \in \Omega$ ) эргодические суммы  $S_x^g(j)$  как функции от  $j$  на случайных

---

*Ключевые слова:* автоморфизм Паскаля, эргодическая теорема, обобщенная кривая Такаги, обобщенная система Уолша–Пэли, многочлены Кравчука.

Работа подготовлена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00373.

<sup>1</sup>См. также работы [4, 5] и [30].

целочисленных интервалах  $1 \leq j \leq l_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , линейно интерполируя эргодические суммы между соседними значениями  $j \in \mathbb{N}$ . Чтобы можно было ожидать стабилизации получаемых функций при  $n \rightarrow \infty$ , нужно выбрать правильные (естественно, зависящие от  $x$ ) моменты “времени”  $l_n(x)$ , нормировки по вертикальной и горизонтальной осям, а также вычесть “тренд”, задаваемый эргодической теоремой. В итоге было предложено рассмотреть случайные непрерывные функции  $\varphi_{x, l_n}^g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , задаваемые формулой

$$\varphi_{x, l_n(x)}^g(t) = \frac{S_x^g(t \cdot l_n(x)) - t \cdot S_x^g(l_n(x))}{R_{x, l_n(x)}^g}, \quad (2)$$

где  $R_{x, l_n(x)}^g$  – нормировочный множитель, канонически выбираемый равным константе, если  $\max_t |S_x^g(t \cdot l_n(x)) - t S_x^g(l_n(x))| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ , и пропорциональным величине  $\max_t |S_x^g(t l_n(x)) - t S_x^g(l_n(x))|$  в противном случае. Если для выбранных функции  $g$  и точки  $x$  существует последовательность  $l_n(x) \in \mathbb{N}$ , такая, что  $\varphi_{x, l_n(x)}^g$  сходится к функции  $\varphi_x^g$  в равномерной метрике на  $[0, 1]$ , то функцию  $\varphi_x^g(\cdot)$  называют *предельной функцией*, ее график *предельной кривой*, а последовательность  $l_n(x)$  *стабилизирующей последовательностью*.

Рассмотрим бесконечномерный единичный куб  $I = \{0, 1\}^\infty$ , снабженный  $\sigma$ -алгеброй борелевских множеств  $\mathcal{B}$ , порожденной цилиндрическими множествами  $[x_1, x_2, \dots, x_n] = \{y \in I \mid y_i = x_i, i = 1, \dots, n\}$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , меру Бернулли  $\mu_p$ , являющуюся произведением  $\prod_1^\infty (p, 1-p)$  мер  $(p, 1-p)$ ,  $0 < p < 1$ , и автоморфизм Паскаля  $P$ . Автоморфизм Паскаля является важным примером адических преобразований (см. [1]). Он был определен<sup>2</sup> А. М. Вершиком в [2] и изучался в ряде работ, см. статью [3] и ссылки в ней.

В работе [24] изучались предельные кривые для автоморфизма Паскаля (в изоморфном представлении на интервале  $[0, 1]$ ). В качестве пространства функций  $\mathcal{F}$ , для элементов которого строились предельные функции, выступало пространство  $\mathcal{F}_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , цилиндрических функций, зависящих лишь от первых  $N$  координат<sup>3</sup>. В [24] рассматривались цилиндрические функции  $g = g(x_1, \dots, x_N)$ , удовлетворяющие

<sup>2</sup>Этот автоморфизм ранее (без упоминания этого термина и связи с графом Паскаля) использован в [21] и [26].

<sup>3</sup>Или, что эквивалентно, функций, измеримых относительно *конечного* стандартного диадического разбиения  $\mathcal{P}_N$  интервала  $[0, 1]$  ранга  $N$  в изоморфном представлении автоморфизма на  $[0, 1]$ .

дополнительному условию

$$\text{cov}_{\mu_p}\left(g, \sum_{i=1}^N r_i\right) \neq 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где  $r_i(x) = (-1)^{x_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , – функции Радемахера. Графиком предельной функции  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n(x)}^g(\cdot)$ , в случае выполнения условия (3), для  $\mu_p$ -п.в.  $x$  при  $p = 1/2$  оказалась кривая Такаги, а при других значениях  $p$  – ее естественное обобщение. В общем случае было показано, что всякая цилиндрическая, некогомологичная константе функция  $f$  приводит к некоторой предельной функции  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n(x)}^f$ . В качестве последовательности  $\{l_n(x)\}_n$  естественным образом выступают выбираемые по точке  $x$  (под)последовательности биномиальных коэффициентов  $\binom{n(x)}{k_n(x)}$ , обладающие свойством  $\frac{k_n(x)}{n(x)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} p$ . Эти результаты из базовой для нас работы [24] будут сформулированы в теоремах 2–4 ниже.

Однако было замечено, что в общем случае (т.е. когда не выполнено условие (3)) могут возникать другие предельные кривые. Например, в § 4.1 работы [24] для случая  $p = \frac{1}{2}$  приведен пример функций и путей, для которых в качестве предельной получается совершенно другая кривая. В связи с этим в пп. 4.1 и 4.2 авторы вышеупомянутой работы выдвигают гипотезу, что для почти каждой точки пространства можно выбрать стабилизирующую последовательность так, чтобы предельной кривой являлась обобщенная кривая Такаги.

Целью данной работы является решение этого вопроса.

Основной результат можно сформулировать в виде следующей теоремы, которая обобщает результат из работы [9] на случай произвольного  $p$ .

**Теорема А.** Пусть  $P$  – автоморфизм Паскаля пространства с мерой  $(I, \mathcal{B}, \mu_p)$ ,  $N$  – натуральное число и  $g \in \mathcal{F}_N$  – некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда для  $\mu_p$ -п.в.  $x$  стабилизирующая последовательность  $l_n(x)$  может быть выбрана так, что предельной функцией является функция  $\alpha_{g,x} T_p^1$ , где  $\alpha_{g,x} \in \{-1, 1\}$ .

График функции  $\frac{1}{2} T_{1/2}^1$  является кривой Такаги.

Основным методом в данной работе является разложение функции  $g \in \mathcal{F}_N$  в ряд Фурье по ортогонализированным относительно скалярного произведения, задаваемого мерой  $\mu_p$ , функциям Уолша  $\{w_t^p\}_{t=1}^\infty$ .

Когомологичные константе функции  $g \in \mathcal{F}_N$  могут быть описаны следующим образом.

**Предложение 1.** *Цилиндрическая функция  $g$ , принадлежащая пространству  $\mathcal{F}_N$ , когомологична константе тогда и только тогда, когда для всякого  $m$ ,  $1 \leq m \leq N$ ,*

$$\text{cov}_{\mu_p}(g, \sum_{t: \mathbf{s}_2(t)=m} w_t^p) = 0,$$

где через  $\mathbf{s}_2(t)$  обозначено число единиц в двоичном разложении натурального числа  $t$ .

Для функций  $w_t^p$  мы показали, что их эргодические суммы  $S_x^{w_t^p}$  выражаются через полиномы Кравчука. Переход к пределу в формуле (2) естественным образом приводит к изучению асимптотических разложений полиномов Кравчука, которые, как показано в работе [10], выражаются через полиномы Эрмита. Предельные функции, отличные от  $\pm T_p^1$ , с необходимостью возникают лишь для множества точек  $x$  нулевой  $\mu_p$ -меры. Для заданной функции  $g \in \mathcal{F}_N$  это множество естественным образом параметризуется корнями некоторого полинома Эрмита.

Работа устроена следующим образом. В §2 приведены основные результаты из базовой для нас работы [24]. В §3 описан класс фрактальных кривых, к которому относятся предельные кривые, а также исследованы свойства самоподобия его элементов. В п. 4.1 описана система базисных функций Уолша, ортогонализованная в пространстве  $L_{\mu_p}^2(I)$ , рассмотрение рядов Фурье по которой является главным инструментом для получения наших результатов. Параграф 4 посвящен основным результатам работы. В §5 дана теоретико-числовая интерпретация наших результатов. Наконец, в последнем параграфе 6 приводятся некоторые доказательства и дополнительные иллюстрации.

Авторы благодарны А. М. Вершику за внимание к работе и полезные обсуждения.

## §2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ИСХОДНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вершину (точку)  $x$  бесконечномерного куба  $I$  естественно рассматривать как путь в графе Паскаля. Если начальный отрезок  $x_1, \dots, x_n$

длины  $n$  пути  $x$  содержит  $k$  нулей<sup>4</sup>, то путь проходит через вершину  $(n, k)$  графа Паскаля.

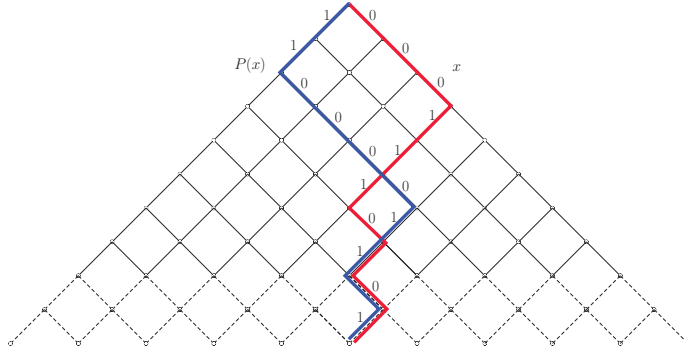


Рис. 1. Автоморфизм Паскаля отображает точку  $x = 0001110\dots$  в  $Px = 1100001\dots$

На точках (путях) автоморфизм действует следующим образом<sup>5</sup> (см. [2]):

$$x \mapsto Px, \quad P(0^{m-l}1^l\mathbf{10}\dots) = 1^l0^{m-l}\mathbf{01}\dots \quad (4)$$

(запись подразумевает, что координаты  $x_i$  с номерами  $i \geq m+3$  остаются неизменными). Инвариантные эргодические меры автоморфизма Паскаля, согласно теореме де Финетти и закону нуля и единицы, — это бернуллиевские произведения  $\mu_p = \prod_1^\infty (p, 1-p)$ , где  $0 < p < 1$ .

Для всякого пути (точки)  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  из  $I$  обозначим через  $J_n(x)$  цилиндр  $[x_1, \dots, x_n]$ . Всякий такой цилиндр можно рассматривать как вершину  $n$ -мерного куба  $I_n = \prod_1^n \{0, 1\}$ . Тогда автоморфизм Паскаля на вершинах  $n$ -мерного куба действует переходом к следующей вершине в лексикографическом порядке. Вершины (цилиндры), принадлежащие сечению куба  $I_n$  по вершинам с  $k$  нулями, упорядоченные в обратном лексикографическом порядке, образуют этажи башен автоморфизма Паскаля, см. [3]. Эти башни мы обозначаем через  $\tau_{n,k}$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Например, башня  $\tau_{4,2}$  состоит из шести цилиндров:

<sup>4</sup>И, соответственно,  $n - k$  единиц.

<sup>5</sup>Произвольная степень автоморфизма определена для всех последовательностей, кроме тех, которые постоянны с некоторого места.

$$\begin{array}{r}
0\ 0\ 1\ 1 \\
0\ 1\ 0\ 1 \\
1\ 0\ 0\ 1 \\
0\ 1\ 1\ 0 \\
1\ 0\ 1\ 0 \\
1\ 1\ 0\ 0
\end{array} \tag{5}$$

На точках из башни  $\tau_{n,k} \subset I$ ,  $0 \leq k \leq n$ , автоморфизм действует по обычному правилу: точку  $x \in I$ , лежащую на  $i$ -м этаже башни  $\tau_{n,k}$ , он переводит на  $(i+1)$ -й этаж, при этом меняются лишь первые  $n$  координат точки  $x$ .

Для башни  $\tau_{n,k}$  будем обозначать через  $\tau_{n,k}(i)$  цилиндр на  $i$ -м этаже этой башни, например  $\tau_{4,2}(1) = [1100]$ . В силу того, что для всякого  $n$  набор башен  $\{\tau_{n,k}\}_{k=0}^n$  содержит в себе все  $2^n$  элементарных цилиндров длины  $n$ , всякая точка  $x \in I$  содержится на некотором этаже  $i$  некоторой башни  $\tau_{n,k(x)}$ . Как показывает следующая теорема, за счет выбора подпоследовательности  $\{\tau_{n_j,k_j}\}_j$  башен можно добиться того, чтобы номер  $i_j(x)$  этажа, на котором лежит точка  $x$ , был произвольно мал по сравнению с высотой соответствующей башни  $\tau_{n_j,k_j}$ .

**Теорема 1** ([24] или [23, лемма 2.5]). *Для всякого  $\varepsilon > 0$  и для  $\mu_p$ -п.в.  $x$  найдется последовательность башен  $\tau_{n_j,k_{n_j}}$ , где  $n_j = n_j(x)$ ,  $\frac{k_{n_j}}{n_j} \rightarrow p$ , такая, что  $x$  принадлежит одному из цилиндров  $\tau_{n_j,k_{n_j}}(i)$ , где  $1 \leq i \leq \varepsilon \binom{n_j}{k_{n_j}}$ , при каждом  $j$ .*

Стабилизирующую последовательность  $l_j$ , согласно этой теореме, удобно выбирать в виде  $\binom{n_j}{k_{n_j}}$ . При таком выборе отношение  $t_x$  номера  $i_x$  этажа башни  $\tau_{n_j,k_{n_j}}$ , на котором лежит  $x$ , к высоте башни, равной  $\binom{n_j}{k_{n_j}}$ , сколь угодно мало. Поэтому в дальнейшем, в силу непрерывности по  $t$  функций  $\varphi_{x,l}^g(t)$ , можно рассматривать (под)последовательность башен  $\tau_{n_\nu,k_\nu}$ , таких, что  $\frac{k_\nu}{n_\nu} \rightarrow p$ , считая, что  $x$  принадлежит башне  $\tau_{n_\nu,k_\nu}(1)$ . Описав множество всех возможных предельных функций в этом предположении, согласно теореме 1 мы опишем все возможные предельные функции для  $\mu_p$ -п.в.  $x$ .

$i$	Башня $\tau_{4,2}$	$-r_1$	$F_{4,2}^{-r_1}(i)$
6	0011	-1	0
5	0101	-1	1
4	1001	1	2
3	0110	-1	1
2	1010	1	2
1	1100	1	1
0			0

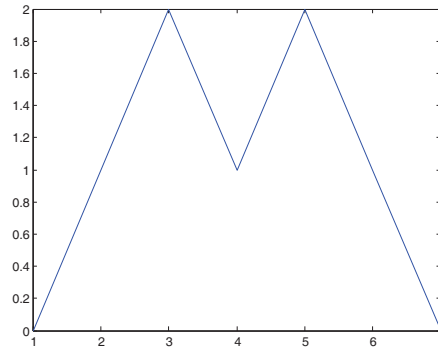
Таблица 1. Значения функции  $F_{4,2}^{-r_1}$  вдоль башни  $\tau_{4,2}$ .

Обозначим через  $\theta$  отображение, переводящее последовательность  $x \in I$  в  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \in [0, 1]$ , а через  $I_0$  обозначим множество последовательностей  $x \in I$ , постоянных с некоторого места; через  $G$  обозначим множество двоично-рациональных чисел из отрезка  $[0, 1]$ . Отображение  $\theta : I \setminus I_0 \rightarrow [0, 1] \setminus G$  является взаимно однозначным, оно задает изоморфизм динамических систем  $(I, \mathcal{B}, P, \mu_p)$  и  $([0, 1], \mathcal{B}, T, \lambda_p)$  (см. [33] и [3]), где автоморфизм  $T$  действует на точках  $x \in [0, 1]$ , представленных в диадическом разложении, согласно формуле (4). При этом мерам  $\mu_p$  на  $I$  соответствуют меры  $\lambda_p$  на отрезке (в частности, мере  $\mu_{1/2}$  соответствует мера Лебега  $\lambda_{1/2}$ ), а всякому цилиндру  $[\omega_1, \dots, \omega_n]$  (этажу башни) соответствует стандартный диадический интервал, точки которого начинаются с  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  в диадическом разложении.

Рассмотрим цилиндрическую функцию  $f \in \mathcal{F}_N$ ,  $N < n$ . Построим частичные суммы  $F_{n,k}^f(\cdot) = S_{x \in \tau_n^k(1)}^f(\cdot)$ , складывая значения, которые функция принимает на этажах башни. Положим  $F_{n,k}^f(0) = 0$  и

$$F_{n,k}^f(i) = \sum_{j=1}^i f(\tau_{n,k}(j)), \quad 1 \leq i \leq \binom{n}{k}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Функция  $F_{n,k}^f(\cdot)$  является целочисленной функцией с целочисленным аргументом. Для нецелочисленных аргументов мы доопределяем ее между узлами с помощью линейной интерполяции. Пример для башни  $\tau_{4,2}$  и функции Радемахера (взятой с противоположным знаком)  $-r_1(x) = (-1)^{x_1}$ ,  $x \in I$ , приведен в табл. 1 и изображен на рис. 2.

Рис. 2. График функции  $F_{4,2}^{-r^1}$ .

Обозначим через  $h_{N,k}^f$  сумму вдоль башни  $\tau_{N,k}$ :

$$h_{N,k}^f = F_{N,k}^f\left(\binom{N}{k}\right), \quad k = 0, \dots, N.$$

Функцию  $g$  вида  $f - f \circ T + C$ , где  $f \in L^\infty$ , а  $C$  — некоторая константа, называют *когомологичной константе*.

Сформулируем основные результаты из работы [24] в наших обозначениях.

**Теорема 2** ([24, лемма 2.2]). *Цилиндрическая функция  $g \in \mathcal{F}_N$  когомологична константе тогда и только тогда, когда суммы  $h_{N,k}$  пропорциональны  $\binom{N}{k}$  для  $k \in \{0, \dots, N\}$ .*

**Теорема 3** ([24, теорема 2.4]). *Пусть  $g$  — цилиндрическая функция, принадлежащая пространству  $\mathcal{F}_N$ . Тогда*

1. *Для  $\mu_p$ -п.в.  $x$  предельная функция  $\varphi_x^g \in C[0, 1]$  существует, то есть*

$$\varphi_{x, l_j(x)}^g \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi_x^g,$$

*тогда и только тогда, когда  $g$  не когомологична константе.*

2. *Предельная функция  $\varphi^g(t)$  полностью определяется своими значениями в  $p$ -рациональных точках вида  $p^i$ ,  $i \geq 1$ .*



3. *Существование пределов*  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_k(x)}^g(t_{i, k(x)}) = \varphi_x^g(p^i)$ ,  $i \geq 0$ ,

где  $t_{i, k(x)} = \frac{\binom{n_{k(x)} - i}{k(x)}}{\binom{n_{k(x)}}{k(x)}}$ , вдоль стабилизирующей последовательности  $l_k(x) = \binom{n_{k(x)}}{k(x)}$  влечет равномерную сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_k(x)}^g = \varphi_x^g.$$

В работе [24] показано, что предельная кривая  $\varphi^g(t)$  принадлежит классу кривых, описываемых треугольными массивами  $\nabla_p^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < p < 1$ . Для нас наиболее важно то, что в случае  $\varphi(p^i) = \frac{\partial^k a^i}{\partial a^k} \Big|_{a=p}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , данные кривые совпадают с кривыми  $T_p^k$ , см. теорему 6 ниже.

**Теорема 4** ([24, теорема 2.5]). *Для цилиндрических функций  $f \in \mathcal{F}_N$ , удовлетворяющих условию  $\text{cov}_{\mu_p}(f, \sum_{i=1}^N r_i) \neq 0$ , предельной функцией является  $T_p^1$ .*

Для  $x \in \tau_{n, k}(1)$  обозначим через  $\varphi_{n, k}^g$  функцию  $\varphi_{x, \binom{n}{k}}^g$ , а через  $R_{n, k}^g$  соответствующий нормирующий коэффициент:

$$\varphi_{n, k}^g(t) = \frac{F_{n, k}^g(t \binom{n}{k}) - t \cdot F_{n, k}^g(\binom{n}{k})}{R_{n, k}^g}. \quad (7)$$

При доказательстве теоремы 3 авторами работы [24] было проверено, что для всякой последовательности  $\{k_l\}_{l=1}^\infty$ , такой, что  $\frac{k_l}{n(k_l)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} p$ , существуют подпоследовательности  $\{k_{l_j}\}_{j=1}^\infty$ , вдоль которых происходит стабилизация предельной кривой:  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n(k_{l_j}), k_{l_j}}^g \in C[0, 1]$ . В п. 4.3 мы установим точный вид предельной кривой вдоль каждой такой подпоследовательности.

### §3. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ САМОПОДОБНЫХ КРИВЫХ

Цель данного параграфа – определить класс самоподобных функций  $T_a^k$ ,  $a \in (0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , и описать их свойства самоподобия.

**3.1. Диадическая и обобщенная диадическая запись вещественного числа.** Всякое число  $y \in [0, 1]$  можно представить в виде

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_{k-1}} (1-a)^{s_{k-1}} = \frac{a}{1-a} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_k} (1-a)^{s_k}, \quad (8)$$

где  $\omega_k \in \{0, 1\}$ ,  $s_k = \sum_{j=1}^k \omega_j$  и (в первой формуле)  $s_0 = 0$ . Такую запись<sup>6</sup> назовем *a-диадической*. Она единственна для п.в.  $y \in [0, 1]$ , однако для *a-рациональных* точек (т.е. точек с  $\omega_{l_0-1} = 0$ ,  $\omega_k = 1$ ,  $k \geq l_0$ ), как обычно, существует два представления: конечное и бесконечное. Мы выбираем конечное представление:

$$y = \sum_{k=1}^{l_0} \omega_k a^{k-s_{k-1}} (1-a)^{s_{k-1}}.$$

В дальнейшем иногда нам будет необходимо явно указывать точку, для которой мы пишем *a-диадическое* представление. В этих случаях для выбранной точки  $y \in [0, 1]$  мы будем использовать обозначения  $\omega_j(y)$  и  $s_j(y)$ , а также  $l_0(y)$  для *a-рационального*  $y$ , вместо вышеупомянутых  $\omega_j$ ,  $s_j$  и  $l_0$ .

Задающую *a-диадическое* число последовательность  $(\omega_j(y))_{j=0}^{\infty}$ , состоящую из нулей и единиц, удобно отождествлять с путем в графе Паскаля. Начальным отрезкам этой последовательности будут соответствовать *a-диадические* интервалы. Например, если  $a = 1/2$ , то последовательность  $(\omega_1 \omega_2 \omega_3) = (1 0 1)$  соответствует обычно *диадическому* интервалу  $[\frac{5}{8}, \frac{6}{8})$ .

**3.2. Сингулярная функция Лебега и связанный с ней класс функций.** Пусть параметры  $a$  и  $b$  принадлежат интервалу  $(0, 1)$ . Мы рассматриваем функции  $S_{a,b}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , которые переводят число  $x$ , имеющее в *a-диадической* записи вид

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_{k-1}} (1-a)^{s_{k-1}},$$

в

$$S_{a,b}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k b^{k-s_{k-1}} (1-b)^{s_{k-1}}. \quad (9)$$

<sup>6</sup>Эта запись неявно использовалась многими авторами; например, С. Какутани [26] рассматривал последовательности соответствующих ей *a-диадических* интервалов. В работе [17] указанное представление рассматривалось в несколько отличной форме,  $y = \sum_0^{\infty} (1-a)^n a^{l_n}$  для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел  $l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_n \leq \dots$ , и называлось *обобщенным диадическим*.

Функции  $S_{a,b}(\cdot)$  были определены в [14] и изучались в [16]. В частности, в работе [14] показано, что при  $a \neq b$  эти функции являются сингулярными, непрерывными, возрастающими.

В частном случае  $a = \frac{1}{2} \neq b$  получаем хорошо известную (см. [32] и [15]) функцию распределения меры  $\lambda_b$ , часто называемую *сингулярной функцией Лебега* или *сингулярной функцией де Рама*; см., например, [27] и [29]. Эту функцию часто обозначают  $L_b(x)$ .

**Замечание 1.** Как было отмечено в работе [3], можно задать другое представление автоморфизма Паскаля  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], T, \lambda_b)$ , которое мы обозначим через  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], K_b, \lambda_{1/2})$ ; соответствующей инвариантной мерой является мера Лебега  $\lambda_{1/2}$ , но автоморфизм  $K_b$  действует на  $b$ -диадических числах по формуле (4). Изоморфизмом является функция распределения  $L_b$  меры  $\lambda_b$ :

$$L_b \circ P = K_b \circ L_b.$$

Автоморфизм  $K_b$  рассматривался в работе [26] для доказательства равномерной распределенности деления отрезка по Какутани.

В общем случае для всякой  $a$ -рациональной точки

$$x_0 = \sum_{j=1}^{l_0} \omega_j(x_0) a^j \left( \frac{1-a}{a} \right)^{s_{j-1}(x_0)}$$

и произвольного числа  $x \in [0, 1]$  функция  $S_{a,b}$  удовлетворяет следующему уравнению самоподобия:

$$S_{a,b} \left( x_0 + a^{l_0} \left( \frac{1-a}{a} \right)^{s_{l_0}(x_0)} x \right) = S_{a,b}(x_0) + b^{l_0} \left( \frac{1-b}{b} \right)^{s_{l_0}(x_0)} S_{a,b}(x). \quad (10)$$

Вывод формулы (10) приведен в приложении к работе [9]. Эта формула означает, что график функции  $S_{a,b}(x)$  на обобщенном диадическом интервале  $[x_0, x_0 + a^{l_0} \left( \frac{1-a}{a} \right)^{s_{l_0}(x_0)}]$  является миниатюрной версией графика функции  $S_{a,b}$ , сжатой в  $b^{l_0} \left( \frac{1-b}{b} \right)^{s_{l_0}}$  раз по вертикали и в  $a^{l_0} \left( \frac{1-a}{a} \right)^{s_{l_0}(x_0)}$  раз по горизонтали.

Функции  $S_{a,b}(\cdot)$  могут быть также заданы как решения системы уравнений де Рама. Согласно [19], система<sup>7</sup>

$$\begin{cases} G(ax) = bG(x), \\ G(a + (1-a)x) = b + (1-b)G(x) \end{cases} \quad (11)$$

имеет единственное решение  $G^*$ , которое, как показано в [14], совпадает с  $S_{a,b}$ .

Введенный класс функций  $S_{a,b}(\cdot)$  позволяет определить новый класс функций<sup>8</sup> (см. [16])

$$T_a^k := \frac{\partial^k S_{a,b}}{\partial b^k} \Big|_{b=a}.$$

При  $a = 1/2$  и  $k = 1$ , т.е. для функции  $\frac{1}{2}T_{1/2}^1$ , ее график является знаменитой кривой Такаги, см. [34]. Функции  $T_a^k$  разделяют многие свойства функции Такаги. Например (см. [16]), они являются нигде не дифференцируемыми функциями<sup>9</sup>.

Дифференцируя функцию  $S_{a,b}$  по параметру  $b$  и полагая  $b$  равным  $a$ , согласно (9) получаем явное представление для функции  $T_a^k$ :

$$\begin{aligned} T_a^k(x) &:= \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{\partial^k}{\partial b^k} ((1-b)^{s_j-1} b^{j-s_j+1}) \Big|_{b=a} \\ &= k! \sum_{j \geq 1} \omega_j \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{s_j-1}{i} \binom{j-s_j-1}{k-i} a^{j-k} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_j-1-i}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $x = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j a^{j-s_j-1} (1-a)^{s_j-1}$ . Сходимость следует из равномерной суммируемости ряда в правой части.

**Замечание 2.** Функции  $T_a^k(x)$  являются аналитическими функциями от  $a \in (0, 1)$ .

<sup>7</sup>Случай  $a = \frac{1}{2}$  рассматривался самим де Рамом, см. [18].

<sup>8</sup>Их также можно записать в виде  $T_a^k = \frac{\partial^k L_b}{\partial b^k} \Big|_{b=a} \circ L_a^{-1}$ .

<sup>9</sup>Это резко отличает их от, например, “похожих” функций  $\frac{\partial^k S_{\frac{1}{2},b}}{\partial b^k} \Big|_{b=a}$ , изучавшихся в работе [13], где установлено, что они п.в. дифференцируемы при  $a \neq 1/2$ , что кажется совершенно неожиданным результатом. В работе [27] описано множество точек, в которых  $L_a(x)$  имеет нулевую производную, а также доказана дифференцируемость п.в. функции  $(T_{1/2}^1 \circ L_a^{-1})(x)$  при  $a < 1/2$ .

Для функций  $T_a^1$  система уравнений де Рама принимает вид

$$\begin{cases} T_a^1(ax) = aT_a^1(x) + x, \\ T_a^1(a + (1-a)x) = (1-a)T_a^1(x) + 1 - x. \end{cases} \quad (13)$$

Для  $T_a^k$ , где  $k \geq 2$ , она имеет вид

$$\begin{cases} T_a^k(ax) = aT_a^k(x) + kT_a^{k-1}(x), \\ T_a^k(a + (1-a)x) = (1-a)T_a^k(x) - kT_a^{k-1}(x). \end{cases} \quad (14)$$

Свойства самоподобия кривых  $T_a^k$ ,  $k \geq 1$ , являются следствием самоподобия функции  $S_{a,b}$  и устанавливаются, как доказано в следующей теореме<sup>10</sup>, дифференцированием равенства (10).

**Теорема 5.** Для всякого  $k \geq 1$ , для всякой  $a$ -рациональной точки  $x_0 = \sum_{j=1}^{l_0} \omega_j(x_0) a^j \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{j-1}(x_0)}$  и произвольного  $x \in [0, 1]$  функция  $T_a^k$  удовлетворяет функциональному соотношению

$$T_a^k\left(x_0 + a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)} x\right) = T_a^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k c_\mu T_a^\mu(x), \quad (15)$$

где коэффициенты  $c_\mu$  вычисляются по формуле

$$c_\mu = \binom{k}{\mu} \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial a^{k-\mu}} a^{l_0-1-s_{l_0-1}} (1-a)^{1+s_{l_0-1}} \quad (16)$$

и  $T_a^0(x) \equiv x$ .

**Доказательство.** Дифференцируем равенство (10) по  $b$  и, полагая  $b$  равным  $a$ , получаем

$$T_a^k(x_0 + rx) = T_a^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} T_a^\mu(x) \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial a^{k-\mu}} a^{l_0-1-s_{l_0-1}} (1-a)^{1+s_{l_0-1}},$$

где  $r = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$ . □

Формула (15) означает, что функция  $T_a^k(x)$  на обобщенном диадическом интервале  $[x_0, x_0 + \alpha_0]$ ,  $\alpha_0 = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$ , выражается

---

<sup>10</sup>Частный случай  $a = \frac{1}{2}$  доказан в [29, предложение 4.2], данная формулировка приведена в [9].

через линейную комбинацию функций  $\{T_a^j(x)\}_{j=1}^k$  и линейной функции  $c_0x$ , которую естественно назвать трендом<sup>11</sup>. Для функции  $\psi \in C[0, 1]$  определим новую функцию  $\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c} \in C[0, 1]$  равенством

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c}(x) = \frac{1}{c}(\psi(x_0 + \alpha_0 x) - \psi(x_0) - x\psi(x_0 + \alpha_0)). \quad (17)$$

Функция  $\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c}$  получается из функции  $\psi(x)$  сужением на  $a$ -диадический интервал с коррекцией на нормировку, константу и тренд.

**Следствие 1.** На обобщенном  $a$ -диадическом интервале  $[x_0, x_0 + \alpha_0]$ , где  $\alpha_0(x_0) = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$ , справедливы равенства

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{T_a^1, C_0}(x) = T_a^1(x) \quad (18)$$

и

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{T_a^2, C_0}(x) = \gamma T_a^1(x) + T_a^2(x), \quad (19)$$

где  $C_0 = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}}$ ,  $\gamma = -\frac{2(s_{l_0} - l_0(1-a))}{a(1-a)}$ .

**Доказательство.** Следует напрямую из теоремы 5, подробности см. в работе [9].  $\square$

Таким образом, на  $a$ -диадическом интервале функция  $T_a^1(x)$  с точностью до константы, тренда и нормировки совпадает с собой же. Для  $T_a^2(x)$  это не так: необходимо привлекать линейные комбинации вида  $\gamma T_a^1(x) + T_a^2(x)$ .

Возникает естественный вопрос: верно ли, что всякий график линейной комбинации  $\alpha T_a^1(x) + \beta T_a^2(x)$  является участком (с точностью до константы и тренда) графика функции  $T_a^2(x)$ ? На этот вопрос отвечает следующее предложение, полученное в работе [9].

**Предложение 2.** Пусть  $a \in (0, 1)$ . Всякую линейную комбинацию вида  $\alpha T_a^1(x) + \beta T_a^2(x)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , можно представить как предел в  $C[0, 1]$  функций  $\lim_{x_k \rightarrow z} \beta \Lambda_{x_k, c_k}^{T_a^2, c_k}$  для некоторой сходящейся последовательности  $a$ -рациональных чисел  $x_k$  и  $c_k = a^{l_0(x_k) - s_{l_0}(x_k)} (1-a)^{s_{l_0}(x_k)}$  тогда и только тогда, когда  $a$  – иррациональное число.

Упомянем также, что в базовой работе [24] определены классы функций  $\varphi_{\nabla_a^{(k)}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Через  $\nabla_a$  в [24] обозначен бесконечный

<sup>11</sup>Ввиду того, что  $T_a^k(0) = T_a^k(1) = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

треугольный массив пар чисел  $(x_{i,j}, y_{i,j})$ ,  $i \geq 0, 0 \leq j \leq i$ , удовлетворяющих системам равенств  $x_{i+1,j+1} = x_{i,j} - x_{i+1,j}$  и  $y_{i+1,j+1} = y_{i,j} - y_{i+1,j}$ , которые при заданных “начальных значениях”  $(x_{i,0}, y_{i,0})$ ,  $i \geq 0$ , определяют остальные пары  $(x_{i,j}, y_{i,j})$ ,  $i \geq 0, 1 \leq j \leq i$ .

В  $a$ -рациональных точках вида  $x_{i,0} = a^i$  функции  $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}$  задаются по формуле  $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}(x_{i,0}) = y_{i,0} = i(i-1) \dots (i-k)a^{i-k-1}$ , а в остальных  $a$ -рациональных точках  $t$  ранга  $i+1$  – с помощью равенств

$$\varphi_{\nabla_a^{(k)}}(t + x_{i+1,j}) = \varphi_{\nabla_a^{(k)}}(t) + y_{i+1,j}.$$

Согласно лемме 3.1 из работы [24], данное определение на всюду плотном множестве  $a$ -рациональных точек позволяет определить самоподобные непрерывные функции на отрезке  $[0, 1]$ . В терминах работы [24] сформулируем следующее утверждение, также полученное вторым автором в [9].

**Теорема 6.** При  $k \in \mathbb{N}$  функции  $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}$  совпадают с функциями  $T_a^k$ ,  $0 < a < 1, k \in \mathbb{N}$ .

#### §4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**4.1. Система базисных функций Уолша.** Систему функций Радемахера  $\{r_n(y)\}_1^\infty$  на  $I$  можно коротко определить следующим образом<sup>12</sup>:

$$r_n(y) := (-1)^{y_n}, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in I.$$

Напомним определение системы функций Уолша (в нумерации Пэли).

**Определение 1.** Положим  $w_0(y) \equiv 1$ . Число  $t \in \mathbb{N}_0$  представим в виде  $t = t_0 2^0 + t_1 2^1 + \dots + t_{N-1} 2^{N-1}$ , где  $t_i \in \{0, 1\}$ . Положим

$$w_t(y) = \prod_{i=0}^{N-1} (r_{i+1}(y))^{t_i} = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y), \quad (20)$$

где  $r_i$  –  $i$ -я функция Радемахера.

Функции Уолша–Пэли образуют группу характеров диадической группы  $\mathbf{Z}_2$  и ортонормированный базис в  $L^2_{\mu_{1/2}}(I)$ . Для функции  $f \in$

<sup>12</sup>Наше определение задает функции Радемахера на группе  $\mathbf{Z}_2$ ; под действием отображения  $\theta$  оно естественным образом переходит в классическое определение  $r_n(y) = \text{sign}(\sin(2^n \pi y))$ ,  $y \in [0, 1), n \geq 1$ , на интервале  $[0, 1)$ .

$L^2_{\mu_{1/2}}(I)$  обозначим через  $S_n(f, y)$  частичные суммы ряда Фурье по системе Уолша–Пэли:  $S_n(f, y) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_k(y)$ , где  $c_k = \int_0^1 f(y) w_k(y) dy$ .

Система Уолша  $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$  является полной ортонормированной системой в  $L^2_{\mu_{1/2}}(I)$ , а значит, и полной системой в  $L^2_{\mu_p}(I)$ . В нумерации Пэли первые  $2^N$  функций Уолша образуют также базис в  $\mathcal{F}_N$ .

**Предложение 3.** Если  $f \in \mathcal{F}_N$  и  $k \geq 2^N$ , то  $S_k(f) \equiv f$ .

Если  $p \neq 1/2$ , то система Уолша не будет ортогональной в  $L^2_{\mu_p}[0, 1]$ , но ее можно ортогонализировать, например используя алгоритм Грама–Шмидта.

Обозначим через  $s_2(t)$  количество единиц в двоичном разложении натурального числа  $t$ . В обозначениях определения (20) имеем

$$s_2(t) = \sum_{j=0}^{N-1} t_j.$$

Как показано в приложении 6.1.1, среднее функции Уолша  $w_t$  по мере  $\mu_p$  допускает следующее представление:

$$\mathbb{E}_{\mu_p} w_t = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} p^l (1-p)^{m-l} = (1-2p)^m, \text{ где } m = s_2(t). \quad (21)$$

Таким образом, среднее функции Уолша  $w_t$  зависит лишь от числа  $m = s_2(t)$  различных функций Радемахера, произведением которых она является.

Определим операцию  $\oplus$  на парах натуральных чисел в двоичной записи как сложение без переноса: для  $i = \sum_{\mu=0}^{\infty} \xi_{\mu} 2^{\mu}$  и  $j = \sum_{\mu=0}^{\infty} \zeta_{\mu} 2^{\mu}$ , где  $\zeta_{\mu}, \xi_{\mu} \in \{0, 1\}$ , по определению

$$i \oplus j = \sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_{\mu} 2^{\mu}, \quad \eta_{\mu} = (\zeta_{\mu} + \xi_{\mu}) \bmod 2.$$

Очевидно, что  $w_t w_s = w_{t \oplus s}$  (более того, функции Уолша–Пэли образуют группу характеров диадической группы  $\mathbf{Z}_2$ ). Поэтому можно записать

$$\text{cov}_{\mu_p}(w_t, w_s) = \mathbb{E}_{\mu_p} w_{t \oplus s} - \mathbb{E}_{\mu_p} w_t \mathbb{E}_{\mu_p} w_s.$$

Обозначим через  $C$  матрицу ковариаций размера  $t \times t$  с элементами  $c_{ij} = \text{cov}_{\mu_p}(w_i, w_j)$ ,  $0 \leq i, j \leq t-1$ , через  $H$  –  $t$ -мерный вектор-столбец  $\text{cov}_{\mu_p}(w_t, w_j)$ ,  $0 \leq j \leq t-1$ , а через  $W$  –  $t$ -мерную вектор-строку из



функций Уолша  $w_0, w_1, \dots, w_{t-1}$ . В этих обозначениях ортогонализованная относительно меры  $\mu_p$  функция Уолша  $w_t^p$  задается формулой

$$w_t^p = w_t - WC^{-1}H.$$

Покажем, что<sup>13</sup>

$$w_t^p = \sum_{j=0}^t \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \cdot (1 - 2p)^{s_2(t-j)} w_j. \quad (22)$$

Для этого достаточно проверить, что  $\text{cov}_{\mu_p}(w_t^p, w_s) = 0$  для всех  $s$ , таких, что  $0 < s < t$ . Обозначим  $\alpha = 2p - 1$ ; тогда  $\mathbb{E}_{\mu_p} w_t = (-\alpha)^{s_2(t)}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ .

**Лемма 1.** *Для натурального  $t$  и для всякого натурального  $s < t$  выполнено соотношение*

$$\sum_{j=0}^t (-1)^{s_2(t-j)} \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \alpha^{s_2(t\oplus j) + s_2(s\oplus j)} = 0. \quad (23)$$

Пользуясь леммой, для  $0 < s < t$  получаем

$$\text{cov}_{\mu_p}(w_t^p, w_s) = \sum_{j=0}^t (-1)^{s_2(t-j)} \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \alpha^{s_2(t\oplus j) + s_2(s\oplus j)} = 0.$$

Для функции  $f \in L^2_{\mu_p}[0, 1]$  обозначим  $k$ -ю частичную сумму ее ряда Фурье  $\sum_{t=0}^{\infty} c_t w_t^p$  по ортогонализованной системе Уолша  $\{w_t^p\}_{t=0}^{\infty}$  через  $S_k^p(f)$ .

**Замечание 3.** Начальный отрезок ряда Фурье  $S_{2^N}^p(f) = \sum_{t=0}^{2^N} c_t w_t^p$  может рассматриваться как условное ожидание  $\mathbb{E}_{\mu_p}(f | \mathcal{F}_N)$  для функции  $f \in L^2_{\mu_p}[0, 1]$ .

Для дальнейшего нам будет удобно определить число  $d_\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{N}$ , как сумму коэффициентов в формуле ортогонализации (22) при функциях

<sup>13</sup>В случае  $p = 1/2$  мы полагаем  $(1 - 2p)^0$  равным единице, поэтому  $w_t^{1/2} = w_t$ .

Уолша  $w_t$ , являющихся произведением в точности  $\mu$  различных функций Радемахера:

$$\begin{aligned} d_\mu &= \sum_{1 \leq j \leq t, \mathbf{s}_2(j)=\mu} \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \cdot (1-2p)^{\mathbf{s}_2(t-j)} \\ &= \binom{\mathbf{s}_2(t)}{\mu} (1-2p)^{\mathbf{s}_2(t)-\mu}, \quad 1 \leq \mu \leq \mathbf{s}_2(t). \end{aligned} \quad (24)$$

**4.2. Явная формула для эргодических сумм.** В этом пункте будет получена явная формула для эргодических сумм функции  $w_t^p$ ,  $t \in \mathbb{N}$ .

4.2.1. *Биномиальное разложение натурального числа.* Пусть  $k \in \mathbb{N}$ ; для любого  $i \in \mathbb{N}$  существуют и единственны<sup>14</sup> такие целые числа  $a_k > a_{k-1} > \dots > a_{k-s} \geq 0$ , что  $i = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_{k-s}}{k-s}$ . Это представление натурального числа называют биномиальным разложением, или  $k$ -каскадом (см., например, [25, гл. 10.4]). Определим функцию<sup>15</sup>  $\partial_k^{N,j}(\cdot)$  на натуральных числах равенством

$$\partial_k^{N,j}(i) = \binom{a_k - N}{k - j} + \binom{a_{k-1} - N}{k - 1 - j} + \dots + \binom{a_{k-s} - N}{k - s - j}.$$

Если натуральное число  $i$  рассматривать как номер пути  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  в графе Паскаля, ведущего из вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, k)$  (см. табл. 1), то  $\partial_k^{N,j}(i)$  — число путей, начинающихся в вершине  $(N, j)$  и не превосходящих пути  $\omega$  относительно лексикографического порядка.

4.2.2. *Явная формула для эргодических сумм ортогонализованной системы Уолша.* Для функции Уолша  $w_t = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y)$

<sup>14</sup>В существовании легко убедиться, используя “жадный алгоритм”: возьмем в качестве  $a_k$  максимальное натуральное число, такое, что  $x \geq \binom{a}{k}$ ; на следующем шаге заменим  $x$  на  $x - \binom{a}{k}$ , а  $k$  на  $k-1$  и будем продолжать, пока не получим ноль. Единственность проверяется по индукции.

<sup>15</sup>Выбор обозначения связан с тем, что через  $\partial^l(A)$  обозначают  $l$ -тьню множества  $A \subset \{0, 1\}^n$ , т.е. множество всех векторов, получающихся из его элементов заменой  $l$  единиц на нули. Если множество  $k$ -регулярно (т.е. каждый его вектор содержит ровно  $k$  единиц), то, согласно теореме Крускала–Катоны,  $|\partial^l(A)| \geq \partial^{0,l}(|A|)$ ; см., например, [25], а также [8].

обозначим через  $m$  сумму  $s_2(t) = \sum_{i=0}^{N-1} t_i$ . Тогда для любого натурального аргумента  $i = \binom{a_k}{k_1} + \dots + \binom{a_1}{1}$ , удовлетворяющего условию  $a_1 \geq N$ , выполнено соотношение

$$F_{n,k}^{w_t}(i) = \sum_{j=0}^N h_{N,j}^{w_t} \partial_k^{N,j}(i), \quad 0 \leq i \leq \binom{n}{k}, \quad (25)$$

где множитель  $h_{N,j}^{w_t}$  равен  $\binom{N}{j} \left[ 2 \cdot \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \frac{\binom{N-j}{2l} \binom{j}{m-2l}}{\binom{N}{m}} - 1 \right]$  и совпадает с интегралом функции  $w_t$  вдоль башни  $\tau_{N,j}$ . Заметим, что  $F_{n,k}^{w_t}(i)$  не зависит от  $t$ , а только лишь от  $m = s_2(t)$ . С точки зрения динамики это означает, что эргодические суммы  $S_x^{w_{t_1}}(i)$  и  $S_x^{w_{t_2}}(i)$  для функций Уолша  $w_{t_1}$  и  $w_{t_2}$ , являющихся произведением одинакового количества функций Радемахера, совпадают во всех точках  $i = \binom{a_k}{k_1} + \dots + \binom{a_1}{1}$ , для которых  $a_1 \geq N$ , см. рис. 5 и 6 в п. 6.2.2. Следовательно, достаточно найти предельные кривые для функций Уолша вида  $w_{(2^m-1)} = \prod_{i=0}^{m-1} r_{i+1}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Для них формула (25) принимает особенно простой вид:

$$F_{n,k}^{w_{t_m}}(i) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \partial_k^{m,j}(i), \quad t_m = 2^m - 1. \quad (26)$$

Доказательство формулы (25) приведено в приложении 6.1.2.

Если вместо системы функций  $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$  рассматривать ортогональную систему  $\{w_t^p\}_{t=0}^{\infty}$ , то, согласно (24), соответствующие эргодические суммы будут выглядеть так:

$$F_{n,k}^{w_{t_m}^p}(i) = \sum_{\mu=0}^m d_{\mu} F_{n,k}^{w_{t_m}^{\mu}}(i), \quad t_l = 2^l - 1, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (27)$$

где коэффициенты  $d_{\mu}$  равны  $\binom{m}{\mu} (1 - 2p)^{m-\mu}$ ,  $\mu \in \mathbb{N}$ .

Если ограничиться только аргументами вида  $x_{i,k,n} = \binom{n-i}{k-i}$ , то формулу (27) можно записать в виде

$$F_{n,k}^{w_{t_m}^p}(x_{i,k,n}) = S_{n-i,k-i}^{p,m} \cdot \binom{n-i}{k-i}, \quad (28)$$

где через  $S_{n,k}^{p,m}$  обозначено выражение

$$\sum_{\mu=0}^m d_{\mu} \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^{\mu-j} \binom{\mu}{j} \frac{(k)_j^{\underline{}} (n-k)^{\mu-j}}{n^{\mu}}, \quad (29)$$

в котором коэффициенты  $d_{\mu} = \binom{m}{\mu} (1-2p)^{m-\mu}$  были определены в (24), а через  $(s)_j^{\underline{}}$  обозначена падающая степень  $s(s-1)\dots(s-j+1)$ . Внутреннюю сумму в определении (29) можно записать через гипергеометрическую функцию Гаусса  ${}_2F_1$ :

$$\sum_{j=0}^{\mu} (-1)^{\mu-j} \binom{\mu}{j} \frac{(k)_j^{\underline{}} (n-k)^{\mu-j}}{n^{\mu}} = \frac{(k-n)^{\overline{\mu}}}{(-n)^{\overline{\mu}}} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -\mu, -k \\ -n-k-\mu+1 \end{matrix}; -1 \right]; \quad (30)$$

здесь через  $(s)_j^{\overline{}}$  обозначена растущая степень  $s(s+1)\dots(s+j-1)$ . Используя изящную формулу суммирования [11, с. 352, формула (13)], мы получаем, что сумма  $S_{n,k}^{p,m}$  равна  $(-2p)^m {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -k, -m \\ -n \end{matrix}; \frac{1}{p} \right]$ . Таким образом, для функции  $w_t^p$  сумма  $F_{n,k}^{w_t^p}(x_{i,k,n})$  выражается следующей формулой:

$$F_{n,k}^{w_t^p}(x_{i,k,n}) = (-2p)^m {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -k+i, -m \\ -n+i \end{matrix}; \frac{1}{p} \right] \cdot \binom{n-i}{k-i}, \quad (31)$$

где  $m = s_2(t)$ .

**4.2.3. Полиномы Кравчука.** Ненормированные полиномы Кравчука дискретной переменной  $x$  могут быть определены через гипергеометрическую функцию Гаусса с помощью следующего равенства:

$$K_n(x, p, N) = {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -x, -n \\ -N \end{matrix}; \frac{1}{p} \right], \quad (32)$$

где  $x$  и  $n$  – целые числа, принадлежащие множеству  $\{0, 1, \dots, N\}$ . Классические (нормированные) полиномы Кравчука могут быть определены равенством

$$k_n^{(p)}(x, N) = (-p)^n \binom{N}{n} K_n(x, p, N). \quad (33)$$

Ниже, где это возможно, мы используем сокращенное обозначение, опуская второй аргумент  $N$ , и пишем  $k_n^{(p)}(x)$  вместо  $k_n^{(p)}(x, N)$ . Полиномы Кравчука образуют ортогональную систему функций на множестве  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$  с весовой функцией

$$\rho_N(x) = \frac{N! p^x q^{N-x}}{\Gamma(1+x)\Gamma(N+1-x)}$$

и соотношениями ортогональности

$$\sum_{x=0}^N k_i^{(p)}(x) k_j^{(p)}(x) \rho(x) = \binom{N}{j} (pq)^j \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N.$$

**4.3. Предельные кривые для функций Уолша.** В данном пункте будет установлен вид предельных функций  $\varphi_x^g$ ,  $g = w_t^p$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , для п.в.  $x \in I$ .

Следуя [24], мы будем рассматривать (допредельные) функции  $\varphi_{n, k_n}^g$ , заданные формулой (7), переходя к пределу вдоль стабилизирующей (под)последовательности  $l_j = \binom{n_j}{k(n_j)}$ . Из теоремы 1 выше следует, что если это удастся сделать для  $\mu_p$ -п.в. (под)последовательностей случайных величин  $(n, k(n)) = (n(x), k(n(x)))$ ,  $x \in I$ , то можно построить предельные кривые для п.в.  $x \in I$ . Для простоты ниже мы опускаем индексы, записывая просто  $(n, k_n)$  или даже  $(n, k)$  вместо  $(n_j(x), k(n_j(x)))$ .

Согласно теореме 3, для определения вида предельной кривой достаточно найти главный член асимптотики следующей разности:

$$F_{n, k}^{w_t^p}(x_{i, k, n}) - \frac{x_{i, k, n}}{\binom{n}{k}} F_{n, k}^{w_t^p}(x_{0, k, n}), \tag{34}$$

где  $x_{i, k, n} = \binom{n-i}{k-i}$ ,  $i = O(1)$ ,  $k = k(n_j)$ ,  $n = n_j$ , а асимптотика при  $j \rightarrow \infty$  ищется при условии  $\frac{k(n_j)}{n_j} \rightarrow p$ .

**4.3.1. Предельные кривые в общем случае.** В этом пункте мы найдем главный член асимптотического разложения разности (34) для (под)последовательностей) путей  $(n_j, k(n_j))$  общего вида.

Для целого неотрицательного числа  $m$  через  $H_m(x)$  обозначим полином Эрмита, определяемый выражением  $(-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}$ , а через  $\{y_j^m\}_{j=1}^m$  набор его корней. Положим  $m = s_2(t)$ . Определим  $v$  как разность  $k - np$ . Для пути  $x \in I$  вместо пары координат  $(n(x), k_n(x))$

мы, где это удобно, используем центрированную пару  $(n(x), v_n(x))$ , записывая ее в виде  $(n, v_n)$  или даже  $(n, v)$ .

Из закона больших чисел и локальной предельной теоремы следует, что  $\mu_p$ -п.в. последовательности случайных величин  $(n, v_n)$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = 0$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\sqrt{2npq}} \neq y_j^{m-1}$ ,  $1 \leq j \leq m$ , где  $\{y_j^{m-1}\}_{j=1}^{m-1}$  – набор корней полинома  $H_{m-1}$ .

Выражение (34) можно записать следующим образом:

$$2^m \left( \binom{n-i}{m}^{-1} k_m^{(p)}(k-i, n-i) - \binom{n}{m}^{-1} k_m^{(p)}(k, n) \right) \binom{n-i}{k-i}.$$

Для заданного  $A > 0$  хорошо известен результат о сходимости подходящим образом нормированных полиномов Кравчука к полиномам Эрмита:

$$\left( \frac{2}{npq} \right)^{m/2} m! k_m^{(p)}(np+v, n) = H_m \left( \frac{v}{\sqrt{2pqn}} \right) + O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad (35)$$

где  $|v| \leq A\sqrt{n}$ . Используя это асимптотическое соотношение, в приложении 6.1.3 мы получаем следующее выражение для разности (34) для путей  $(n, v_n)$ , удовлетворяющих условиям 1 и 2:

$$\alpha_{n, k_n} R_{n, k_n}^{w_i^p} ip^{i-1} + o(R_{n, k_n}^{w_i^p}), \quad (36)$$

где масштабирующий коэффициент  $R_{n, k}^{w_i^p}$  равен

$$|2^m \binom{n}{k} \frac{2m\sqrt{q}}{\sqrt{2np}} \left( \frac{1}{2pqn} \right)^{m/2} H_{m-1} \left( \frac{k-np}{\sqrt{2npq}} \right)|,$$

а знак  $\alpha_{n, k}$  равен  $-\text{sign}(H_{m-1}(\frac{v}{\sqrt{2npq}}))$ . Из условия 2 следует, что коэффициент  $R_{n, k_n}^{w_i^p}$  не обращается в пределе в ноль. Из последовательности  $(n, v_n)$ , удовлетворяющей условиям 1 и 2, можно выбрать подпоследовательность  $(n_j, v_{n_j})$ , такую, что существует (возможно, бесконечный) предел  $\lim_j \frac{v_{n_j}}{\sqrt{2n_j pq}}$ , не равный  $y_j^{m-1}$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ . Опуская индексы, обозначим эту подпоследовательность снова через  $(n, v)$  и положим  $k = np + v$ . Так как  $\lim_j \frac{x_{i, k, n}}{x_{0, k, n}} \rightarrow p^i$ ,  $\lim_j \varphi_{n, k}^{w_i^p} \left( \frac{x_{i, k, n}}{x_{0, k, n}} \right) = \alpha ip^{i-1}$ ,  $\alpha = \pm 1$  и  $T_p^1(p^i) = ip^{i-1}$ , теорема 3 позволяет получить следующий результат.

**Предложение 4.** Для  $\mu_p$ -п.в. последовательности  $(n, k_n)$  можно выбрать подпоследовательность  $(n_j, k_{n_j})$ , такую, что последовательность непрерывных функций  $\{\varphi_{n_j, k_{n_j}}^{w_i^p}\}_j$  сходится в  $C[0, 1]$  к функции  $\alpha T_p^1$ , где  $\alpha = \alpha_{n_j, k_{n_j}, t} \in \{-1, 1\}$ .

Таким образом, для почти всех путей (с точностью до знака) предельной функцией является обобщенная функция Такаги  $T_p^1$ , однако знак  $\alpha_{n, k, t}$  и нормирующий коэффициент  $R_{n, k}^{w_i^p}$  зависят от выбранной последовательности  $n_j, k_{n_j}$ .

Нестрого говоря, если варьировать путь  $(n_j, k_{n_j})$ , удовлетворяющий свойству  $\lim_j \frac{v_{n_j}}{\sqrt{2n_j p q}} = y, |y| \neq \infty$ , так, чтобы сначала  $y$  был меньше некоторого корня  $y^*$  полинома Эрмита  $H_{m-1}$ , а затем превосходил его, то в процессе данной вариации знак  $\alpha_{n_j, k_{n_j}, t}$  изменится на противоположный. Естественно ожидать, что в этом процессе для транзитных путей  $(n_j, k_{n_j})$ ,  $\lim_j \frac{v_{n_j}}{\sqrt{2n_j p q}} = y_j^{m-1}$ , соответствующих корням  $y_j^{m-1}, 1 \leq j \leq m-1$ , полинома Эрмита  $H_{m-1}$ , должны возникать другие предельные кривые. В специальном случае  $p = q = 1/2$  для<sup>16</sup>  $y^* = 0$  данный эффект был впервые обнаружен в [24] и назван транзитным режимом. В следующем пункте будут изучены предельные кривые для *транзитных путей* (т.е. для путей  $(n_j, k_{n_j})$ , для которых не выполнено свойство 2).

4.3.2. *Предельные кривые в транзитных режимах.* В случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\sqrt{2npq}} = y_j^{m-1}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

где  $\{y_j^{m-1}\}_{j=1}^m$  – набор корней полинома  $H_{m-1}$ , асимптотического разложения первого порядка (35), вообще говоря, недостаточно – необходимо использовать разложения полиномов Кравчука более высокого порядка. Данные разложения были найдены в работе [10].

Выражение (34) можно записать следующим образом:

$$2^m \left( \frac{1}{\binom{n-i}{m}} \rho_{n-i}(k-i) k_{n-i}^{(p)}(k-i) - \frac{p^{-i}}{\binom{n}{m}} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k}} \rho_n(k) k_n^{(p)}(k) \right) p^i.$$

<sup>16</sup>Ноль является корнем полиномов Эрмита  $H_m$  с нечетными индексами  $m$ .

В работе [10] было найдено асимптотическое разложение произведения  $\rho_n(x)k_n^{(q)}(x)$ ,  $|\frac{x-np}{\sqrt{n}}| = O(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , произвольного порядка, выражающееся через полиномы Эрмита  $H_l$ ,  $l \geq m$ . Однако в силу громоздкости общего выражения здесь мы рассмотрим лишь специальный случай корня  $y^*$ , равного нулю. Запишем разность (34) в виде

$$(-2p)^m \left( K_m(k-i, p, n-i) - K_m(k, p, n) \right) \binom{n-i}{k-i} \quad (37)$$

и рассмотрим отдельно разность

$$K_m(k-i, p, n-i) - K_m(k, p, n). \quad (38)$$

Пользуясь следствием 2 из работы [10], мы получаем следующее равномерное асимптотическое разложение данной разности.

**Лемма 2.** *Для всякой последовательности  $\varepsilon(n)$ , такой, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0,$$

*равномерно по  $v$ , удовлетворяющему ограничению  $|v| \leq \varepsilon(n)n^{1/3}$ , для разности (38) справедливы следующие асимптотические соотношения:*

- если  $m = 2l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , то она равна

$$c_{p,l,n} l (i^2 - \beta_{p,l,n,v} i) + o(n^{-l-1}); \quad (39)$$

- если  $m = 2l + 1$ ,  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , то она равна

$$c_{p,l,n} (2l + 1) i + o(n^{-l-1}), \quad (40)$$

$$\text{где } c_{p,l,n} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{l+1} \frac{(2l-1)!!}{n^{l+1}}, \beta_{p,l,n,v} = \frac{1}{3q} (6v + 8l(p-1/2) + p + 1).$$

В случае  $m = 2l + 1$  точка  $y^* = 0$  не является корнем полинома Эрмита  $H_{m-1}$ , искомое выражение следует уже из (36) и, как и выше, мы видим, что полученное значение пропорционально  $i$ , т.е. соответствует предельной функции  $T_1^p$ .

В случае  $m = 2l$  точка  $y^* = 0$  является корнем полинома Эрмита  $H_{m-1}$ , главный член асимптотического выражения (36) обращается в ноль, а выражение (40), полученное в лемме 2, соответствует второму члену асимптотического разложения. Так как  $T_p^1(p^i) = ip^{i-1}$  и  $T_p^2(p^i) = i(i-1)p^{i-2}$ , мы видим, что в этом случае предельная функция (с точностью до нормировки) является взвешенной суммой  $T_p^2 + \alpha_{p,l,n,v} T_p^1$ ,  $\alpha_{p,l,n,v} = \beta_{p,l,n,v} - 1$ , функций  $T_p^1$  и  $T_p^2$ . При  $|v| \rightarrow \infty$



коэффициент  $|\alpha_{p,l,n,v}|$  стремится к бесконечности и предельной функцией оказывается  $\pm T_p^1$ , а знак определяется знаком числа  $v$ .

**Замечание.** В общем случае транзитного режима, соответствующего некоторому корню  $y^*$  полинома Эрмита  $H_{m-1}$ , можно провести аналогичные рассуждения: воспользовавшись асимптотическим разложением нужного порядка, найденным в [10], найти ведущий коэффициент разности (34). Однако в случае корня  $y^* = 0$  уже выражение (40), соответствующее второму члену асимптотического разложения разности (34), очевидно, не обращается тождественно в ноль, поэтому функции  $T_p^k$ ,  $k \geq 3$ , соответствующие следующим членам асимптотического разложения, в данном транзитном режиме не появляются. В случае других транзитных режимов проверка этого факта представляется сложной.

**4.4. Предельные кривые для цилиндрических функций.** В данном пункте мы построим предельные кривые для последовательностей случайных величин  $(n, k_n)$ , удовлетворяющих условиям 1 и 2 из п. 4.3.1.

Произвольную цилиндрическую функцию  $g \in \mathcal{F}_N$  можно разложить в сумму Фурье по ортогональной системе  $\{w_t^p\}_{t \geq 0}$ :

$$g(y) = \sum_{t=0}^{2^N-1} c_t w_t^p(y) = \sum_{m=0}^N g_m,$$

где через  $g_m$  обозначена сумма  $\sum_{t: s_2(t)=m} c_t w_t^p$ ,  $0 \leq m \leq N$ .

Из выражения (31) следует, что если для  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$  справедливо равенство  $s_2(t_1) = s_2(t_2)$ , то функции  $\varphi_{n,k}^{w_{t_1}^p}$  и  $\varphi_{n,k}^{w_{t_2}^p}$  совпадают во всех точках вида  $\frac{x_{i,k,n}}{x_{0,k,n}}$ ,  $x_{i,k,n} = \binom{n-i}{k-i}$ ,  $0 \leq i < k$ , а значит, совпадают и соответствующие нормирующие последовательности  $R_{n,k}^{w_t^p}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ . Напротив, если  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$  таковы, что  $s_2(t_1) > s_2(t_2)$ , то, согласно формуле (36), имеем  $R_{n,k}^{w_{t_1}^p} = o(R_{n,k}^{w_{t_2}^p})$ . Отсюда следует, что нормирующий коэффициент  $R_{n,k}^g$  линейной комбинации  $g = \alpha w_{t_1}^p + \beta w_{t_2}^p$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , пропорционален  $R_{n,k}^{w_{t_2}^p}$ .

Поэтому функция  $g \in \mathcal{F}_N$  когомологична константе тогда и только тогда, когда  $g_m = 0$ ,  $1 \leq m \leq N$ . Это доказывает предложение 1, сформулированное во введении. Для такой функции предельной кривой не

существует, а нормирующая последовательность  $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_g^m}$  ограничена, см. теорему 2.

Пусть функция  $g$  не когомологична константе. Обозначим через  $m^*$  минимальное натуральное число, такое, что  $\sum_{t: s_2(t)=m^*} c_t \neq 0$ .

Как и выше, для заданной последовательности  $(n, k(n))$ , удовлетворяющей условиям 1 и 2, выберем подпоследовательность  $(n_j, k(n_j))$  так, чтобы существовал предел  $y = \lim_j \frac{k(n_j) - pn_j}{\sqrt{2n_j pq}} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , не совпадающий ни с одним корнем полинома Эрмита  $H_{m^*-1}$ . Тогда стабилизирующая последовательность  $l_j$  имеет вид  $\binom{n_j}{k(n_j)}$ , а нормирующая последовательность  $R_{n_j, k(n_j)}^g$  пропорциональна коэффициентам  $R_{n_j, k(n_j)}^{w_{m^*}^p}$ , определенным в формуле (36). Предельная кривая для функции  $g$  совпадает с предельной кривой  $\alpha T_p^1$ ,  $\alpha = \alpha_{n_j, k(n_j), m^*}$ , функции  $w_{m^*}^p$ . В частности, знак  $\alpha$  совпадает со знаком полинома  $-H_{m^*-1}$ , вычисленного в точке  $y$ .

Выбирая нормировки описанным образом, мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 7.** Пусть  $g \in \mathcal{F}_N$  — некогомологичная константе цилиндрическая функция. Для  $\mu_p$ -п.в. последовательности  $(n, k_n)$  можно выбрать подпоследовательность  $(n_j, k_{n_j})$ , такую, что последовательность непрерывных функций  $\{\varphi_{n_j, k_{n_j}}^g\}_j$  сходится в  $C[0, 1]$  к функции  $\alpha T_p^1$ , где  $\alpha = \alpha_{n_j, k_{n_j}, t} \in \{-1, 1\}$ .

Используя теорему 1, отсюда выводим результат для п.в. путей  $x$ .

**Теорема 8.** Пусть  $P$  — автоморфизм Паскаля пространства с мерой  $(I, \mathcal{B}, \mu_p)$ ,  $N$  — натуральное число и  $g \in \mathcal{F}_N$  — некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда для  $\mu_p$ -п.в.  $x$  стабилизирующая последовательность  $l_n(x)$  может быть выбрана так, что предельной функцией является функция  $\alpha_{g, x} T_p^1$ , где  $\alpha_{g, x} = \pm 1$ .

## §5. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В теории чисел известной задачей является поиск явной формулы для суммы

$$S_g(N) = \sum_{n=0}^{N-1} g(s_2(n))$$

при заданной функции  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . В классическом случае, когда  $g(y) \equiv y$ , ответ представляется формулой Троллопа–Деланжа, см. [35]. В современных работах [29] и [20] рассмотрены случаи  $g(y) = \binom{y}{m}$ ,  $m > 0$ ,  $g(y) = y^m$  и даже  $g(y, t) = \exp(ty)$ . Оказывается, что в каждом из этих случаев сумма  $S_g(N)$  имеет явное выражение, ключевой частью которого являются линейные комбинации функций  $T_a^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $0 < a < 1$ .

Графики линейной комбинации функций  $T_a^1$  и  $T_a^2$  возникают как предельные кривые автоморфизма Паскаля. Отметим, что, так как башню  $\tau_{n,k}$  автоморфизма Паскаля можно рассматривать как набор натуральных чисел  $\{j : s_2(j) = k\}$ , упорядоченных по возрастанию (см., например, [7]), изучаемые нами эргодические суммы (6) соответствуют “условным суммам”

$$\sum_{0 \leq j < 2^n, s_2(j)=k} g(j),$$

где функция  $g$  зависит от конечного числа младших разрядов в двоичической записи натурального числа  $j$ .

## §6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

### 6.1. Доказательство леммы 1.

**Доказательство.** Рассмотрим матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ . Через  $B_k(x)$  обозначим  $k$ -кратное кронекеровское произведение  $(A(x))^{\otimes k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Записывая это произведение последовательно и пользуясь свойством  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ , по индукции легко проверить, что

$$B_k(x)B_k(y) = B_k(x + y). \tag{41}$$

Строки и столбцы матрицы  $B_k$  удобно нумеровать, начиная с нуля.

По индукции проверяется, что при  $k \in \mathbb{N}$  и  $0 \leq i, j < 2^k$  элемент матрицы  $B_k(x)$  с номером  $(i, j)$  имеет вид

$$(B_k(x))_{i,j} = \begin{cases} x^{s_2(i-j)}, & \text{если } i > j \text{ и } (i-j) \oplus j = i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{42}$$

База индукции: при  $k = 1$  равенство (42) очевидно. Пусть оно доказано при некотором  $k$ . Положим  $r = 2^k$ . Функция  $s_2(\cdot)$  удовлетворяет

уравнениям

$$\mathbf{s}_2(j+r) = \mathbf{s}_2(j) + 1, \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \quad (43)$$

$$\mathbf{s}_2(j+r) = \mathbf{s}_2(j), \quad j = r, r+1, \dots, 2r-1. \quad (44)$$

Так как  $B_{k+1} = \begin{pmatrix} B_k & \mathbb{O} \\ xB_k & B_k \end{pmatrix}$ , нужно проверить формулу (42) для каждого из четырех блоков. Пусть, например,  $r \leq i < 2r$  и  $0 \leq j < r$ . Из формулы (43) вытекает равенство  $\mathbf{s}_2(i-r-j) + 1 = \mathbf{s}_2(i-r-j+r) = \mathbf{s}_2(i-j)$ . Тогда по индукционному предположению получаем

$$\begin{aligned} (B_{k+1}(x))_{i,j} &= \begin{cases} x \cdot x^{\mathbf{s}_2(i-r-j)}, & \text{если } (i-r-j) \oplus j = i, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^{\mathbf{s}_2(i-j)}, & \text{если } (i-j) \oplus j = i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогичная проверка для остальных блоков может быть проведена с использованием уравнения (44) вместо (43).

По теореме Куммера для натуральных  $t$  и  $s$  равенство  $t \oplus s = t + s$  выполнено тогда и только тогда, когда биномиальный коэффициент  $\binom{t+s}{s}$  нечетный, откуда следует, что

$$(B_k(x))_{ij} = \begin{cases} x^{\mathbf{s}_2(i \oplus j)}, & \text{если } \binom{i}{j} \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

(мы также воспользовались тем, что  $i-j = ((i-j) \oplus j) \oplus j = i \oplus j$ ).

Это объясняет структуру “треугольника Серпинского”, образуемого ненулевыми элементами матрицы  $B_k(x)$ , например,

$$B_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & x & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x^2 & x & x^2 & x & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Из (41) следует, что  $B_k(x)B_k(-x) = B_k(0)$  – единичная матрица размера  $k \times k$ .

Пусть  $t > s > 1$ . Теперь докажем соотношение (23). Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^t (-1)^{s_2(t-j)} \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \alpha^{s_2(t \oplus j) + s_2(s \oplus j)} &= \sum_{j=0}^t (B_t(-\alpha))_{t,j} (B_t(\alpha))_{j,s} \\ &= (B_t(0))_{t,s} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

6.1.1. *Вывод формулы (21)*. Мы докажем, что

$$\mathbb{E}_{\mu_p} w_s = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} p^l (1-p)^{m-l}, \quad m = s_2(s).$$

Для этого покажем сначала, что  $\mathbb{E}_{\mu_p} w_s = \mathbb{E}_{\mu_p} w_t$  для всякого  $t$ , такого, что  $s_2(t) = m$ . Затем, положив  $t$  равным  $2^m - 1$ , мы получим требуемую формулу.

Пусть  $s < 2^N$ ; положим  $m = s_2(s)$  и  $t = 2^m - 1$ . Таким образом,  $t$  – это наименьшее натуральное число, меньшее  $s$ , с тем же количеством единиц в двоичной записи.

Набор башен  $\{\tau_{N,l}\}_{l=0}^N$  содержит все  $2^N$  цилиндров ранга  $N$ , функции Уолша  $w_s$  и  $w_t$  определены на этих башнях. Поэтому

$$\mathbb{E}_{\mu_p} w_s = \sum_{l=0}^N \int_{x \in \tau_N^l} w_s(x) d\mu_p.$$

Напомним, что по определению  $h_{N,l}^{w_s} = \sum_{j=1}^{\binom{N}{l}} w_s(\tau_{n,k}(j)) = F_{N,l}^{w_s}(\binom{N}{l})$ ,

а в силу того, что все цилиндры, принадлежащие башне  $\tau_{N,l}$ , имеют одинаковую  $\mu_p$ -меру, равную  $p^l(1-p)^{N-l}$ , имеем

$$h_{N,l}^{w_s} = \frac{1}{p^l(1-p)^{N-l}} \int_{x \in \tau_N^l} w_s(x) d\mu_p.$$

Из формулы (25) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{x \in \tau_N^l} w_s(x) d\mu_p &= F_{N,l}^{w_s} \binom{N}{l} p^l (1-p)^{N-l} \\ &= F_{N,l}^{w_t} \binom{N}{l} p^l (1-p)^{N-l} = \int_{x \in \tau_N^l} w_t(x) d\mu_p. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}_{\mu_p} w_s = \mathbb{E}_{\mu_p} w_t \text{ при } \mathbf{s}_2(s) = \mathbf{s}_2(t).$$

Функция  $w_t$  полностью определена уже на башнях  $\{\tau_{m,l}\}_{l=0}^m$ . Наконец,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_p} w_s &= \sum_{l=0}^m \int_{x \in \tau_m^l} w_t(x) d\mu_p \\ &= \sum_{l=0}^m h_{m,l}^{w_t} p^l (1-p)^{m-l} = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} p^l (1-p)^{m-l}. \end{aligned}$$

Последнее равенство использует формулу  $h_{m,l}^{w_t} = (-1)^l \binom{m}{l}$ , которая следует из формулы (26).

6.1.2. *Вывод формулы (25)*. Пусть функция Уолша  $w_t(y)$  является произведением  $m = \mathbf{s}_2(t)$  различных функций Радемахера

$$\prod_{i=0}^{N-1} (r_{i+1}(y))^{t_i} = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y),$$

где  $t_i \in \{0, 1\}$ . Пусть натуральное число  $i = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_1}{1}$  задает путь  $(x_j)_1^n$  в графе Паскаля, ведущий из вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, k)$ , такой, что  $x_j = 0$  при  $1 \leq j \leq N$ . Тогда биномиальное разложение числа  $i$  удовлетворяет свойству  $a_1(i) \geq N$ . По определению  $F_{n,k}^{w_t}(i)$  равно сумме значений функции  $w_t$  на всех путях, не превосходящих в обратном лексикографическом порядке путь, соответствующий числу  $i$ .

Разобьем все пути в графе Паскаля, ведущие в вершину  $(n, k)$ , на два класса, в соответствии с тем, какое значение (1 или  $-1$ ) принимает на них функция  $w_t$ . Каждый путь, в свою очередь, разобьем на две части: начало длины  $N$  и хвост длины  $\binom{n}{k} - N$ . Начало длины  $N$

всякого пути заканчивается в одной из вершин  $(N, j)$ ,  $0 \leq j \leq N$ , и полностью определяет значение функции  $w_i$  на всем пути. Количество путей из первого класса, проходящих через вершину  $(N, j)$ , дает следующая комбинаторная лемма.

**Лемма 3.** Пусть для натурального числа  $N$  заданы  $m$  различных натуральных чисел  $\{n_i\}_{i=1}^m$ , таких, что  $1 \leq n_i \leq N$ . Число векторов  $(r_1, \dots, r_N)$ , состоящих из  $N$  единиц и минус единиц, удовлетворяющих условиям

$$1) \prod_{i=1}^m r_{n_i} = 1, \quad 1 \leq n_i \leq N, \quad 1 \leq i \leq m, \quad m \leq N,$$

$$2) \#\{i \mid 1 \leq i \leq N, r_i = 1\} = j,$$

равно

$$\sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{N-j-2l}.$$

Пути из второго класса, проходящие через вершину  $(N, j)$ , — это все оставшиеся пути, число которых равно

$$\begin{aligned} \binom{N}{j} - \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{N-j-2l} \\ = \sum_{l: 1 \leq 2l+1 \leq m} \binom{m}{2l+1} \binom{N-m}{N-j-2l-1}. \end{aligned}$$

Количество хвостов считается по формуле  $\binom{a_k-N}{k-j} + \dots + \binom{a_1-N}{1-j}$  (биномиальные коэффициенты доопределены нулем).

В итоге получаем формулу

$$F_{n,k}^{w_i}(i) = \sum_{j=0}^N \left[ 2 \cdot \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{N-j-2l} - \binom{N}{j} \right] \cdot \left( \binom{a_k-N}{k-j} + \dots + \binom{a_1-N}{1-j} \right). \quad (45)$$

6.1.3. *Асимптотическое разложение (36).* Запишем формулу (35) следующим образом:

$$k_m^{(p)}(np + v) = \frac{1}{m!} \left( \frac{npq}{2} \right)^l H_m \left( \frac{v}{\sqrt{2pqn}} \right) + O(n^{l-1/2}), \quad (46)$$

где  $l = m/2$  и  $|v/\sqrt{n}| < A$ . Из условия 2 п. 4.3.1 следует, что если  $m$  четно, то  $|v| \rightarrow \infty$ .

Покажем, что главный член разности  $k_m^{(p)}(k-i, n-i) - k_m^{(p)}(k, n)$  полиномов Кравчука может быть записан в виде

$$\frac{1}{m!} \left( \left( \frac{(n-i)pq}{2} \right)^l H_m \left( \frac{v-i+ip}{\sqrt{2pq(n-i)}} \right) - \left( \frac{npq}{2} \right)^l H_m \left( \frac{v}{\sqrt{2pqn}} \right) \right).$$

Полином Кравчука  $k_m^{(p)}(np+v, n)$  можно рассматривать как полином  $P(v, n)$  двух переменных  $n$  и  $v$ :

$$P(v, n) = k_m^{(p)}(np+v, n) = \sum_{j, \nu} c_{j, \nu} v^j n^\nu$$

(здесь и далее  $j$  и  $\nu$  – целые неотрицательные числа, а коэффициенты  $c_{j, \nu}, b_{j, \nu}, d_{j, \nu}, r_{j, \nu}$  – вещественные). Рассмотрим также два полинома  $Q$  и  $R$ , определенные следующим образом:

$$Q(v, n) = \frac{1}{m!} \left( \frac{npq}{2} \right)^l H_m \left( \frac{v}{\sqrt{2pqn}} \right) = \sum_{j=0}^{[l]} c_j v^{m-2j} n^j$$

и

$$R(v, n) = k_m^{(p)}(np+v, n) - Q(v, n).$$

Асимптотическое разложение (46) влечет соотношение  $R(v, n) = O(n^{l-1/2})$ , а значит,

$$R(v, n) = \sum_{j, \nu: j/2 + \nu \leq l-1/2} b_{j, \nu} v^j n^\nu.$$

Пусть  $i$  – целое неотрицательное число. Тогда получаем, что

$$R(v-i, n-i) - R(v, n) = \sum_{j, \nu: j/2 + \nu \leq l-1} d_{j, \nu} v^j n^\nu$$

и

$$Q(v-i, n-i) - Q(v, n) = \sum_{j, \nu: j/2 + \nu \leq l-1/2} r_{j, \nu} v^j n^\nu.$$

Поэтому в дополнительном предположении, что все коэффициенты  $r_{j, \nu}$  одновременно не равны нулю и при четном  $m$  выполнено соотношение  $|v| \rightarrow \infty$ , получаем, что главный член разности  $P(v-i, n-i) - P(v, n)$  задается разностью  $Q(v-i, n-i) - Q(v, n)$  полиномов Эрмита. Тот факт, что все функции являются полиномами, показывает, что предположение  $|v/\sqrt{n}| < A$  несущественно: этот же вывод верен при  $v = o(n)$ .

Однако нам необходимо найти главный член взвешенной разности  $\binom{n-i}{m}^{-1} k_m^{(p)}(k-i, n-i) - \binom{n}{m}^{-1} k_m^{(p)}(k, n)$ .



Для этого введем коэффициенты

$$\begin{aligned} A_{n,l}^p &= \left(\frac{1}{2pqn}\right)^l \left(1 + l(2l-1)\frac{1}{n}\right), \\ B_{n,l}^p &= \left(\frac{1}{2pqn}\right)^l \frac{l}{n}, \\ C_n^p &= -\frac{2m\sqrt{q}}{\sqrt{2np}}, \\ H_{m,n,v}^p &= H_m\left(\frac{v}{\sqrt{2npq}}\right). \end{aligned}$$

Используя их, мы можем записать

$$\frac{1}{m!} \binom{n-i}{m}^{-1} \left(\frac{(n-i)pq}{2}\right)^l = A_{n,l}^p + B_{n,l}^p i + o(n^{l-1}). \quad (47)$$

Из хорошо известного тождества

$$H_m(x+y) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} H_j(x) (2y)^{m-j}$$

следует, что

$$\begin{aligned} H_m\left(\frac{v-i+ip}{\sqrt{2pq(n-i)}}\right) &= H_m\left(\frac{v-i+ip}{\sqrt{2pqn}}\right) + O(n^{l-1}) \\ &= H_{m,n,v}^p + C_n^p H_{m-1,n,v}^p i + O(n^{l-1}) \end{aligned} \quad (48)$$

(первое равенство следует из того, что  $\frac{v+j}{\sqrt{2pq(n-i)}} = \frac{v+j}{\sqrt{2pqn}} + o(1/n^{1/2})$  для  $j \in \mathbb{R}$  и  $v = o(n)$ ).

Используя (47) и (48), мы получаем, что главный член асимптотического разложения разности  $\binom{n-i}{m}^{-1} k_m^{(p)}(k-i, n-i) - \binom{n}{m}^{-1} k_m^{(p)}(k, n)$  имеет вид

$$-2^m \binom{n}{k} \frac{2m\sqrt{q}}{\sqrt{2np}} \left(\frac{1}{2pqn}\right)^{m/2} H_{m-1}\left(\frac{k-np}{\sqrt{2npq}}\right) i.$$

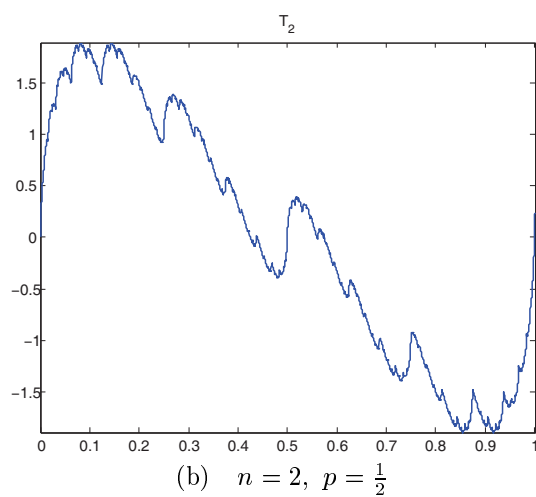
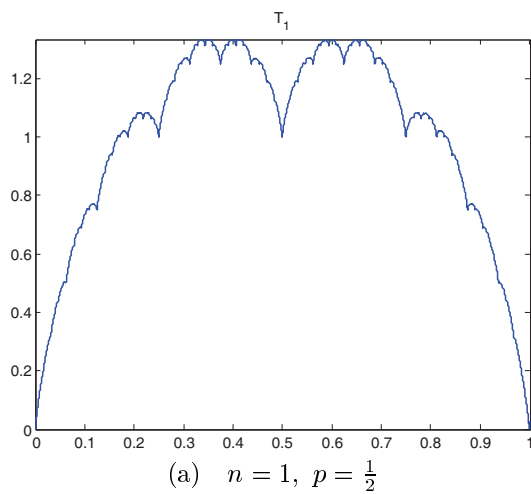
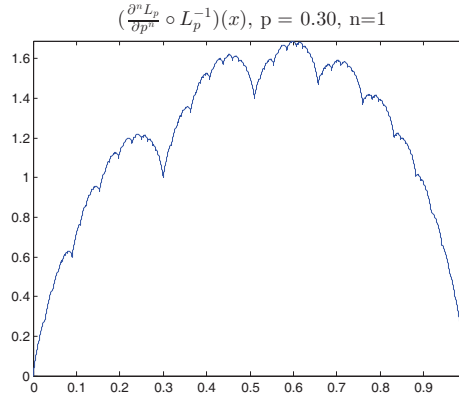
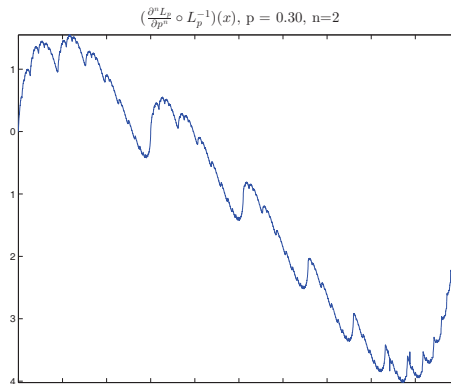
**6.2. Иллюстрации.**6.2.1. *Графики функций  $T_p^n$ .*

Рис. 3



(a)  $n = 1, p = 0.3$

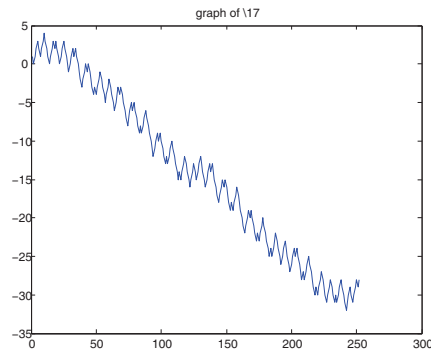
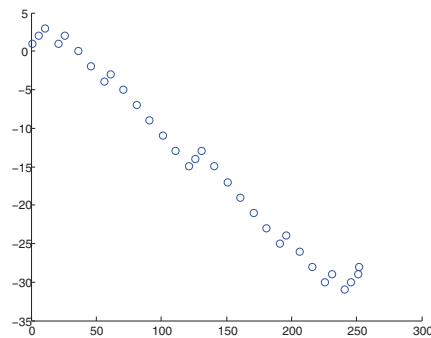


(b)  $n = 2, p = 0.3$

Рис. 4

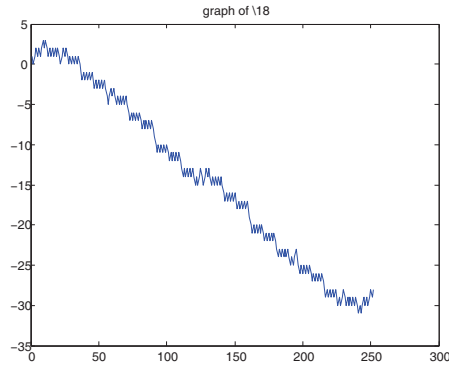
6.2.2. *Примеры эргодических сумм.* Для примера рассмотрим функции Уолша с индексами 17 и 18. Имеем  $w_{17} = r_1 r_5$ ,  $w_{18} = r_2 r_5$ . В обоих случаях  $N = 5$ ,  $m = 2$ . Явная формула для аргумента  $i \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющего свойству  $a_1(i) \geq 5$ , согласно формуле (25) имеет вид

$$\begin{aligned}
 F_{10,5}^{w_{17}}(i) &= \sum_{j=0}^5 24 \frac{j^2 - 5j + 5}{j! (5-j)!} \partial_{n-k}^{5,j}(i) \\
 &= \partial_{n-k}^{5,0}(i) + \partial_{n-k}^{5,1}(i) - 2\partial_{n-k}^{5,2}(i) - 2\partial_{n-k}^{5,3}(i) + \partial_{n-k}^{5,4}(i) + \partial_{n-k}^{5,5}(i) = F_{10,5}^{w_{18}}(i).
 \end{aligned}$$

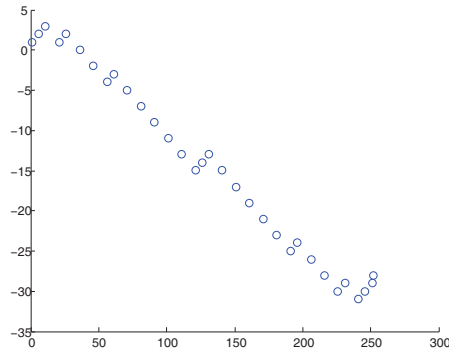
(a)  $0 \leq i \leq 252$ (b)  $i \in A_{5,2} = \{i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i \leq 252, a_1(i) \geq 5\}; |A_{5,2}| = 32$ Рис. 5. График функции  $S_x^{w_{17}}(i)$ ,  $x \in \tau_{10,5}(1)$ .

Данное равенство проиллюстрировано ниже. На рисунке слева приведены графики функций  $F_{10,5}^{w_{17}}$  и  $F_{10,5}^{w_{18}}$ , вычисленных для  $1 \leq i \leq \binom{10}{5}$ . Справа приведены их графики<sup>17</sup> для  $1 \leq i \leq \binom{10}{5}$  с представлениями в виде 5-каскада<sup>18</sup>, в которых  $a_1(i) \geq 5$  (данное множество обозначено через  $A_{5,2}$ ). Хотя функции  $F_{10,5}^{w_{17}}(i)$  и  $F_{10,5}^{w_{18}}(i)$  на всем множестве  $\{i : 1 \leq i \leq \binom{10}{5}\}$  различны, но в точках  $i$ , для которых в 5-каскаде  $a_1(i) \geq 5$ , они совпадают.

<sup>17</sup>См. формулу (25).<sup>18</sup>См. п. 4.2.1.



(a)  $0 \leq i \leq 252$



(b)  $i \in A_{5,2} = \{i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i \leq 252, a_1(i) \geq 5\}; |A_{5,2}| = 32$

Рис. 6. График функции  $S_x^{w_{18}}(i)$ ,  $x \in \tau_{10,5}(1)$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения*. — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
2. А. М. Вершик, *Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории*. — Зап. научн. сем. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
3. А. М. Вершик, *Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр*. — Функциональный анализ и его прил. **453**, вып. 3 (2011), 16–33.
4. М. И. Гордин, *О центральной предельной теореме для стационарных процессов*. — ДАН СССР **188**, вып. 4 (1969), 739–741.

5. М. И. Гордин, *Замечание о мартингалном методе доказательства центральной предельной теоремы для стационарных последовательностей*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **311** (2004), 124–132.
6. А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Асимптотика масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **378** (2010), 58–72.
7. А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Реализация автоморфизма Паскаля в графе конкатенаций и функция  $s_2(n)$* . — Зап. научн. сем. ПОМИ **403** (2012), 95–102.
8. А. Р. Минабутдинов, И. Е. Манаев, *Функция Крускала–Катоны, последовательность Конвея, кривая Такаги и автоморфизм Паскаля*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **411** (2013), 135–147.
9. А. Р. Минабутдинов, *Случайные отклонения эргодических сумм в автоморфизме Паскаля для меры Лебега*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **432** (2015), 224–260.
10. А. Р. Минабутдинов, *Асимптотическое разложение полиномов Кравчука*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **436** (2015), 174–188.
11. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы*, 2-е издание, Физматлит, 2003.
12. Е. М. Рудо, *Асимптотика распределений случайных блужданий на многомерных графах Паскаля и на решетках корней*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **403** (2012), 158–171.
13. P. Allaart, K. Kawamura, *The Takagi function: a survey*. — Real Anal. Exchange **37**, No. 1 (2012), 1–54.
14. L. Berg, M. Krüppel, *De Rham's singular function and related functions*. — Z. Anal. Anwendungen **19**, No. 1 (2000), 227–237.
15. P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd edition, Wiley, New York, 1995.
16. E. de Amo, M. DiazaCarrillo, J. Fernandez-Sanchez, *Singular functions with applications to fractal dimensions and generalized Takagi functions*. — Acta Appl. Math. **119**, No. 1 (2012), 129–148.
17. E. de Amo, J. Fernandez-Sanchez, *A generalised dyadic representation system*. — Int. J. Pure Appl. Math. **52**, No. 1 (2009), 49–66.
18. G. de Rham, *Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles*. — Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Mat. **16** (1956), 101–113.
19. R. Girgensohn, *Nowhere differentiable solutions of a system of functional equations*. — Aequationes Math. **47**, No. 1 (1994), 89–99.
20. R. Girgensohn, *Digital sums and functional equations*. — Integers **12**, No. 1 (2012), 141–160.
21. A. Hajan, Y. Ito, S. Kakutani, *Invariant measure and orbits of dissipative transformations*. — Adv. Math. **9**, No. 1 (1972), 52–65.
22. G. Halasz, *Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem*. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **28**, No. 3–4 (1976), 389–395.
23. É. Janvresse, T. de la Rue, *The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli*. — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **40**, No. 2 (2004), 133–139.
24. É. Janvresse, T. de la Rue, Y. Velenik, *Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation*. — Stoch. Dyn. **5**, No. 1 (2005), 1–25.

25. S. Jukna, *Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science*. Springer, 2010.
26. S. Kakutani, *A problem of equidistribution on the unit interval*  $[0, 1]$ . — Lect. Notes Math. **541** (1976), 369–375.
27. K. Kawamura, *On the set of points where Lebesgue’s singular function has the derivative zero*. — Proc. Japan Acad. Ser. A **87**, No. 9 (2011), 162–166.
28. M. Krawtchouk, *Sur une généralisation des polynômes d’Hermite*. — C. R. Acad. Sci. Ser. Math. **189** (1929), 620–622.
29. M. Krüppel, *De Rham’s singular function, its partial derivatives with respect to the parameter and binary digital sums*. — Rostock. Math. Kolloq. **64** (2009), 57–74.
30. M. Lacey, *On weak convergence in dynamical systems to self-similar processes with spectral representation*. — Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 767–778.
31. N. R. Ladhawala, *Absolute summability of Walsh–Fourier series*. — Pacific J. Math. **65**, No. 1 (1976), 103–108.
32. Z. Lomnicki, S. Ulam, *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I. Variables indépendantes*. — Fund. Math. **23** (1934), 237–278.
33. X. Mela, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation*. — Ergodic Theory Dynam. Systems **25**, No. 1 (2005), 227–256.
34. T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*. — Proc. Phys.-Math. Soc. **5–6** (1903), 176–177.
35. E. Trollope, *An explicit expression for binary digital sums*. — Math. Mag. **41** (1968), 21–25.
36. D. Volný, *Invariance principles and Gaussian approximation for strictly stationary processes*. — Trans. Amer. Math. Soc. **35**, No. 8 (1999), 3351–3371.

Lodkin A. A., Minabutdinov A. R. Limiting curves for the Pascal adic transformation.

The paper generalizes the results by E. Janvresse, T. de la Rue, and Y. Velenik on fluctuations in ergodic sums for the Pascal adic transformation to the case of an arbitrary ergodic invariant measure and cylinder functions.

С.-Петербургский  
государственный университет,  
С.-Петербург, Россия

Поступило 12 октября 2015 г.

Национальный  
исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, С.-Петербург, Россия.  
E-mail: aminabutdinov@gmail.com