Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 437, 2015 г.

А. Ю. Кузнецова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ СЕМЕЙСТВОМ ЧАСТИЧНЫХ ИЗОМЕТРИЙ

§1. Введение

В последнее время особое внимание уделяется C^*-алгебрам, порожденным частичными изометриями. Как правило, основным объектом исследования является алгебра, порожденная набором операторов частичной изометрии, удовлетворяющих различным тождествам. Один из примеров – алгебра Кунца–Кригера $\mathcal{O}_A$, возникающая при изучении топологических марковских цепей ([7]). В [24] предложено новое семейство C^*-алгебр $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, обобщающее алгебры Кунца–Кригера. Алгебры Кунца–Пимзнера исследовались во многих работах, в частности [8, 9, 17, 25]. Среди алгебр, порожденных частичными изометриями, можно упомянуть и алгебры, ассоциированные с операторами подсдвига ([20, 21]). В [12] было показано, что алгебра $\mathcal{T}(G, P)$, которая исследовалась в работах [19, 22], тоже может рассматриваться как алгебра, порожденная частичными изометриями с соотношениями.

Интересно было бы рассмотреть такое обобщение алгебры Кунца, при котором алгебра порождается набором (конечным или счетным) уже частичных изометрий, чьи проекторы на начальные и конечные пространства суммируются до некоторых проекторов (возможно, до единицы). Описать полностью такие алгебры не представляется возможным. В данной работе рассматривается класс алгебр такого рода.

В работах [1, 13] была предложена конструкция C^*-алгебры $C^*_\varphi(X)$. Отправной точкой является заданное на произвольном счетном множестве X отображение φ, которое порождает (не изометрическое) представление $\pi : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow B(l^2(X))$ по формуле $\pi(n)f = f \circ \varphi^n$ для $f \in l^2(X)$. Когда φ является инъекцией (не биекцией), алгебра $C^*_\varphi(X)$ канонически изоморфна алгебре Теплица. В общем случае с оператором композиции T_φ (где $T_\varphi f = f \circ \varphi$) связано конечное или счетное

Ключевые слова: C^*-алгебра, частичная изометрия, ковариантная система, градуированная C^*-алгебра.

семейство частичных изометрий $\{U_k\}$, которое и порождает алгебру $C^*_\varphi(X)$. При этом выполняются соотношения

$$\begin{cases} U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \cdots + U_m^*U_m + \cdots = P_\varphi, \\ U_1U_1^* + U_2U_2^* + \cdots + U_mU_m^* + \cdots = Q_\varphi, \end{cases}$$

где операторы P_φ и Q_φ – проекторы, определенные заданным отображением φ. В данной работе будут представлены основные свойства и структура алгебры $C^*_\varphi(X)$. Работа в основном представляет собой краткий обзор цикла статей [1–4, 13–15, 18], посвященных C^*-алгебрам, порожденным отображением. Если результат снабжен доказательством, то либо он является обобщением ранее опубликованного, либо для него приведено более короткое доказательство.

§2. Порождающее семейство изометрий

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ – отображение счетного множества X в себя, удовлетворяющее условию $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] < \infty$ для любого $x \in X$. Для наглядности удобно представить множество X с заданным на ним отображением как ориентированный граф (X, φ) с вершинами в точках этого множества и ребрами $(x, \varphi(x))$. В данной работе мы будем рассматривать C^*-алгебры $C^*_\varphi(X)$, ассоциированные с такими графами. Алгебры, порожденные ориентированными графами, понимаются обычно в том смысле, что дуги и вершины графа интерпретируются как частичные изометрии, порождающие алгебру, с определенными графом соотношениями на проекторы на начальные и конечные подпространства [8, 16, 25]. Алгебра $C^*_\varphi(X)$ не является граф-алгеброй в этом смысле, и мы будем называть ее C^*-алгеброй, порожденной отображением.

Заданное отображение естественным образом устанавливает структуру множества X и задает на нем частичный порядок. Множество X разбивается на непересекающиеся подмножества, а именно

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} X_k, \text{ где } X_k = \{y \in X : \operatorname{card}\varphi^{-1}[y] = k\}. \tag{1}$$

Элемент $x \in X$, для которого $\varphi^{-1}[y] = \varnothing$, назовем *$\varphi$-начальным* (или просто *начальным*). Отображение φ задает еще одно разбиение множества X. Пусть $E^k_y = \{x \in X : \varphi^k(x) = y\}$, $k \in \mathbb{N}$, и пусть $E_y = E^1_y$ — полный прообраз элемента y. Очевидно, что если $y_1 \neq y_2$, то

$E^k_{y_1} \cap E^k_{y_2} = \varnothing$, и для каждого k

$$X = \bigcup_{y \in X} E^k_y. \tag{2}$$

Будем писать $x \prec y$, если найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n(y) = x$. Будем говорить, что элементы x и y являются φ-эквивалентными в n-м порядке ($x \overset{\varphi,n}{\sim} y$), если они принадлежат некоторому множеству E^n_z, где $z = \varphi^n(x) = \varphi^n(y)$. Элемент x, такой, что $\varphi^n(x) = x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, назовем *φ-циклическим* (или просто *циклическим*).

Пусть $l^2(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} : \sum\limits_{x \in X} |f(x)|^2 < \infty \right\}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g) = \sum\limits_{x \in X} f(x)\overline{g(x)}$. Семейство функций $\{e_x\}_{x \in X}$, где $e_x(y) = \delta_{x,y}$ (здесь $\delta_{x,y}$ — символ Кронекера), образует ортонормированный базис в $l^2(X)$. На естественный (связанный с X) базис можно распространить отношение частичного порядка и эквивалентности, полагая $e_x \prec e_y$, если $x \prec y$, и $e_x \overset{\varphi}{\sim} e_y$, если $x \overset{\varphi}{\sim} y$.

Отображение φ индуцирует оператор

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X), \quad T_\varphi f = f \circ \varphi. \tag{3}$$

Можно проверить, что сопряженный к T_φ оператор вычисляется по формуле

$$(T^*_\varphi f)(y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in E_y} f(x), & \text{если} \quad E_y \neq \varnothing; \\ 0, & \text{если} \quad E_y = \varnothing. \end{cases} \tag{4}$$

На базисных векторах операторы действуют следующим образом:

$$T_\varphi e_x = \sum_{z \in E_x} e_z, \qquad T^*_\varphi e_x = e_{\varphi(x)}. \tag{5}$$

Из (5) следует, что оператор T_φ определен на $P(X)$ – пространстве всех конечных линейных комбинаций базисных функций — и является сопряженным к плотно определенному оператору, а значит, допускает замыкание. Далее, считая отображение φ фиксированным, мы будем обозначать операторы T_φ и T^*_φ через T и T^*.

Предложение 2.1 ([4, теорема 2]). *Операторы TT^* и T^*T, заданные на $P(X)$, являются в существенном самосопряженными.*

Из (5) следует, что точечные спектры операторов TT^* и T^*T совпадают (за исключением, возможно, нуля) и лежат в $\mathbb{Z}_+$. С их помощью получаем следующие разбиения гильбертова пространства:

$$l^2(X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} l^2(X_k), \quad l^2(X_k) = \{f \in l^2(X) : T^*Tf = kf\}; \tag{6}$$

$$l^2(X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} l^2_k, \quad l^2_k = \{f \in l^2(X) : TT^*f = kf\}. \tag{7}$$

Здесь предполагается, что если ненулевое число k не принадлежит спектру операторов TT^* и T^*T, то соответствующие пространства $l^2(X_k)$ и l^2_k нулевые.

Замечание 2.2. Из (1) следует, что $l^2(X_0) = 0$ в случае сюръективного отображения, а из (2) и (5) следует, что $l^2_0 = 0$ в случае инъективного отображения.

Таким образом,

$$T^*T = \underset{k\in\mathbb{N}}{\oplus} kP_k \qquad \text{и} \qquad TT^* = \underset{k=\in\mathbb{N}}{\oplus} kQ_k,$$

где P_k и Q_k — проекторы на $l^2(X_k)$ и l^2_k.

Предложение 2.3. *Проекторы P_k и Q_k эквивалентны.*

Доказательство. Из формул (1), (2) и (5) следует, что базисом в каждом пространстве $l^2(X_k)$ служат векторы $\{e_x\}_{x\in X_k}$, а векторы

$$g_y = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{x\in E_y} e_x, \quad y \in X_k,$$

образуют базис в l^2_k, $k \neq 0$. Можно проверить, что оператор

$$U_k e_y = \begin{cases} g_y, & y \in X_k, \\ 0, & y \notin X_k, \end{cases} \tag{8}$$

является оператором частичной изометрии с начальным пространством $l^2(X_k)$ и конечным пространством l^2_k. Соответственно,

$$U_k^* e_x = \begin{cases} 0, & \operatorname{card} E_{\varphi(x)} \neq k, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} e_{\varphi(x)}, & \operatorname{card} E_{\varphi(x)} = k. \end{cases} \tag{9}$$

□

Следствие 2.4 ([4, лемма 2]). *Отображение, заданное на множестве X, индуцирует ортогональное в $l^2(X)$ семейство частичных изометрий $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$,*

$$T = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \cdots + \sqrt{m}U_m + \cdots .$$

Оператор $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_m + \cdots$ в общем случае является частичной изометрией с начальным пространством $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} l^2(X_k)$ и конечным пространством $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} l^2_k$; имеем $U^*U = P_\varphi$ и $UU^* = Q_\varphi$. Оператор U является изометрией в случае сюръективного отображения и коизометрией в случае инъективного отображения (замечание 2.2).

Алгеброй, порожденной заданным на множестве X отображением φ, называется операторная подалгебра $C^*_\varphi(X) \subset B(l^2(X))$, порожденная указанным в следствии 2.4 семейством частичных изометрий. При этом образующие удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \cdots + U_m^*U_m + \cdots = P_\varphi, \\ U_1U_1^* + U_2U_2^* + \cdots + U_mU_m^* + \cdots = Q_\varphi. \end{cases}$$

Если мощность прообраза под действием φ ограничена в совокупности, то отображение индуцирует конечное семейство частичных изометрий ([1,13]) и ограниченный оператор $T = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \cdots + \sqrt{m}U_m$, где $m = \sup\limits_{x\in X} \operatorname{card} \varphi^{-1}[x]$. В этом случае алгебра $C^*_\varphi(X)$ порождается единственным оператором T ([1, теорема 3.4]). Подробно о порождающем семействе частичных изометрий можно прочитать в [1, 4], единично порожденные алгебры $C^*_\varphi(X)$ исследовались в [1, 2, 13, 14, 18]. В [1] дана классификация алгебр $C^*_\varphi(X)$ в случае инъективного отображения.

§3. Структурные свойства алгебры $C^*_\varphi(X)$

Сначала опишем структуру алгебры $C^*_\varphi(X)$ в случае, когда на множестве X отсутствуют циклические элементы. Алгебры, порожденные отображением, не допускающим конечные орбиты, исследовались в работах [3, 14, 15]. При отсутствии циклических элементов структуру алгебры $C^*_\varphi(X)$ можно описать, используя понятие монома и его индекса. Операторы частичной изометрии из множеств $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ (обозначим их через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^*$ соответственно) будем называть *элементарными мономами*, а конечное произведение элементарных мономов – *мономом*. Минимальное число элементарных мономов,

участвующих в представлении монома V в виде произведения, назовем *длиной* монома и будем обозначать $d(V)$. По определению положим $\operatorname{ind} U_k = 1$ и $\operatorname{ind} U_k^* = -1$. Индексом $\operatorname{ind} V$ ненулевого монома V будем называть число, равное сумме индексов элементарных мономов, произведение которых равно V. Индекс нулевого монома положим равным нулю.

Лемма 3.1 ([14, Lemma 2.2]). *Индекс монома не зависит от его представления в виде произведения элементарных мономов, и* $\operatorname{ind}(WV) = \operatorname{ind} W + \operatorname{ind} V$, *где* V *и* W *— ненулевые мономы.*

Линейные комбинации мономов плотны в $C_\varphi^*(X)$, и множество всех мономов вместе с нулевым образует мультипликативную полугруппу $\operatorname{Mon}(X)$. Множество мономов нулевого индекса образует подполугруппу $\operatorname{Mon}_0(X)$. Операторное пространство, порожденное мономами индекса n, обозначим через $C_{\varphi,n}$.

Рассмотрим действие единичной окружности на $C_\varphi^*(X)$. (Подробно о действии окружности на C^*-алгебре можно прочитать в [10, 23]). Для заданного действия $\alpha : S^1 \longrightarrow \operatorname{Aut}\mathfrak{A}$ на некоторой C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$ определяется *спектральное подпространство*

$$\mathfrak{A}_n = \{A \in \mathfrak{A} : \alpha_z(A) = z^n A \quad \text{для} \quad z \in S^1\}$$

и *спектральный проектор*

$$\mathcal{P}_n : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}, \quad \mathcal{P}_n(A) = \int\limits_{S^1} z^{-n}\alpha_z(A)\,dz, \quad A \in \mathfrak{A},$$

с образом $\mathfrak{A}_n$. Подалгебра $\mathfrak{A}_0$ является *неподвижной подалгеброй* для действия единичной окружности. Спектральный проектор на неподвижную подалгебру является условным ожиданием (см, например, [5, II.6.10.4]).

Теорема 3.2. *Существует такое непрерывное представление группы* S^1 *в группу автоморфизмов алгебры* $C_\varphi^*(X)$, *что* n*-е спектральное подпространство совпадает с операторным пространством* $C_{\varphi,n}$.

Доказательство. Зададим на мономах действие единичной окружности по формуле

$$\alpha : S^1 \longrightarrow \operatorname{Aut} C_\varphi^*(X), \quad \alpha(z)V = z^{\operatorname{ind} V}V, \quad V \in \operatorname{Mon}(X), \tag{10}$$

и продолжим его по непрерывности. Тогда множество $\{A \in C^*_\varphi(X) : \alpha_z(A) = z^n A\}$ совпадает $C_{\varphi,n}$. Подалгебра $C_{\varphi,0}$, порожденная мономами из подполугруппы $\mathrm{Mon}_0(X)$, является неподвижной подалгеброй относительно действия окружности, и существует условное ожидание $\mathcal{P}_0 : C^*_\varphi(X) \longrightarrow C_{\varphi,0}$, $\mathcal{P}_0(A) = \int\limits_{S^1} \alpha_z(A)\, dz$. □

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.3. *C^*-алгебра, порожденная отображением, не допускающим циклические элементы, является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй, причем градуировка порождается ковариантной системой*

$$(C^*_\varphi(X), S^1, \alpha).$$

В [14] подробно рассмотрено действие единичной окружности на C^*-алгебре, порожденной отображением (с ограниченной в совокупности мощностью прообразов), и приведен аналогичный результат (Theorem 3.3). Там же приведен и следующий результат ([14, Lemma 2.5]).

Замечание 3.4. Для любого монома $W \in \mathrm{Mon}(X)$ множество матричных коэффициентов $\{(We_x, e_y)\}_{x,y\in X}$ конечно.

Более детально структура полугруппы $\mathrm{Mon}(X)$ была изучена в работах [3, 15]. Моном V назовем *правым делителем* монома W, если $W = V'V$, где V' – некоторый моном. Скажем, что моном W *положительно определен*, если индекс любого его правого делителя неотрицателен. Иначе говоря, W положительно определен, если существует такое произведение $\prod\limits_{k=1}^{m} U'_{j_k}$ элементарных мономов ($U'_{j_k} \in \{U_{j_k} \cup U^*_{j_k}\}$), что $W = \prod\limits_{k=1}^{m} U'_{j_k}$ и $\mathrm{ind}\,\big(\prod\limits_{k=l}^{m} U'_{j_k}\big) \geq 0$ для любого $l \geq 1$. Пусть $\mathrm{Mon}^+(X)$ – подполугруппа всех положительно определенных мономов и $\mathrm{Mon}^+_0(X)$ – подполугруппа всех положительно определенных мономов нулевого индекса.

Лемма 3.5 ([15, Lemma 2.2])**.** *Пусть $W \in \mathrm{Mon}^+_0(X)$. Тогда W – положительный оператор с конечным спектром и множество $\{e_x\}_{x\in X}$ является подмножеством собственных векторов оператора W.*

В доказательстве используются формулы (8), (9), отношение порядка на базисных векторах и замечание 3.4. Отсюда сразу следует,

что полугруппа $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ является коммутативной подполугруппой в $\mathrm{Mon}(X)$.

Рассмотрим $C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ – аддитивную группу всех отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$ с конечным носителем с поточечным сложением. По теореме Понтрягина она изоморфна группе характеров бесконечномерного тора ($S^\infty = \prod\limits_1^\infty S^1$ с топологией Тихонова). Каждый элемент $\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ имеет вид $\mathfrak{n} = \sum\limits_{k=1}^{l} n_k\delta_k$, $n_k \in \mathbb{Z}$, где $\delta_k(m) = \delta_{k,m}$. Соответствующий элементу $\mathfrak{n}$ характер обозначим через $\chi^{\mathfrak{n}}$. Определим отображение *мульти-индекса*

$$\text{m-ind} : \mathrm{Mon}(X) \longrightarrow C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z}),$$

полагая для элементарных мономов $\text{m-ind}\, U_n = \delta_n$ и $\text{m-ind}\, U_n^* = -\delta_n$. Как и ранее, определим мульти-индекс $\text{m-ind}V$ монома V как сумму мульти-индексов элементарных мономов, участвующих в его представлении. Можно показать, опираясь на формулы (8) и (9), что если $W \in \mathrm{Mon}_0^+(X)$, то $\text{m-ind}\, W = 0$ ([15, Lemma 3.1]).

Замечание 3.6. Любой моном из $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ либо имеет вид V^*V, либо является произведением операторов такого вида. В представлении монома V участвуют только элементарные мономы из $\mathcal{U}$.

Лемма 3.7 ([15, Theorem 3.3])**.** *Отображение мульти-индекса* m-ind : $\mathrm{Mon}(X) \longrightarrow C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ *не зависит от представления монома и удовлетворяет условиям*

$$\text{m-ind}(VW) = \begin{cases} \text{m-ind}(V) + \text{m-ind}(W), & \textit{если} \quad VW \neq 0; \\ 0, & \textit{если} \quad VW = 0. \end{cases}$$

Пусть $C_{\varphi,\mathfrak{n}}$ — операторное пространство, порожденное мономами мульти-индекса $\mathfrak{n}$. Аналогично формуле (10) на $C_\varphi^*(X)$ можно задать действие группы S^∞:

$$\tau : S^\infty \longrightarrow \mathrm{Aut}\, C_\varphi^*(X), \quad \tau(z)V = \chi^{\text{m-ind}V}V, \quad V \in \mathrm{Mon}(X). \tag{11}$$

Рассмотрим C^*-алгебру $C(S^\infty, C_\varphi^*(X))$ относительно поточечного умножения с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_z \|f\|$ и естественной инволюцией $(f^*)(z) = \overline{f(z)}$. Очевидно, что $S^\infty \subset \mathrm{Aut}\, C(S^\infty, C_\varphi^*(X))$, так как $\tau_{z_1}(f)(z_2) = f(z_1z_2)$. Для каждого монома $V \in \mathrm{Mon}(X)$ определим обобщенный моном – $C_\varphi^*(X)$-значную функцию из $C(S^\infty, C_\varphi^*(X))$

– по формуле $\widehat{V}(z) = \chi^{\text{m-ind}V}(z)V$. Обобщенные мономы являются собственными векторами для действия тора τ_z, откуда следует, что алгебра $\widehat{C^*_\varphi(X)}$, порожденная всеми обобщенными мономами, инвариантна относительно сдвигов на элементы группы S^∞. Можно показать ([15, Lemma 4.1]), что алгебры $\widehat{C^*_\varphi(X)}$ и $C^*_\varphi(X)$ инволютивно изоморфны, откуда следует, что операторное пространство $C_{\varphi,\mathfrak{n}}$ определяется действием (11) бесконечномерного тора, т. е.

$$C_{\varphi,\mathfrak{n}} = \{A \in C^*_\varphi(X) : A = \int\limits_{S^\infty} \tau(z)(A)\chi^{-\mathfrak{n}}(z)d\mu(z)\},$$

причем имеет место следующее утверждение.

Следствие 3.8 ([15, Theorem 4.4]). *Выполняются следующие условия:*

1) $C_{\varphi,\mathfrak{n}_1}C_{\varphi,\mathfrak{n}_2} = C_{\varphi,\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2}$*;*
2) $C_{\varphi,\mathfrak{n}_1} \cap C_{\varphi,\mathfrak{n}_2} = \{0\}$*, если* $\mathfrak{n}_1 \neq \mathfrak{n}_2$*;*
3) $C^*_\varphi(X) = \overline{\bigoplus\limits_{\mathfrak{n}\in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})} C_{\varphi,\mathfrak{n}}}$.

Таким образом, алгебра $C^*_\varphi(X)$ является градуированной по группе $C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ ([11, 16.2]). Поскольку существует условное ожидание ([15, Corollary 4.2]) $\mathcal{P}_\mathfrak{o} : C^*_\varphi(X) \longrightarrow C_{\varphi,\mathfrak{o}}$, задаваемое формулой $\mathcal{P}_\mathfrak{o}(A) = \int\limits_{S^\infty} \tau(z)(A)(z)d\mu(z)$, алгебра $C^*_\varphi(X)$ есть топологически градуированная алгебра ([11, 19.2]).

В [3, теорема 3.1] приведен критерий неприводимости для алгебры $C^*_\varphi(X)$ (при отсутствии циклических элементов). Если граф (X,φ) связный, то для того *чтобы алгебра* $C^*_\varphi(X)$ *действовала неприводимо на* $l^2(X)$*, необходимо и достаточно, чтобы из условия* $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$ *для любого* $W \in \mathrm{Mon}(X)$ *следовало равенство* $e_x = e_y$. Подробное описание инвариантных подпространств будет дано позднее.

§4. Структура неподвижной подалгебры

Рассмотрим подалгебру $C_{\varphi,0}$, порожденную мономами нулевого индекса.

Теорема 4.1. *Неподвижная относительно действия единичной окружности подалгебра является* AF*-алгеброй.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}^l$ – C^*-подалгебра в $C_{\varphi,0}$, порожденная мономами нулевого индекса, в представлении которых участвуют только элементарные мономы из семейств $\{U_k\}_{k=1}^l$ и $\{U_k^*\}_{k=1}^l$. Имеем возрастающую цепочку вложенных друг в друга C^*-алгебр

$$\mathfrak{A}^1 \subset \mathfrak{A}^2 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}^l \subset \cdots, \quad \text{и} \quad C_{\varphi,0} = \overline{\bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}^l}.$$

В свою очередь, каждая подалгебра $\mathfrak{A}^l$ является индуктивным пределом подалгебр $\mathfrak{A}_n^l$, порожденных мономами длины не больше $2n$, в представлении которых участвуют только элементарные мономы из $\{U_k\}_{k=1}^l$ и $\{U_k^*\}_{k=1}^l$:

$$\mathfrak{A}_1^l \subset \mathfrak{A}_2^l \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n^l \subset \cdots, \quad \mathfrak{A}^l = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n^l}.$$

Структура подалгебр $\mathfrak{A}_n^l$ подробно описана в [14, Theorem 3.3]. Согласно (2), для каждого n имеем $l^2(X) = \bigoplus_{y\in X} l^2(E_y^n)$. Каждое подпространство $l^2(E_y^n)$ является инвариантным для подалгебры $\mathfrak{A}_n^l$ (это следует из [14, Corollary 2.3]) для любого l. Таким образом, каждый элемент подпространства $l^2(E_y^n)$ имеет матричное представление в виде бесконечной суммы конечномерных матриц размерности не больше $l^n \times l^n$. Согласно замечанию 3.4, таких матриц (отличных друг от друга) конечное число. Отсюда следует, что каждая алгебра $\mathfrak{A}_n^l$ изоморфна конечномерной алгебре, т. е. каждая алгебра $\mathfrak{A}^l$ является AF-алгеброй ([14, Theorem 3.3]), а значит, и $C_{\varphi,0}$ является AF-алгеброй. □

Неподвижная относительно действия тора подалгебра тоже, очевидно, является AF-алгеброй. Из доказательства теоремы 4.1 следует, что любая подалгебра, порожденная элементами из $C_{\varphi,n}C_{\varphi,-n}$ (как и $C_{\varphi,\mathfrak{n}}C_{\varphi,-\mathfrak{n}}$), является AF-подалгеброй.

Совпадение подалгебр $C_{\varphi,0}$ и $C_{\varphi,\mathfrak{o}}$ является необходимым условием коммутативности алгебры $C_{\varphi,0}$ ([15, Theorem 5.2]). Совпадение неподвижных подалгебр накладывает условия на отображение φ (см. [15, Proposition 5.1]). Помимо равенства $C_{\varphi,0} = C_{\varphi,\mathfrak{o}}$, для коммутативности требуется, чтобы любой элемент, φ-эквивалентный начальному, сам был начальным. В другой формулировке условие коммутативности неподвижной подалгебры дано в [2].

Теорема 4.2 ([2, теорема 4.2]). *Следующие условия эквивалентны*:

1) *алгебра* $C_{\varphi,0}$ *является коммутативной;*
2) *для любого* $y \in X$ *и любого* k *найдутся такие числа* $p \in \mathbb{Z}_+$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *(зависящие от* k *и* y*), что выполняется включение* $l^2(E_y^k) \subset l^2(X_p)$ *и* $l^2(E_y^k) \cap l_j^2 = 0$ *для любого* $j \neq m$.

Доказательство. Из коммутативности алгебры $C_{\varphi,0}$ следует, что будут коммутировать проекторы из семейств $\{Q_k\}$ и $\{P_k\}$. Отсюда для любого $y \in X$ из (8) и (9) получаем, что $l^2(E_y)$ содержится в некотором подпространстве $l^2(X_l)$; при этом, очевидно, $l^2(E_y) \cap l_j^2 = 0$ для любого $j \neq \operatorname{card} E_y$. Поскольку коммутировать должны любые операторы вида $V'V'^*$ и V^*V (см. замечание 3.6), то условие 2) должно выполняться для любого $l^2(E_y^k)$.

Если выполнено условие 2), то можно проверить, что любой ненулевой моном из $\mathrm{Mon}_0(X)$ будет иметь мульти-индекс 0. Более того, в этом случае мономы из $\mathrm{Mon}_0(X)$, имеющие вид $V'V'^*$ и V^*V, будут проекторами. Пусть для некоторого e_x выполняются условия $V'V'^*e_x \neq 0$ и $V^*Ve_x \neq 0$. Используя (8), (9) и условие 2), можно проверить непосредственными вычислениями, что моном V^*V является проектором на e_x, а моном $V'V'^*$ длиной $2k$ является проектором на пространство, порожденное вектором g_y, где $y \in E_{\varphi^k}^{k-1}$, и при этом $V^*VV'V'^*e_x = V'V'^*V^*Ve_x$. Остается доказать, что любой моном из $\mathrm{Mon}_0(X)$ представляется в виде произведения таких проекторов. Доказательство проводится методом математической индукции по длине монома и аналогично доказательству утверждения [15, Lemma 3.1]. □

Из теоремы 4.2 следует, что если выполнено условие 2) и τ – состояние на $C_\varphi^*(X)$, то $\tau \circ \mathcal{P}_0$ будет следовым состоянием на $C_\varphi^*(X)$.

§5. Алгебры, порожденные отображениями с циклическими элементами

Такие алгебры достаточно подробно разобраны в работе [18]. Кратко приведем основные результаты. При наличии циклических элементов не удается корректно определить индекс монома, и в общем случае лемма 3.1 неверна. Может существовать моном V_0, имеющий два представления, $V_0 = U'_{j_1}U'_{j_2}\dots U'_{j_p}$ и $V_0 = U''_{i_1}U''_{i_2}\dots U''_{i_l}$, где $U'_{j_k}(U''_{i_k}) \in \mathcal{U} \cup \mathcal{U}^*$, причем $\sum\limits_{s=1}^{p} \mathrm{ind} U'_{j_s} \neq \sum\limits_{s=1}^{l} \mathrm{ind} U''_{i_s}$. Однако тогда моном V_0 должен быть оператором конечного ранга ([18, Lemma 2.1]). Таким образом,

полугруппа $\mathrm{Mon}(X)$ содержит подполугруппу $\mathrm{Mon}^c(X)$ мономов, которые являются компактными операторами, а $C^*_\varphi(X)$ — идеал компактных операторов $J_\varphi = C^*_\varphi(X) \cap K(l^2(X))$. Пусть $\mathrm{Mon}^{\inf}(X) = \mathrm{Mon}(X) \setminus \mathrm{Mon}^c(X)$. Для мономов из $\mathrm{Mon}^{\inf}(X)$ выполняется следующее утверждение.

Лемма 5.1 ([18, Corollary 2.2]). *Пусть моном $V \in \mathrm{Mon}^{\inf}(X)$ представляется в виде*

$$V = U'_{j_1} U'_{j_2} \dots U'_{j_k}, \quad \textit{а также} \quad V = U''_{i_1} U''_{i_2} \dots U''_{i_l}.$$

Тогда $\sum\limits_{s=1}^{k} \mathrm{ind} U'_{j_s} = \sum\limits_{s=1}^{l} \mathrm{ind} U''_{i_s}$.

Это позволяет определить индекс мономов из $\mathrm{Mon}^{\inf}(X)$.

Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{C}^*_\varphi$ алгебры $C^*_\varphi(X)$ по идеалу компактных операторов J_φ. Образы частичных изометрий U_k при фактор-отображении обозначим через W_k (некоторые из них могут быть нулевыми), и пусть $\mathcal{W}$ – семейство операторов $\{W_k\}$. Поскольку при фактор-отображении проектор $U_k U_k^*$ $(U_k^* U_k)$ переходит в проектор (или в ноль), семейство $\mathcal{W}$ является образующим семейством частичных изометрий для $\mathfrak{C}^*_\varphi$. Таким образом, для фактор-алгебры можно определить понятие монома, полугруппу мономов $\mathrm{Mon}^{\mathrm{mod}}(X)$, индекс монома так же, как в § 3, причем имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.2 ([18, Lemma 2.4]). *Индекс монома W не зависит от его представления в виде произведения.*

Из леммы 5.1 следует, что индекс монома $W \in \mathrm{Mon}^{\mathrm{mod}}(X)$ совпадает с индексом его прообраза $V \in \mathrm{Mon}^{\inf}(X)$. Суммируя все вышесказанное, можно сформулировать теорему.

Теорема 5.3 ([18]). *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Алгебра $\mathfrak{C}^*_\varphi$ является $\mathbb{Z}$-градуированной C^*-алгеброй, причем градуировка порождается ковариантной системой $(S^1, \mathfrak{C}^*_\varphi, \alpha)$.*
2) *Спектральное подпространство*

$$\mathfrak{C}_{\varphi,n} = \{A \in \mathfrak{C}^*_\varphi : \alpha_z(A) = z^n A \quad \textit{для} \quad z \in S^1\}$$

является операторным пространством, порожденным мономами из $\mathrm{Mon}^{\mathrm{mod}}(X)$ индекса n.

3) *Неподвижная подалгебра $\mathfrak{C}_{\varphi,0}$ является AF-алгеброй.*

Очевидно, что если семейство $\mathcal{W}$ счетное, то на алгебре $\mathfrak{C}^*_\varphi$ можно задать и действие бесконечномерного тора (11).

Следствие 5.4 ([14, Theorem 4.1], [18, Corollary 4.3]). *Алгебра, порожденная отображением, является ядерной C^*-алгеброй.*

Доказательство. Если отображение φ не допускает циклических элементов, то алгебра $C^*_\varphi(X)$ ядерная, поскольку ядерной является неподвижная подалгебра $C_{\varphi,0}$ относительно непрерывного действия компактной группы S^1 (см. [6, 4.5.2]). Если циклические элементы допускаются, то ядерной является ее фактор-алгебра по идеалу компактных операторов, а следовательно, и $C^*_\varphi(X)$. □

Литература

1. С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, *C^*-алгебры, порожденные отображениями*, Мат. заметки **87**, вып. 5 (2010), 694–703.
2. С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, *AF-подалгебры C^*-алгебры, порожденной отображением*, Изв. вузов. матем. **54**, вып. 3 (2010), 82–87.
3. С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, Е. В. Патрин, *Об одном критерии неприводимости алгебры $C^*_\varphi(X)$*, Изв. НАН Армении матем. **49**, вып. 1 (2014), 75–82.
4. А. Ю. Кузнецова, *Об одном класе C^*-алгебр, порожденных счетным семейством частичных изометрий*, Изв. НАН Армении матем. **45**, вып. 6 (2010), 51–62.
5. B. Blackadar, *Operator Algebras*, Springer, 2006.
6. N. P. Brown, N. Ozawa, *C^*-algebras and Finite-Dimensional Approximations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
7. J. Cuntz, W. Krieger, *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56**, No. 3 (1980), 251–268.
8. V. Deaconu, A. Kumjian, P. Muhly, *Cohomology of topological graphs and Cuntz–Pimsner algebras*, `arXiv:math/9901094v1` (1999).
9. S. Doplicher, C. Pinzari, R. Zuccante, *The C^*-algebras of a Hilbert bimodule*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **1**, No. 2 (1998), 263–282.
10. R. Exel, *Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner–Voiculescu exact sequence*, `arXiv:funct-an/9211001v1` (1992).
11. R. Exel, *Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications*, `http://mtm.ufsc.br/~exel/papers/pdynsysfellbun.pdf`.
12. R. Exel, M. Laca, J. Quigg, *Partial dinamical systems and C^*-algebras generated by partial izometries*, `arXiv:funct-an/9712007` (1997).
13. S. Grigoryan, A. Kuznetsova, *C^*-algebras generated by mappings*, Lobachevskii J. Math. **29**, No. 1 (2008), 5–8.
14. S. Grigoryan, A. Kuznetsova, *On a class of nuclear C^*-algebras.* In: An Operator Theory Summer, Proceedings of the 23rd Intenational Conference on Operator Theory (Timisoara, Romania, 2010), pp. 39–50.

15. S. Grigoryan, A. Kuznetsova, *Torus action on C^*-algebra.* In: The Varied Landscape of Operator Theory, Proceedings of the 24th Intenational Conference on Operator Theory (Timisoara, Romania, 2012), pp. 127–136.
16. A. Kumjian, *Notes on C^*-algebras of graphs.* In: Operator Algebras and Operator Theory, Contemp. Math., 228, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 189–200.
17. A. Kumjian, *On certain Cuntz–Pimsner algebras*, `arXiv:math/0108194` (2001).
18. A. Kuznetsova, *C^*-algebra generated by mapping which has finite orbits*, Oper. Theory Adv. Appl. **242** (2014), 229–241.
19. M. Laka, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and Toeplitz algebras of non-abelian groups*, J. Funct. Anal. **130** (1995), 77–117.
20. K. Matsumoto, *On C^*-algebras associated with subshifts*, Internat. J. Math. **8** (1997), 357–374.
21. K. Matsumoto, *Relation among generators of C^*-algebras associated with subshifts*, Internat. J. Math. **10** (1999), 385–405.
22. A. Nica, *C^*-algebras generated by isometries and Wiener–Hopf operators*, J. Operator Theory **27** (1992), 17–52.
23. W. L. Pashke, *K-theory for actions of the circle group on C^*-algebras*, J. Operator Theory **6** (1981), 125–133.
24. M. V. Pimsner, *A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz–Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$*, Fields Inst. Commun. **12** (1997), 189–212.
25. I. Raeburn, *Graph Algebras*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

Kuznetsova A. Yu. On a class of operator algebras generated by a family of partial isometries.

The paper provides a short overview of a series of articles devoted to the C^*-algebra generated by a self-mapping on a countable set. Such an algebra can be seen as a representation of the universal C^*-algebra generated by the family of partial isometries satisfying a set of conditions. These conditions are determined by the initial mapping.

Казанский федеральный университет,
Институт физики,
ул. Кремлевская, д. 18,
420008 Казань, Россия
E-mail: `alla.kuznetsova@gmail.com`

Поступило 10 октября 2015 г.