Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 437, 2015 г.

Д. А. Заев

ОБ ЭРГОДИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧЕЙ КАНТОРОВИЧА

§1. Введение

Настоящая работа посвящена важной модификации задачи Канторовича – задаче транспортировки мер с дополнительными линейными ограничениями. О развитии общей транспортной задачи и наиболее значимых современных результатах можно прочесть в [1–4]. Транспортная задача с линейными ограничениями возникает естественным образом в нескольких приложениях, из которых упомянем финансовую математику (мартингальная транспортная задача) и бесконечномерный анализ (транспортная задача, инвариантная относительно действия группы), см. [5–8]. Многие базовые вопросы транспортной теории (например, вопрос существования оптимального отображения) для мер на бесконечномерных пространствах ведут естественным образом к изучению транспортировки эргодических мер и зависимости структуры оптимальных транспортных планов от эргодических разложений (см. подробнее в [6]). В настоящей работе изучен вопрос, существует ли естественное разложение транспортного плана, порожденного эргодическим разложением маргиналов.

Рассмотрим следующий базовый пример. Пусть группа $(\mathbb{Z},+)$ действует гомеоморфизмами на метрическом компакте (X,d). Ее действие на произведении пространств $X\times X$ определим "диагональным" способом: $g(x_1,x_2) := (g(x_1),g(x_2))$, где g – действие элемента $1_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ на X. Мера μ на (X,d) называется инвариантной относительно $\mathbb{Z}$, если $\mu\circ g^{-1} = \mu$. Обозначим через $\mathcal{P}_g(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ множество всех инвариантных борелевских вероятностных мер на (X,d), снабдив его топологией слабой сходимости и соответствующей борелевской σ-алгеброй. Хорошо известно, что $\mathcal{P}_g(X)$ – выпуклый непустой компакт. Как и в любом выпуклом компакте, в нем можно выделить подмножество всех крайних точек, то есть точек, которые не лежат во внутренности какого-либо отрезка в $\mathcal{P}_g(X)$. Обозначим это подмножество через

Ключевые слова: задача Канторовича, эргодическое разложение, марковское ядро.

$\partial_e(\mathcal{P}_g(X))$ и будем называть его границей множества $\mathcal{P}_g(X)$. Ясно, что крайние точки множества $\mathcal{P}_g(X)$ – это в точности g-эргодические меры. Также известно (см. [9]), что $\mathcal{P}_g(X)$ является симплексом Шоке. Это значит, что каждая точка в $\mathcal{P}_g(X)$ может быть представлена единственным образом как барицентр борелевской вероятностной меры, сосредоточенной на границе $\partial_e(\mathcal{P}_g(X))$.

Зафиксируем пару мер μ, ν из $\mathcal{P}_g(X)$. Рассмотрим следующую вариационную задачу, которая известна как задача Канторовича (см. [1–4]):

$$\inf\left\{\int c\,d\pi\colon\ \pi\in\mathcal{P}(X\times X),\ \mathrm{Pr}_1(\pi)=\mu,\ \mathrm{Pr}_2(\pi)=\nu\right\}.$$

Здесь $c\colon X\times X\to\mathbb{R}$ – некоторая непрерывная, ограниченная снизу функция, а $\mathrm{Pr}_k(\pi)$ – k-й маргинал (т.е. проекция на сомножитель) меры π. Меры π называются транспортными планами и могут рассматриваться как обобщенные отображения из одного пространства с мерой в другое.

Довольно естественно в данной ситуации рассматривать множество не всех транспортных планов, а лишь тех, которые инвариантны относительно действия g на $X\times Y$. Тогда соответствующая модификация задачи Канторовича будет иметь вид

$$\inf\left\{\int c\,d\pi\colon\ \pi\in\mathcal{P}_g(X\times X),\ \mathrm{Pr}_1(\pi)=\mu,\ \mathrm{Pr}_2(\pi)=\nu\right\}.$$

Это пример задачи Канторовича с дополнительными линейными ограничениями. Такая модификация задачи Канторовича была независимо сформулирована и исследована в [5] и в [8]. В данном случае дополнительным ограничением служит условие инвариантности.

Так как μ и ν являются элементами симплекса $\mathcal{P}_g(X)$, они представляются единственным образом в виде

$$\mu=\int\limits_{\partial_e(\mathcal{P}_g(X))}\xi_\alpha\,d\widetilde{\mu}(\alpha)=:\mathrm{bar}(\widetilde{\mu}),\qquad \nu=\int\limits_{\partial_e(\mathcal{P}_g(X))}\xi_\beta\,d\widetilde{\nu}(\beta)=:\mathrm{bar}(\widetilde{\nu}),$$

то есть как барицентры некоторых вероятностных мер, сконцентрированных на границе симплекса $\mathcal{P}_g(X)$: $\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu} \in \mathcal{P}(\partial_e(\mathcal{P}_g(X)))$. Зададимся вопросом, имеет ли место следующее представление:

$$\begin{aligned} &\inf\left\{ \int c\,d\pi \colon\ \pi \in \mathcal{P}_g(X \times X),\ \mathrm{Pr}_1(\pi) = \mu,\ \mathrm{Pr}_2(\pi) = \nu \right\} \\ &\quad = \inf\left\{ \int \inf\left\{ \int c\,d\pi \colon\ \pi \in \mathcal{P}_g(X \times X), \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. \mathrm{Pr}_1(\pi) = \xi_\alpha,\ \mathrm{Pr}_2(\pi) = \xi_\beta \right\} d\widetilde{\pi} \colon\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu}) \right\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu}) := \{\pi \in \mathcal{P}(\partial_e(\mathcal{P}_g(X)) \times \partial_e(\mathcal{P}_g(X))) \colon\ \mathrm{Pr}_1(\pi) = \widetilde{\mu},\ \mathrm{Pr}_2(\pi) = \widetilde{\nu}\}.$$

Иными словами, возможно ли разбить инвариантную задачу Канторовича на две подзадачи: первую – о вычислении минимальной стоимости транспортировки между парами эргодических мер, вторую – о нахождении оптимального способа транспортировки мер, сосредоточенных на границе симплекса (мер на множестве эргодических мер)? В дальнейшем мы сформулируем достаточные условия существования такого разложения. Оказывается, что оно возможно для специального класса симплексов $\mathrm{Dom} \subseteq \mathcal{P}(X)$, встречающихся в литературе под названием *эргодически разложимых симплексов* (см. [10,11]). Описанный выше симплекс инвариантных мер как раз является примером эргодически разложимого симплекса. В частности, верно следующее утверждение, которое является следствием основной теоремы 4.8.

Теорема 1.1. *Пусть* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ *– два польских пространства с борелевскими* σ*-алгебрами и заданными непрерывными действиями группы* $(\mathbb{Z}, +)$, $\mathcal{A}^{\mathrm{inv}} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}^{\mathrm{inv}} \subseteq \mathcal{B}$ *– соответствующие* σ*-подалгебры инвариантных мер,* $c\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *– полунепрерывная и ограниченная снизу функция. Тогда в обозначениях, введенных выше, верно равенство* (1.1)*, где* $\widetilde{\mu}$ *– ограничение меры* μ *на* $\mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$, $\widetilde{\nu}$ *– ограничение меры* ν *на* $\mathcal{B}^{\mathrm{inv}}$.

Для доказательства рассмотрим эргодическое разложение оптимального инвариантного транспортного плана. Как нетрудно проверить, это разложение будет состоять из эргодических транспортных планов с эргодическими маргиналами. Нужно показать, что почти все транспортные планы в разложении оптимальны. Если это не так, то мы могли бы заменить неоптимальные компоненты на оптимальные, получив противоречие. Однако здесь есть техническая сложность: осуществляя такую замену, нужно следить, чтобы семейство планов в разложении оставалось измеримо зависящим от своих маргиналов. Подробнее этот вопрос обсуждается в §4 в более общем контексте.

Пусть $\mathrm{Dom} \subseteq \mathcal{P}(X)$ – симплекс, допускающий разложение задачи Канторовича. Для удобства положим $E := \partial_e(\mathrm{Dom}) \subseteq \mathrm{Dom}$. Предположим, что функция расстояния $\bar{d}\colon E \times E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ определена на E, причем $\bar{d}$ метризует топологию на E. Если мы зафиксируем некоторое число $p \in [1, \infty)$, то сможем продолжить $\bar{d}$ до функции расстояния $\widehat{d_p}$ на Dom, используя формулу

$$\begin{aligned}&\widehat{d_p}(\mu,\nu)\\&:=\inf\left\{\left(\int \bar{d}^p(e_1,e_2)d\pi\right)^{\frac{1}{p}}:\ \pi\in\mathcal{P}(E\times E),\mathrm{Pr}_1(\pi)=\widetilde{\mu},\mathrm{Pr}_2(\pi)=\widetilde{\nu}\right\},\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\mathcal{P}(E \times E)$ – множество всех борелевских вероятностных мер на $E \times E$, Pr_k – оператор, сопоставляющий мере из $\mathcal{P}(E \times E)$ ее k-й маргинал, $\mathrm{bar}(\widetilde{\mu}) = \mu$, $\mathrm{bar}(\widetilde{\nu}) = \nu$.

Напомним определение L^p-метрики Канторовича.

Определение 1.2. Пусть (X, d) – метрический компакт, $\mathcal{P}(X)$ – множество всех борелевских (= радоновских) вероятностных мер на нем. Тогда для всякого числа $p \in [1, \infty)$ соответствующая L^p-метрика Канторовича $W_p\colon\ \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ есть функция расстояния, определяемая формулой

$$\begin{aligned}&W_p(\mu,\nu)\\&:=\inf\left\{\left(\int d^p(x,y)d\pi\right)^{\frac{1}{p}}:\ \pi\in\mathcal{P}(X\times X),\ \mathrm{Pr}_1(\pi)=\mu,\ \mathrm{Pr}_2(\pi)=\nu\right\}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

В нашей ситуации естественно рассмотреть следующий аналог L^p-расстояний Канторовича на $\mathrm{Dom} := \mathcal{P}_g(X)$:

$$\begin{aligned}&W_p^g(\mu,\nu)\\&:=\inf\left\{\left(\int d^p(x,y)d\pi\right)^{\frac{1}{p}}:\ \pi\in\mathcal{P}_g(X\times X),\ \mathrm{Pr}_1(\pi)=\mu,\ \mathrm{Pr}_2(\pi)=\nu\right\}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Известно (однако это нетривиальный факт), что в случае, когда метрика d инвариантна относительно действия группы $\mathbb{Z}$, функция W_p^g

совпадает с W_p на Dom (см. [7]). Однако в дальнейшем мы не будем предполагать инвариантность метрики d, так что $W_p^g \geqslant W_p$ на их общей области определения. Легко проверить, что W_p^g удовлетворяет аксиомам расстояния на $\mathcal{P}_g(X)$ (см. доказательство в примере 3.14).

Вопрос 1.3. Пусть для некоторого $p \in [1, +\infty)$ на Dom задана метрика Канторовича W_p^g. Возможно ли задать метрику $\bar{d}$ на $E = \partial_e \operatorname{Dom}$ таким образом, чтобы ее продолжение $\widehat{d_p}$ на Dom совпадало с W_p^g?

Ответ на этот вопрос положителен. Обозначим через $\bar{d}_p^g$ ограничение инвариантного L^p-расстояния Канторовича (задаваемого формулой (1.4)) на $\operatorname{Erg}(X) := \partial_e(\operatorname{Dom})$, то есть

$$(\bar{d}_p^g)^p(\xi_\alpha, \xi_\beta) := \inf\left\{\int d^p(\xi_\alpha, \xi_\beta)\,d\pi\colon\ \pi \in \mathcal{P}_g(X \times X),\ \operatorname{Pr}_1(\pi) = \xi_\alpha,\ \operatorname{Pr}_2(\pi) = \xi_\beta\right\}. \tag{1.5}$$

Тогда равенство

$$W_p^g(\mu, \nu) = \widehat{d_p^g}(\mu, \nu)$$

верно для всех $\mu, \nu \in \operatorname{Dom}$. Здесь $\widehat{d_p^g}$ является продолжением расстояния $\bar{d}_p^g$ (см. (1.5)) с $E := \partial_e(\operatorname{Dom})$ на Dom, определяемым формулой (1.2).

Этот факт является частным случаем следствия 5.1. Ясно, что он также тесно связан с утверждением о разложении задачи Канторовича. Обозначим через $(\mathcal{P}_g(X), W_p^g(d))$ пространство инвариантных вероятностных мер на метрическом компакте (X, d), снабженное инвариантной L^p-метрикой Канторовича. Так как

$$\partial_e(\operatorname{Dom}) \subseteq \operatorname{Dom} = \mathcal{P}_g(X),$$

мы можем ограничить $W_p^g(d)$ на подмножества Dom и $\partial_e(\operatorname{Dom})$ и получить метрические пространства $(\operatorname{Dom}, W_p^g(d))$ и $(\partial_e(\operatorname{Dom}), W_p^g(d))$ соответственно. По определению симплекса

$$\operatorname{Dom} \simeq \mathcal{P}(\partial_e(\operatorname{Dom})),$$

где “$\simeq$” означает гомеоморфизм. Следовательно, мы можем построить L^p-метрику Канторовича на $\mathcal{P}(\partial_e(\operatorname{Dom}))$, используя $(\partial_e(\operatorname{Dom}), W_p^g(d))$ как исходную метрическую структуру. Обозначим полученное метрическое пространство через $(\mathcal{P}(\partial_e(\operatorname{Dom})), W_p(W_p^g(d)))$. В силу результата о разложении

$$(\mathcal{P}(\partial_e(\operatorname{Dom})), W_p(W_p^g(d))) = (\operatorname{Dom}, W_p^g(d)),$$

где “=” означает изометрический изоморфизм. Будем называть результаты такого типа разложением метрики Канторовича.

Мы докажем результат о разложении задачи и метрики Канторовича в достаточно общей формулировке, так что все описанные выше примеры окажутся его частными случаями. Мы также не будем предполагать компактность пространства, на котором задаются меры. Основные результаты работы – теоремы 4.8 и 5.1. Первая из них описывает результат о разложении задачи Канторовича, а вторая – о разложении обобщенных метрик Канторовича на симплексах. Параграф предварительных сведений содержит все необходимые определения и результаты из теории симплексов, достаточных статистик и эргодических разложений мер (см. [10] и [11]).

В §3 мы определяем задачу Канторовича с дополнительными линейными ограничениями. Там же приведены определения “хороших” в том или ином смысле ограничений: *слабо регулярных*, *эргодически разложимых*, *внутренне согласованных* и *метрических*. В дальнейшем при формулировке результатов мы будем ограничивать их общность каким-либо из этих классов.

В §4 мы формулируем и доказываем основную теорему о существовании разложения задачи Канторовича в случае, если дополнительное ограничение является эргодически разложимым, слабо регулярным и внутренне согласованным. В §5 доказывается результат о разложении обобщенных метрик Канторовича в случае, если дополнительное ограничение в соответствующей задаче Канторовича является также метрическим.

Также обсуждаются основные приложения полученных результатов. Эти приложения тесно связаны с теорией симметричных и инвариантных модификаций задачи Канторовича, которым посвящены, например, работы [5–8, 12].

В процессе подготовки работы в печать автору стало известно, что вопрос о продолжении метрики Канторовича с крайних точек симплекса недавно уже рассматривался в [14]. Однако предложенные подходы и контекст, в котором рассматривается задача, в нашей и цитируемой работах довольно сильно различаются.

§2. Предварительные сведения: симплексы и дезинтегрирование мер

В этом параграфе мы кратко обсудим необходимые в дальнейшем определения и результаты из теории симплексов, эргодических разложений и дезинтегрирования мер. Стандартным способом определять бесконечномерный симплекс является подход Шоке.

Определение 2.1. Точка $x \in K$ выпуклого компакта K называется крайней, если для всяких двух точек $a, b \in K$, таких, что $x = t \cdot a + (1-t) \cdot b$ при некотором $t \in (0,1)$, мы имеем $a = b$. Компактное выпуклое метризуемое множество K называется симплексом Шоке, если для каждого элемента $a \in K$ существует единственная борелевская мера μ_a на K, такая, что

- $\mu_a(\partial_e(K)) = 1$, где $\partial_e(K)$ – подмножество, состоящее из всех крайних точек компакта K,
- $a = \mathrm{bar}(\mu_a) := \int\limits_K x d\mu_a$.

Однако такой подход к понятию симплекса имеет два существенных ограничения:

- во-первых, все симплексы Шоке предполагаются по определению компактными; это удобно во многих случаях, но, как известно, пространства мер, снабженные метрикой Канторовича, компактны далеко не всегда;
- второй и, возможно, более важный минус теории Шоке состоит в том, что она не связывает явным образом представление элемента симплекса как смеси его крайних точек с эргодическим разложением соответствующей этому элементу меры.

Подход, предложенный Дынкиным в [10] и развитый в [11], лишен этих недостатков. Понятие симплекса, предложенное Дынкиным, является обобщением определения Шоке. Оно не требует наличия топологической структуры и формулируется исключительно в терминах теории меры. О недавних новых результатах относительно симплексов Дынкина можно прочесть в [14].

Для специального подкласса симплексов Дынкина (названных в [11] *эргодически разложимыми*) известен результат, связывающий представление меры в виде смеси крайних точек с ее дезинтегрированием относительно некоторой соответствующей симплексу подалгебры.

Условные меры при этом дезинтегрировании соответствуют крайним точкам симплекса.

Обозначим через $B(X, \mathcal{A})$ множество всех $\mathcal{A}$-измеримых ограниченных вещественнозначных функций на X.

Определение 2.2. Пусть $(X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство и $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ – подмножество множества вероятностных мер на $\mathcal{A}$. Наименьшая σ-алгебра на M, такая, что для всяких $f \in B(X, \mathcal{A})$, $\mu \in M$ отображение $\mu \to \mu(f)$ измеримо, называется стандартной σ-алгеброй.

Определение 2.3. Пусть $(X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство и $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ – подмножество, снабженное стандартной σ-алгеброй. Определим барицентр $\mathrm{bar}\colon\ \mathcal{P}(M) \to M$ по формуле

$$\mathrm{bar}(\widetilde{\mu})(f) = \int\limits_M \left(\int\limits_X f d\nu \right) d\widetilde{\mu}(\nu)$$

для любой функции $f \in B(X, \mathcal{A})$. Границей множества $(M, \mathcal{B})$ назовем множество $\partial_e(M) \subset M$ таких точек m, что для любой меры $\mu_m \in \mathcal{P}(M)$ свойство $\mathrm{bar}(\mu_m) = m$ влечёт $\mu_m(\{m\}) = 1$. Измеримое множество $(M, \mathcal{B})$ называется симплексом Дынкина, если его граница $\partial_e(M)$ измерима, причем для каждого $\mu \in M$ существует единственная мера $\widetilde{\mu} \in \mathcal{P}(M)$ с $\mathrm{bar}(\widetilde{\mu}) = \mu$ и $\widetilde{\mu}(\partial_e(M)) = 1$.

Пример 2.4. Если $M := \mathcal{P}(X)$, то это симплекс Дынкина, и $\partial_e(M)$ состоит из всевозможных мер Дирака.

Пример 2.5. Пусть $(X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, $\mathbb{G}$ – аменабельная группа, действующая на X измеримыми автоморфизмами, $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)$ – множество всех инвариантных мер. Если $M := \mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)$, а $\mathcal{B}$ – стандартная σ-алгебра, то $(M, \mathcal{B})$ – симплекс Дынкина, а его граница состоит из всевозможных эргодических мер. Так как любой симплекс Шоке аффинно изоморфен симплексу $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)$ для некоторого компактного метризуемого пространства X и некоторого непрерывного действия группы $\mathbb{Z}$ (см. [13, 15]), любой симплекс Шоке аффинно изоморфен некоторому симплексу Дынкина.

Пусть $(X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство.

Определение 2.6. Функция $Q\colon\ X \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ называется марковским ядром на $(X, \mathcal{A})$, если для каждой точки $x \in X$ мера $Q^x := Q(x, \cdot)$

является вероятностной мерой на $\mathcal{A}$, причем для каждого множества $A \in \mathcal{A}$ функция $x \to Q(x, A)$ оказывается $\mathcal{A}$-измеримой.

Два марковских ядра Q_1, Q_2 на $(X, \mathcal{A})$ будем называть M-эквивалентными для некоторого подмножества $M \subseteq \mathcal{P}(X)$, если

$$\mu(\{x\colon\ Q_1(x, \cdot) = Q_2(x, \cdot)\}) = 1$$

для всякой меры $\mu \in M$.

Определение 2.7. Пусть $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ – два измеримых пространства. Функция $Q\colon\ Y \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ называется марковским переходным ядром из $(X, \mathcal{A})$ в $(Y, \mathcal{B})$, если для каждой точки $y \in Y$ функция $Q^y := Q(y, \cdot)$ является вероятностной мерой на $(X, \mathcal{A})$, а для каждого множества $A \in \mathcal{A}$ функция $y \to Q(y, A)$ оказывается $\mathcal{B}$-измеримой.

Два марковских переходных ядра Q_1, Q_2 из $(X, \mathcal{A})$ в $(Y, \mathcal{B})$ будем называть M-эквивалентными для некоторого подмножества $M \subseteq \mathcal{P}(Y)$, если $\mu(\{y\colon\ Q_1(y, \cdot) = Q_2(y, \cdot)\}) = 1$ для всякой меры $\mu \in M$. Каждое марковское ядро Q определяет положительный оператор на $B(X, \mathcal{A})$ по формуле

$$Q(f)(x) := \int f dQ(x, \cdot).$$

Определение 2.8. Пусть $M \subseteq \mathcal{P}(X, \mathcal{A})$ и $\mathcal{A}^0$ – σ-подалгебра в $\mathcal{A}$. Марковское ядро Q на $(X, \mathcal{A})$ называется разложением для тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^0, M)$, если

$$\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A}^0) = Q(f) \text{ для п.в. } x \text{ относительно } \mu$$

для любых $f \in B(X, \mathcal{A})$, $\mu \in M$. Здесь $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{A}^0)$ – условное математическое ожидание функции f относительно σ-алгебры $\mathcal{A}^0$ и меры μ.

Заметим, что разложение тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^0, M)$ по определению является марковским переходным ядром из $(X, \mathcal{A})$ в $(X, \mathcal{A}^0)$.

Определим действие марковского ядра на $\mathcal{P}(X, \mathcal{A})$ следующим образом:

$$Q_\#(\mu)(A) := \int\limits_X Q(x, A) d\mu$$

для всех $A \in \mathcal{A}$. Мера $\mu \in \mathcal{P}$ называется инвариантной относительно Q, если $Q_\#(\mu) = \mu$. Аналогично для любого марковского переходного ядра можно определить отображение из $B(X,\mathcal{A})$ в $B(Y,\mathcal{B})$ по формуле $Q(f)(y) := \int f(x)dQ(y,\cdot)$ и отображение из $\mathcal{P}(Y,\mathcal{B})$ в $\mathcal{P}(X,\mathcal{A})$ по формуле $Q_{\#}(\nu)(A) := \int\limits_Y Q(y,A)d\nu$ для любого $A \in \mathcal{A}$.

Определение 2.9. Подмножество $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ называется сепарабельным, если в $\mathcal{A}$ существует счетное семейство элементов $\mathcal{F}$, такое, что для каждой пары различных мер $\mu_1, \mu_2 \in M$ найдется элемент $A \in \mathcal{F}$ со свойством $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$. Далее, σ-подалгебра $\mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{A}$ называется достаточной для сепарабельного подмножества $M \subseteq \mathcal{P}(X)$, если существует марковское ядро Q на $(X,\mathcal{A})$, являющееся разложением тройки $(\mathcal{A},\mathcal{A}^0,M)$. Достаточная σ-подалгебра называется H-достаточной для M, если она достаточна и

$$\mu(\{x\colon\ Q^x \in M\}) = 1 \text{ для всех } \mu \in M.$$

Две σ-подалгебры $\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{A}$ будем называть M-эквивалентными для некоторого подмножества $M \subseteq \mathcal{P}(X,\mathcal{A})$, если для каждой меры $\mu \in M$ и каждого множества $A_1 \in \mathcal{A}^1$ найдется такое множество $A_2 \in \mathcal{A}^2$, что $A_1 = A_2$ почти всюду относительно μ.

Следующая важная теорема объединяет утверждения теорем 3.1, 3.2 и 3.3 из [10] с леммой 3.6 из [11].

Теорема 2.10. *Предположим, что $\mathcal{A}$ – счетно-порожденная σ-алгебра. Тогда для сепарабельного подмножества $M \subseteq \mathcal{P}(X,\mathcal{A})$ следующие свойства эквивалентны.*

- *Существует единственная, с точностью до M-эквивалентности, H-достаточная σ-алгебра $\mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{A}$ для M, которая состоит из всех множеств $A \in \mathcal{A}$, таких, что $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1$ для каждой меры $\mu \in \partial_e(M)$.*
- *Существует марковское ядро Q на $(X,\mathcal{A})$ со свойством*

  $$Q(gQ(f)) = Q(g)Q(f) \text{ для всех } f,g \in B(X,\mathcal{A}),$$

  или, что равносильно, со свойством

  $$Q^x(\{y \in X\colon\ Q^x = Q^y\}) = 1 \text{ для всех } x \in X,$$

  такое, что M оказывается подмножеством всех Q-инвариантных мер из $\mathcal{P}(X,\mathcal{A})$.

Для марковского ядра из этого утверждения соответствующая ему H-достаточная подалгебра является (с точностью до M-эквивалентности) алгеброй всех Q-инвариантных измеримых множеств.

Определение 2.11. Сепарабельное подмножество $M \subseteq \mathcal{P}(X, \mathcal{A})$ мер на счетно-порожденной σ-алгебре $\mathcal{A}$ называется эргодически разложимым симплексом, если оно удовлетворяет любому из двух эквивалентных свойств, сформулированных в теореме 2.10.

В [10] Дынкин приводит серию примеров эргодически разложимых симплексов. В частности, эргодически разложимыми являются симплексы из примеров 2.4, 2.5.

Следующий результат является прямым следствием теоремы 3.1 из [10] и замечания 3.8 из [11].

Теорема 2.12. *Эргодически разложимый симплекс $M \subseteq \mathcal{P}(X, \mathcal{A})$ является симплексом Дынкина. Более того, существует такое марковское ядро Q из определения эргодически разложимого симплекса, что граница симплекса по Дынкину определяется как*

$$\partial_e(M) = \{Q^x \colon \ x \in X\}$$

и

$$\operatorname{bar}(\widetilde{\mu}) = \mu \iff \widetilde{\mu}(S) = \mu(\{x \colon \ Q^x \in S\})$$

для любого измеримого множества $S \subseteq M$.

Следующее предложение носит технический характер.

Предложение 2.13. *Пусть $(X, \mathcal{A})$ – польское пространство с борелевской σ-алгеброй. Тогда стандартная σ-алгебра $\mathcal{E}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй, порожденной топологией слабой сходимости на $\mathcal{P}(X)$.*

Доказательство. Следует, например, из теоремы 2.3 в [16]. □

Рассмотрим пример эргодически разложимого симплекса, который является основным для нашей работы.

Пример 2.14 (Основной пример)**.** Пусть $\mathbb{G}$ – топологическая группа с заданным непрерывным действием на польском метрическом пространстве (X, d), принадлежащая к одному из следующих классов:

(1) конечная или счетная группа с дискретной топологией;
(2) локально компактная группа с плотной счетной подгруппой;
(3) группа конечных перестановок на счетном множестве (бесконечная симметрическая группа) с топологией поточечной сходимости.

Действие группы $\mathbb{G}$ на $X\times X$ определено “диагональным” способом: $g(x_1,x_2):=(g(x_1),g(x_2))$, где g – действие элемента $g\in\mathbb{G}$ на X. Мера μ на (X,d) называется *инвариантной* относительно $\mathbb{G}$, если $\mu\circ g^{-1}=\mu$ для каждого элемента $g\in\mathbb{G}$. Обозначим через $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)\subseteq\mathcal{P}(X)$ множество всех инвариантных борелевских вероятностных мер на (X,d). Известно, что $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)$ является замкнутым эргодически разложимым симплексом (доказательство см. в п. 6 и 7 в [10]). Соответствующая симплексу H-достаточная σ-алгебра может быть определена как алгебра $\mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ всех борелевских $\mathbb{G}$-инвариантных измеримых подмножеств. Соответствующее марковское ядро Q на $(X,\mathcal{A})$ определяется как

$$\widetilde{Q}(x,A):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu(F_n)}\int\limits_{F_n}g_{\#}(\delta_x(A))d\nu(g).$$

Здесь (F_n) – последовательность Фёлнера группы $\mathbb{G}$, ν – левая мера Хаара на $\mathbb{G}$, δ_x – мера Дирака, сосредоточенная в точке $x\in X$. Напомним, что последовательностью Фёлнера называется последовательность таких непустых компактных подмножеств G, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(gF_n\bigtriangleup F_n)}{\mu(F_n)}=0$$

для всякого элемента $g\in\mathbb{G}$, где $gF_n:=\{gf\colon\ f\in F_n\}$, $\bigtriangleup$ – симметрическая разность. Существование такой последовательности подмножеств гарантировано для рассматриваемых классов групп.

§3. Задача Канторовича с дополнительными ограничениями

Пусть $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ – два польских пространства с борелевскими σ-алгебрами. Обозначим через $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{P}(X\times Y)$ множества вероятностных мер на $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ и $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ соответственно. Заметим, что можно рассматривать множества мер как подмножества двойственных в банаховом смысле пространств: $\mathcal{P}(X)\subset C_b(X)^*$, $\mathcal{P}(Y)\subset C_b(Y)^*$, $\mathcal{P}(X\times Y)\subset C_b(X\times Y)^*$. Рассмотрим слабые*-топологии на двойственных пространствах и снабдим пространства вероятностных мер топологией, индуцированной вложением. Известно, что полученные топологические пространства $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{P}(X\times Y)$ оказываются польскими (см. [18], теоремы 6.2 и 6.5). Более того, их топология совпадает с топологией слабой сходимости мер. Далее под слабой*-топологией на пространстве вероятностных мер мы будем иметь в виду именно описанную здесь конструкцию.

Определим операторы проектирования $\mathrm{Pr_X}\colon\ \mathcal{P}(X\times Y)\to\mathcal{P}(X)$, $\mathrm{Pr_Y}\colon\ \mathcal{P}(X\times Y)\to\mathcal{P}(Y)$ следующим образом:

$$\mathrm{Pr_X}(\pi)(A)=\pi(A\times Y),\quad A\in\mathcal{A}, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{Pr_Y}(\pi)(B)=\pi(X\times B),\quad B\in\mathcal{B}. \tag{3.2}$$

Определим также оператор $\mathrm{Pr}\colon\ \mathcal{P}(X\times Y)\to\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ как $\mathrm{Pr}(\pi)=(\mathrm{Pr_X}(\pi),\,\mathrm{Pr_Y}(\pi))$. Очевидно, что эти операторы слабо непрерывны.

В связи с задачей Канторовича нас будут интересовать следующие множества мер:

$$\Pi(\mu,\nu)=\{\pi\in\mathcal{P}(X\times Y)\colon\ \mathrm{Pr}(\pi)=(\mu,\nu)\},\ \mu\in\mathcal{P}(X),\ \nu\in\mathcal{P}(Y).$$

Элементы этих множеств называются транспортными планами. Ясно, что, так как отображение Pr непрерывно, множество $\Pi(\mu,\nu)$ является замкнутым. Также известно, что оно компактно (см. [1, 2, 4]).

Определим функционал стоимости как отображение

$$C\colon\ \mathcal{P}(X\times Y)\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\},$$

которое аффинно:

$$\alpha C(\pi)+(1-\alpha)C(\gamma)=C(\alpha\pi+(1-\alpha)\gamma)$$

для всех $\alpha\in[0,1]$, $\pi,\gamma\in\mathcal{P}(X\times Y)$, $0\cdot(+\infty):=0$. Как правило, мы предполагаем слабую полунепрерывность снизу (l.s.c.) таких функционалов. Свойством такой полунепрерывности обладают, например, функционалы интегрирования полунепрерывной и ограниченной снизу функции. Если $c\colon\ X\times Y\to\mathbb{R}$ – такая функция, то $C(\pi):=\int c\,d\pi$ – полунепрерывный снизу функционал стоимости. Однако не все полунепрерывные снизу функционалы представимы в таком виде. Например, в [22] описан более широкий класс *почти непрерывных* функций. Интегрирование с ограниченными снизу функциями из такого класса также будет задавать полунепрерывный снизу функционал.

Зафиксируем некоторый функционал стоимости C и сформулируем определения соответствующих множеств оптимальных планов:

$$\Pi^{\mathrm{opt}}(X\times Y):=\{\pi\in\mathcal{P}(X\times Y)\colon\ C(\pi)\leqslant C(\gamma)\ \text{для всех}\ \gamma\in\Pi(\mathrm{Pr}(\pi))\},$$

$$\Pi^{\mathrm{opt}}(\mu,\nu):=\{\pi\in\Pi(\mu,\nu)\cap\Pi^{\mathrm{opt}}(X\times Y)\}.$$

В ряде приложений задача Канторовича может возникнуть в несколько модифицированном виде. Например, мы можем быть заинтересованы в поиске оптимального элемента не среди всех возможных транспортных планов, а только среди инвариантных (в том или ином смысле). Такую задачу иногда называют симметричной (или инвариантной) задачей Канторовича. Другой пример – мартингальная задача Канторовича, где оптимальное решение ищется во множестве планов-мартингалов. Хорошим способом формализовать и обобщить подобные задачи является понятие задачи Канторовича с дополнительными линейными ограничениями, которой посвящен этот параграф.

Многие аспекты симметричной задачи Канторовича описаны в [6]. Работа [12] посвящена симметричной задаче Монжа–Канторовича с несколькими маргиналами; в [5] и [8] доказаны результаты о двойственности и циклической монотонности в контексте задачи с дополнительными линейными ограничениями. Начнем с формализации понятия линейного ограничения.

Определение 3.1. Для пары измеримых пространств $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ назовем линейным ограничением тройку $R = (\Omega, M^X, M^Y, M)$, состоящую из подмножества $\Omega \subseteq L^0(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ множества измеримых функций и трёх непустых подмножеств мер $M^X \subseteq \mathcal{P}(X)$, $M^Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$, $M \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$.

Определим ограниченные множества транспортных планов следующим образом:

$$\Pi_R(X \times Y) := \left\{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y) : \int \omega \, d\pi = 0 \ \forall \omega \in \Omega, \ \mathrm{Pr}_{\mathrm{X}}(\pi) \in M^X, \ \mathrm{Pr}_{\mathrm{Y}}(\pi) \in M^Y \right\}, \tag{3.3}$$

$$\Pi_R(\mu, \nu) := \left\{\pi \in \Pi_R(X \times Y) : \ \mathrm{Pr}_X(\pi) = \mu, \ \mathrm{Pr}_Y(\pi) = \nu \right\}. \tag{3.4}$$

Два линейных ограничения R_1, R_2 называются эквивалентными, если $\Pi_{R_1}(X \times Y) = \Pi_{R_2}(X \times Y)$.

Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ – пара *польских* пространств с *борелевскими* σ-алгебрами.

Сформулируем свойство линейного ограничения, которое понадобится нам в следующем параграфе при исследовании возможности измеримого выбора.

Определение 3.2. Назовем линейное ограничение $R = (\Omega, M^X, M^Y)$ слабо регулярным, если

(1) M^X, M^Y замкнуты в топологии слабой сходимости,
(2) функционал $\pi \to \int \omega d\pi$ слабо непрерывен на $\Pi(M^X, M^Y)$ для всякой функции $\omega \in \Omega$,
(3) множество $\Pi_R(\mu, \nu)$ непусто для всех $\mu \in M^X$, $\nu \in M^Y$.

Предложение 3.3. *Пусть $R = (\Omega, M^X, M^Y)$ – слабо регулярное линейное ограничение. Тогда $\Pi_R(X \times Y)$ замкнуто, а $\Pi_R(\mu, \nu)$ компактно для всякой пары мер $(\mu, \nu) \in M^X \times M^Y$. Пространства $\Pi_R(X \times Y)$ и $\Pi_R(\mu, \nu)$ являются польскими.*

Доказательство. Следует из стандартного факта, что множество $\Pi(\mu, \nu)$ компактно в топологии слабой сходимости (см. [2]). □

Приведем (очевидное) условие на линейное ограничение R, достаточное для его слабой регулярности.

Замечание 3.4. Если $\Omega \subseteq C_b(X \times Y)$, $M^X \subseteq \mathcal{P}(X)$ и $M^Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$ слабо замкнуты и непусты, а $\mu \otimes \nu \in \Pi_R(\mu, \nu)$ для каждой пары мер $\mu \in M^X$, $\nu \in M^Y$, то $R = (\Omega, M^X, M^Y)$ – слабо регулярное ограничение.

Зафиксируем, помимо ограничения R, некоторый функционал стоимости C. Определим ограниченные множества оптимальных транспортных планов:

$$\Pi_R^{\mathrm{opt}}(X \times Y) := \Big\{\pi \in \Pi_R(X \times Y) \colon\ C(\pi) \leqslant C(\gamma)\ \forall \gamma \in \Pi_R(\mathrm{Pr}(\pi))\Big\}, \tag{3.5}$$

$$\Pi_R^{\mathrm{opt}}(\mu, \nu) := \Big\{\pi \in \Pi_R(\mu, \nu) \cap \Pi_R^{\mathrm{opt}}(X \times Y)\Big\}. \tag{3.6}$$

Предложение 3.5. *Если линейное ограничение (R, M^X, M^Y) слабо регулярное, а C – слабо полунепрерывный снизу функционал, то $\Pi_R^{\mathrm{opt}}(\mu, \nu)$ будет компактным подмножеством в $\mathcal{P}(X \times Y)$ (для любых мер $\mu \in M^X$, $\nu \in M^Y$).*

Доказательство. По определению полунепрерывного снизу функционала его множества подуровня замкнуты. Значит, множество $\{\pi \in \Pi_R(\mu, \nu) \colon\ C(\pi) \leqslant a\}$ является замкнутым для любого $a \in \mathbb{R}$. Пусть $a = \inf \{C(\pi) \colon\ \pi \in \Pi_R(\mu, \nu)\}$; тогда соответствующее множество уровня оказывается равным $\Pi_R^{\mathrm{opt}}(\mu, \nu)$. Так как оно замкнуто в компактном польском пространстве $\Pi_R(\mu, \nu)$ (по предложению 3.3), оно само является компактом. □

Как мы увидим в следующем параграфе, предположение о слабой регулярности достаточно для доказательства существования измеримого выбора оптимальных транспортных планов в ограниченном множестве планов. Однако для результата о разложении задачи Канторовича, аналогичного теореме 1.1, только этого предположения оказывается недостаточно.

До окончания этого параграфа мы будем предполагать, что $R := (\Omega, M^X, M^Y)$ – линейное ограничение, M^X, M^Y – эргодически разложимые симплексы, $\mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}^0 \subseteq \mathcal{B}$ – соответствующие им H-достаточные σ-алгебры.

Следующее свойство линейного ограничения является ключевым для формулировки результата о разложении задачи Канторовича.

Определение 3.6. Ограничение $R := (\Omega, M^X, M^Y)$ называется эргодически разложимым, если найдётся такой эргодически разложимый симплекс мер $M \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ и такая соответствующая ему H-достаточная σ-алгебра $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0 \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, что

- $\Pi_R(X \times Y) \subseteq M$,
- $\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0 \subseteq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0$,
- $\mathrm{Pr}_X(\gamma) \in \partial_e(M^X)$, $\mathrm{Pr}_Y(\gamma) \in \partial_e(M^Y)$ для всех $\gamma \in \partial_e(M)$.

Будем теперь предполагать, что $R := (\Omega, M^X, M^Y)$ – эргодически разложимое ограничение, $M \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ – соответствующий ему эргодически разложимый симплекс, Q_M и $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0 \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – связанные с ним марковское ядро и H-достаточная σ-алгебра.

Рассмотрим свойство линейного ограничения, которое гарантирует согласованность между симплексами мер, которым принадлежат маргиналы, и условием, накладываемым на транспортные планы.

Определение 3.7. Ограничение $R := (\Omega, M^X, M^Y)$ называется внутренне согласованным относительно M, если из включения $\pi \in \Pi_R(X \times Y)$ следует, что $\int\limits_S \omega d\pi = 0$ для всех $\omega \in \Omega$, $S \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0$.

В примерах мы будем использовать следующее достаточное условие внутренней согласованности.

Предложение 3.8. *Если найдется такое семейство отображений* $\{F_\alpha\}$, $F_\alpha \colon\ B(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to B(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, $\alpha \in \Lambda$, *что*

(1) $F_\alpha(gf) = gF_\alpha(f)$ *для всех* $g \in B(X \times Y, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0)$, $f \in B(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, $\alpha \in \Lambda$,

(2) *линейные ограничения* $R = (M^X, M^Y, \Omega_{\mathrm{cont}})$ *и* $R_{\mathrm{meas}} = (M^X, M^Y, \Omega_{\mathrm{meas}})$ *эквивалентны, где* $\Omega_{\mathrm{cont}} := \mathrm{span}\{f - F_\alpha(f) \colon\ f \in C_b(X \times Y),\ \alpha \in \Lambda\}$, $\Omega_{\mathrm{meas}} := \mathrm{span}\{f - F_\alpha(f) \colon\ f \in B(X \times Y,\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}),\ \alpha \in \Lambda\}$,

то R *– внутренне согласованное линейное ограничение.*

Доказательство. Мы хотим доказать, что $\int I_S(f - F_\alpha(f))d\pi = 0$ для всех $f \in C_b(X \times Y)$, $S \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0$, $\pi \in \Pi_R(X \times Y)$, $\alpha \in \Lambda$, где I_S – индикаторная функция множества S. Из равенства $\Pi_R(X \times Y) = \Pi_{R_{\mathrm{meas}}}(X \times Y)$ получаем $\int (f - F_\alpha(f))d\pi = 0$ для всех $\pi \in \Pi_R(X \times Y)$, $f \in B(X \times Y,\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, $\alpha \in \Lambda$. Доказываемое утверждение следует из того факта, что $\int I_S(f - F_\alpha(f))d\pi = \int (I_S f - F_\alpha(I_S f))d\pi$ и $I_S f \in B(X \times Y,\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ для всех $f \in C_b(X \times Y)$, $S \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0$, $\alpha \in \Lambda$. □

Замечание 3.9. В случае, если $\Pi_R(\mu, \nu) = \Pi(\mu, \nu) \cap M$ для всех $(\mu, \nu) \in M^X \times M^Y$ для эргодически разложимого ограничения R, это ограничение внутренне согласовано относительно M. Действительно, по определению M – это множество Q_M-инвариантных мер из $\mathcal{P}(X \times Y)$. Достаточно положить $F_1(f) := Q_M(f)$, $\Lambda = \{1\}$, $\widetilde{\Omega} := \{f - Q_M(f),\ \forall f \in C_b(X \times Y)\}$. Тогда ограничение $\widetilde{R} := (\widetilde{\Omega}, M^X, M^Y)$ внутренне согласовано и эквивалентно ограничению R.

Как мы увидим, предположения эргодической разложимости, внутренней согласованности и слабой регулярности дополнительного линейного ограничения вместе влекут результат о разложении соответствующей задачи Канторовича.

Пусть $d \colon\ X \times X \to \mathbb{R}$ – некоторая функция расстояния, $\mathrm{Dom}_Q \subseteq \mathcal{P}(X)$ – эргодически разложимый симплекс, $R = (\Omega, \mathrm{Dom}_Q, \mathrm{Dom}_Q)$ – линейное ограничение. Определим для каждого фиксированного $p \in [1, +\infty)$ функцию $W_p^R \colon\ \mathrm{Dom}_Q \times \mathrm{Dom}_Q \to [0, \infty]$ по формуле

$$W_p^R(\mu, \nu) := \inf \left\{ \left(\int d^p(x, y) d\pi \right)^{\frac{1}{p}} \ :\ \pi \in \Pi_R(\mu, \nu) \right\}. \tag{3.7}$$

В общем случае эта функция не удовлетворяет аксиомам расстояния, однако можно сформулировать дополнительное, четвёртое по счету предположение о линейном ограничении, при котором W_p^R гарантированно будет функцией расстояния.

Определение 3.10. Линейное ограничение $R = (\Omega_Q, \mathrm{Dom}_Q, \mathrm{Dom}_Q)$ называется метрическим для Q, если симплекс Dom_Q слабо замкнут, $\Omega_Q \subseteq C_b(X \times Y)$ и для всех $\omega \in \Omega_Q$ выполнены следующие условия:

(1) $((Id, Id)_{\#}\mu)(\omega) = 0$ для всех $\mu \in \mathrm{Dom}_Q$,
(2) $(\mu \otimes \nu)(\omega) = 0$ для всех $\mu, \nu \in \mathrm{Dom}_Q$,
(3) $\pi(\omega) = 0 \implies \pi^T(\omega) = 0$ для всех $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ и $\mu, \nu \in \mathrm{Dom}_Q$, где π^T определено соотношением

$$\int f(x, y) d\pi^T = \int f(y, x) d\pi \quad \text{для всех} \quad f \in C_b(X \times Y).$$

Предложение 3.11. *Если R – метрическое линейное ограничение, то W_p^R – $[0, +\infty]$-значная функция расстояния.*

Доказательство. Так как $\pi = (\mathrm{Id}, \mathrm{Id})_{\#}\mu \in \Pi_R(\mu, \mu)$, имеем $\int d^p d\pi = 0$ для этого π и $W_p^R(\mu, \mu) = 0$. По схожим причинам ($d^p = 0$ только на диагонали $\{(x, x)\}$, причем только планы вида $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})_{\#}\mu$ сосредоточены на ней) $W_p^R(\mu, \nu) \neq 0$, если $\mu \neq \nu$. Функция W_p^R симметрична, так как из включения $\pi \in \Pi_R(\mu, \nu)$ следует, что $\pi^T \in \Pi_R(\nu, \mu)$ и $\int d^p d\pi = \int d^p d\pi^T$. Неравенство треугольника доказывается стандартным образом (см., например, [1, теорема 2.2]) с использованием специальной версии леммы о склеивании, которую мы формулируем ниже. □

Лемма 3.12. *Пусть $R = (\Omega_Q, \mathrm{Dom}_Q, \mathrm{Dom}_Q)$ – метрическое линейное ограничение. Тогда для любых мер $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathrm{Dom}_Q$, $\pi_{12} \in \Pi_R(\mu_1, \mu_2)$, $\pi_{23} \in \Pi_R(\mu_2, \mu_3)$ существует мера $\gamma \in \mathcal{P}(X \times X \times X)$, такая, что $(\mathrm{Pr}_{12})_{\#}(\gamma) = \pi_{12}$, $(\mathrm{Pr}_{23})_{\#}(\gamma) = \pi_{23}$, $(\mathrm{Pr}_{13})_{\#}(\gamma) \in \Pi_R(\mu_1, \mu_3)$.*

Доказательство. Модифицируем доказательство классической леммы о склеивании (см. [19, лемма 2.2.]). Определим подпространство $V \subset C_b(X \times X \times X)$ следующим образом:

$$V := \Big\{ f_{12}(x_1, x_2) + f_{23}(x_2, x_3) + \omega_{13}(x_1, x_3) : \\ f_{12}, f_{23} \in C_b(X \times X),\ \omega_{13} \in \Omega_Q \Big\}. \tag{3.8}$$

Пусть $F(f_{12} + f_{23} + \omega_{13}) := \pi_{12}(f_{12}) + \pi_{23}(f_{23})$. Проверим, что функционал F корректно определён на V. Рассмотрим два представления некоторого элемента из V: $f_{12} + f_{23} + \omega_{13} = \widetilde{f}_{12} + \widetilde{f}_{23} + \widetilde{\omega}_{13}$. Заметим, что $\omega_{13}(x_1, x_3) - \widetilde{\omega}_{13}(x_1, x_3) = \omega_1(x_1) + \omega_3(x_3)$ для некоторых $\omega_1, \omega_3 \in \Omega_Q$.

Тогда $f_{12} - \widetilde{f}_{12} + \omega_1 = \widetilde{f}_{23} - f_{23} - \omega_3$ и, следовательно, обе части равенства зависят только от x_2. Получаем

$$\pi_{12}(f_{12} - \widetilde{f_{12}} + \omega_1) = \mu_2(f_{12} - \widetilde{f_{12}}) = \mu_2(\widetilde{f}_{23} - f_{23}) = \pi_{23}(\widetilde{f}_{23} - f_{23} - \omega_3),$$

что доказывает корректность определения функционала F на V. Легко проверить, что F – положительный линейный ограниченный функционал. Соответствующая версия теоремы Хана–Банаха (теорема 1.25 в [20]) утверждает, что такой функционал можно продолжить до положительного ограниченного функционала на всём $C_b(X \times X \times X)$. В силу того, что на подпространствах $C_b(X_k)$ действие функционала F совпадает с интегрированием по соответствующим мерам μ_k, мы можем применить теорему Рисса (теорема 7.10.6 в [21]) для продолжения F (предположения теоремы выполняются, достаточно рассмотреть произведения компактов). Полученная мера будет удовлетворять всем свойствам из формулировки доказываемой леммы. □

Предложение 3.13. *Метрическое линейное ограничение слабо регулярно.*

Доказательство. Так как $(\mu \otimes \nu)(\omega) = 0$, $\mu \otimes \nu \in \Pi_R(\mu, \nu)$ для всех $\mu, \nu \in \mathrm{Dom}_Q$, Dom_Q слабо замкнуто и $\Omega \subseteq C_b(X \times Y)$, ограничение $R = (\Omega, \mathrm{Dom}_Q, \mathrm{Dom}_Q)$ слабо регулярно в силу замечания 3.4. □

Проверим, что в нашем основном примере инвариантных мер (пример 2.14) можно естественным образом ввести дополнительное ограничение, удовлетворяющее всем описанным выше условиям.

Пример 3.14 (Основной пример, продолжение)**.** Рассмотрим пример линейного ограничения $R = (\Omega, \mathrm{Dom}, \mathrm{Dom})$, где Dom – симплекс инвариантных мер, описанный в примере 2.14,

$$\Omega := \mathrm{span}(\{f - f \circ g\colon\ f \in C_b(X \times X),\ g \in \mathbb{G}\}).$$

Это ограничение налагает на транспортные планы требование инвариантности относительно диагонального действия группы $\mathbb{G}$ на $X \times X$ (см. [8, предложение 5.1]). Пусть $M = \mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X \times Y)$ – симплекс всех инвариантных мер на $X \times Y$ относительно такого действия, а $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mathrm{inv}}$ – σ-алгебра всех инвариантных измеримых множеств на $X \times Y$. Очевидно, что $\Pi_R(X \times Y) \subseteq M$, $\mathcal{A}^{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{B}^{\mathrm{inv}} \subseteq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mathrm{inv}}$ и $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mathrm{inv}}$ – H-достаточная подалгебра, соответствующая M. Чтобы показать *эргодическую разложимость* ограничения R (определение 3.6), нужно проверить, что каждая эргодическая мера из $P_{\mathbb{G}}(X \times Y)$ имеет своими проекциями эргодические меры из $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)$, что очевидно из рассуждения от противного.

Покажем, что это ограничение является *метрическим* (определение 3.7):

(1) множество $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)$ замкнуто и $\Omega \subset C_b(X \times X)$,
(2) $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})_{\#}\mu(f(x,y) - f(g(x), g(y))) = \mu(f(x,x) - f(g(x,x))) = \mu(f(x,x)) - g_{\#}\mu(f(x,x)) = 0$, если $\mu \in \mathrm{Dom} = \mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)$, $f \in C_b(X \times X)$, $g \in \mathbb{G}$, $\mu(f) := \int f d\mu$,
(3) заметим, что

$$
\begin{aligned}
(\mu \otimes \nu)(f(x,y) &- f(g(x), g(y)) \\
&= \int \left(\int f(x,y) - f(g(x), y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\
&+ \int \left(\int f(g(x), y) - f(g(x), g(y)) d\nu(y) \right) d\mu(x) = 0 \\
&\text{для всех } \ \mu, \nu \in \mathrm{Dom} = \mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X), \ f \in C_b(X \times X), \ g \in \mathbb{G},
\end{aligned}
$$

(4) так как из включения $f(x,y) - f(g(x), g(y)) \in \Omega$ следует, что $f(y,x) - f(g(y),\ g(x)) \in \Omega$ для всех $f \in C_b(X \times X)$, последнее условие из определения метрического ограничения выполнено.

Нам также нужно проверить, что ограничение является *внутренне согласованным* относительно M (определение 3.7). Можно заметить, что $\Pi_R(\mu, \nu) = \Pi(\mu, \nu) \cap \mathcal{P}(X \times Y)$ для всех $(\mu, \nu) \in M^X \times M^Y$, и воспользоваться замечанием 3.9.

Замечание 3.15. В контексте симплекса инвариантных мер Dom (пример 2.14) можно рассмотреть и другие примеры хороших дополнительных ограничений. У нас есть фиксированное действие группы $\mathbb{G}$ на X. Можно рассмотреть действие прямой суммы групп $\mathbb{G} \oplus \mathbb{G}$ на пространстве $X \times X$, заданное естественным образом: $(g_1, g_2)(x_1, x_2) := (g_1(x_1), g_2(x_2))$.

Зафиксируем подгруппу $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{G} \oplus \mathbb{G}$ с индуцированным действием на $X \times X$. Если эта подгруппа принадлежит к одному из классов групп из примера 2.14 и ее проекции на первую и вторую компоненты равны $\mathbb{G}$, то соответствующее ограничение $R = (\Omega, \mathrm{Dom}, \mathrm{Dom})$,

$$
\Omega := \mathrm{span}(\{f - f \circ h \colon \quad f \in C_b(X \times X), \ h \in \mathbb{H}\}),
$$

обладает свойствами эргодической разложимости и внутренней согласованности из этого параграфа. Проверка осуществляется аналогично той, что мы провели для диагонального действия группы.

§4. Разложение задачи Канторовича

В этом параграфе мы сформулируем и докажем результат, аналогичный теореме 1.1, для задачи Канторовича с дополнительными ограничениями в предположении эргодической разложимости, слабой регулярности и внутренней согласованности линейных ограничений.

Пусть $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ – пара польских пространств с борелевскими σ-алгебрами, $M^X \subseteq \mathcal{P}(X)$ и $M^Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$ – два замкнутых эргодически разложимых симплекса. Обозначим через Q_X и Q_Y соответствующие им марковские ядра на $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, такие, что $\partial_e(M^X) = \{Q_X^x\}$, $\partial_e(M^Y) = \{Q_Y^y\}$. Если $\mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}^0 \subseteq \mathcal{B}$ – связанные с ними H-достаточные подалгебры, то по определению Q_X и Q_Y являются разложениями для троек $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^0, M^X)$ и $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^0, M^Y)$ соответственно. Будем также использовать обозначения $\xi(x) := Q_X^x$, $\eta(y) := Q_Y^y$. Заметим, что отображения $\xi\colon\ X \to \partial_e(M^X)$, $\eta\colon\ Y \to \partial_e(M^Y)$ будут $\mathcal{A}^0$- и $\mathcal{B}^0$-измеримыми соответственно.

Пусть $R = (\Omega, M^X, M^Y)$ – *слабо регулярное*, *эргодически разложимое* и *внутренне согласованное* относительно M линейное ограничение, где $M \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ – соответствующий эргодически разложимый симплекс, Q_M и $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0 \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – связанные с ним марковское ядро и H-достаточная σ-алгебра.

Определение 4.1. Обозначим через $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu})$ множество всех вероятностных мер $\widetilde{\pi} \in \mathcal{P}(X \times Y, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0)$, таких, что $\mathrm{Pr_X}(\widetilde{\pi}) = \widetilde{\mu}$, $\mathrm{Pr_Y}(\widetilde{\pi}) = \widetilde{\nu}$.

Определение 4.2. Пусть $\mu \in M^X$, $\nu \in M^Y$. Определим $\Theta(R, \mu, \nu)$ как множество всех пар (π, Q_π), где $\pi \in \Pi_R(\mu, \nu)$, а Q_π – такое марковское переходное ядро из $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ в $(X \times Y, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0)$, что $Q_\pi(\widetilde{\pi}) = \pi$ и $Q_\pi^{(x,y)} \in \Pi_R(Q_X^x, Q_Y^y)$ для $\widetilde{\pi}$-п.в. $(x, y) \in X \times Y$. Здесь $\widetilde{\pi}$ – ограничение меры π с $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ на $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0$.

В следующей лемме используется свойство эргодической разложимости и внутренней согласованности линейного ограничения.

Лемма 4.3. *В предположениях, сделанных выше, для каждой меры $\pi \in \Pi_R(\mu, \nu)$ существует такое марковское переходное ядро Q_π, что $(\pi, Q_\pi) \in \Theta(R, \mu, \nu)$.*

Доказательство. Для каждой меры $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ определим меру $\widetilde{\pi}$ как ограничение меры π на $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0$. Ее маргиналы, $\mathrm{Pr}_X(\widetilde{\pi})$ и $\mathrm{Pr}_Y(\widetilde{\pi})$, будут являться ограничениями мер μ и ν на подалгебры $\mathcal{A}^0$ и $\mathcal{B}^0$ соответственно. Значит, из включения $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ следует, что $\widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})$ (см. определение 4.1).

Положим $Q_\pi := Q_M$, где Q_M – марковское ядро из свойства эргодической разложимости ограничения R. Из этого свойства следует, что $Q(\widetilde{\pi}) = \pi$ и что $Q_\pi^{(x,y)} \in \mathcal{P}(X\times Y)$. Более того, $\mathrm{Pr}(Q_\pi^{(x,y)}) = (\xi(x),\eta(y))$ для $\widetilde{\pi}$-п.в. (x,y).

Проверим, что почти всюду относительно $\widetilde{\pi}$ имеем $Q_\pi^{(x,y)}(\omega) = 0$ для каждой функции $\omega \in \Omega$. Используем тот факт, что

$$\int h\,dQ_\pi^{(x,y)} = \mathbb{E}_\pi(h|(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0)\ \pi\text{-п.в. для всех } h \in B(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}). \quad (4.1)$$

Из определения условного математического ожидания и внутренней согласованности ограничения R получаем

$$\int_S \left(\int \omega dQ_\pi^{(x,y)}\right) d\widetilde{\pi} = \int_S \omega d\pi = 0 \quad \text{для всех } \ S \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0.$$

Следовательно, $\int \omega dQ_\pi^{(x,y)} = 0$ для $\widetilde{\pi}$-п.в. (x,y).

Как мы только что показали, $Q_\pi^{(x,y)} \in \Pi_R(\xi(x),\eta(y))$ для $\widetilde{\pi}$-п.в. (x,y). Так как отображение $(x,y)\to Q_\pi^{(x,y)}$ является $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0$-измеримым, Q_π – марковское переходное ядро из $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ в $(X\times Y,(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0)$. Из равенства (4.1) следует, что

$$\int Q_\pi(f)d\widetilde{\pi} = \int f d\pi \quad \text{для всех } \ f \in B(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}),$$

поэтому $(\pi, Q_\pi) \in \Theta(R,\mu,\nu)$, что завершает доказательство. □

В дальнейшем нам потребуется следующий факт о существовании измеримого выбора. Напомним обозначение: $\mathrm{Pr}(\pi) := (\mathrm{Pr}_{\mathrm{X}}(\pi), \mathrm{Pr}_{\mathrm{Y}}(\pi))$.

Предложение 4.4. *Пусть X, Y – польские пространства с борелевскими σ-алгебрами. Если $R = (\Omega, M^X, M^Y)$ – слабо регулярное линейное ограничение, а* Cost *– слабо полунепрерывный снизу функционал стоимости, то существует такое измеримое отображение $f\colon M^X\times M^Y \to \Pi_R^{\mathrm{opt}}(X\times Y)$, что $\mathrm{Pr}(f(\mu,\nu)) = (\mu,\nu)$.*

В задаче Канторовича без дополнительных ограничений подобный результат хорошо известен (см. [4, следствие 5.22]). Стандартное доказательство опирается на следующий результат, верный при широких условиях: c-циклическая монотонность носителя транспортного плана влечет его оптимальность. Однако подобный результат не верен в задаче с дополнительными ограничениями (см. [8]). Поэтому возникает необходимость предложить иной способ доказательства. Воспользуемся следующим утверждением об измеримом выборе в задачах оптимизации.

Теорема 4.5. ([23, теорема 4.1, следствие 4.3]). *Пусть* $(\Theta, \mathcal{A})$ *и* $(S, \mathcal{B})$ *– польские пространства с борелевскими* σ*-алгебрами,* $D \subseteq \Theta \times S$, $u : D \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $L_t := \{(\theta, s) \in D\colon\ u(\theta, s) \leqslant t\}$, $t \in \mathbb{R}$, $L_{+\infty} := D$. *Если для всякого* $t \in (-\infty, +\infty]$ *имеем* $L_t \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *и для всякого* $t \in \mathbb{R}$ *множества* $L_t(\theta) := L_t \cap \{(\theta, s)\colon\ s \in S\}$ *компактны для каждого* $\theta \in \mathrm{Pr}_\Theta(D)$, *то существует такая измеримая функция* $f\colon\ \mathrm{Pr}_\Theta(D) \to S$, *что* $u(\theta, f(\theta)) = \inf_{s \in D(\theta)} u(\theta, s)$ *для всех* $\theta \in \mathrm{Pr}_\Theta(D)$, *где* $D(\theta) := \mathrm{Pr}_\Theta^{-1}(\theta) \cap D$.

Наделим множества $\Theta := M^X \times M^Y$ и $S := \Pi_R(X \times Y)$ топологиями слабой сходимости и соответствующими борелевскими σ-алгебрами. Тогда оба пространства Θ и S окажутся польскими; значит, вследствие слабой регулярности ограничения R множество S будет замкнутым. Положим

$$D := \{(\mu, \nu, \pi)\colon\ \pi \in \Pi_R(\mu, \nu),\ (\mu, \nu) \in M^X \times M^Y\},$$

$u((\mu, \nu), \pi) := \mathrm{Cost}(\pi)$. Тогда

$$\begin{aligned} L_t = \{(\mu, \nu, \pi)\colon\ &\mathrm{Cost}(\pi) \leqslant t,\\ &\pi \in \Pi_R(\mu, \nu),\ (\mu, \nu) \in M^X \times M^Y\},\ t \in (-\infty, +\infty],\\ L_t(\mu, \nu) &= \{\pi\colon\ \mathrm{Cost}(\pi) \leqslant t,\ \pi \in \Pi_R(\mu, \nu)\},\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Чтобы применить приведенную выше теорему, нужно сначала доказать, что множество L_t борелевское, а множество $L_t(\mu, \nu)$ компактно. Последнее, очевидно, следует из слабой регулярности ограничения, а первое сводится к проверке следующего утверждения.

Лемма 4.6. *Если* R *слабо регулярно и функционал* $\mathrm{Cost}\colon \Pi_R(X \times Y) \to \mathbb{R}$ *полунепрерывен снизу, то множество* $L_t := \{(\mu, \nu, \pi)\colon\ \mathrm{Cost}(\pi) \leqslant t,\ \pi \in \Pi_R(\mu, \nu),\ (\mu, \nu) \in M^X \times M^Y\}$, $t \in (-\infty, +\infty]$, *является элементом* σ*-алгебры* $\mathrm{Bor}(M^X \times M^Y) \otimes \mathrm{Bor}(\Pi_R(X \times Y))$.

Доказательство. Благодаря слабой регулярности ограничения, пространство $\Pi_R(X \times Y)$ является польским, а $\Pi_R(\mu,\nu)$ – польским компактом. Так как функционал Cost полунепрерывен снизу, его линии подуровня $\Pi_t := \{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)\colon\ \mathrm{Cost}(\pi) \leqslant t\}$ замкнуты. Поскольку $L_t(\mu,\nu) = \Pi_R(\mu,\nu) \cap \Pi_t$, пространство $L_t(\mu,\nu)$ является компактом.

Пусть

$$(\Omega,\mathcal{A}) := (M^X \times M^Y, \mathrm{Bor}(M^X \times M^Y)),$$
$$(S,\mathcal{B}) := (\Pi_R(X \times Y), \mathrm{Bor}(\Pi_R(X \times Y))),$$

$T\colon\ M^X \times M^Y \to 2^{\Pi_R(X\times Y)}$, $T(\mu,\nu) = L_t(\mu,\nu)$. Тогда L_t – график отображения T. Заметим, что T принимает компактные (и, следовательно, замкнутые) значения.

Зафиксируем произвольное замкнутое множество $V \subseteq \Pi_R(X \times Y)$. Покажем, что прообраз $T^{-1}(V) := \{(\mu,\nu)\colon\ L_t(\mu,\nu) \cap V \neq \varnothing\}$ замкнут и потому принадлежит борелевской алгебре. Из такого свойства отображения следует (см., например, [24, теорема 3.5]), что его график является борелевским множеством. Это завершит доказательство леммы.

Если множество V пусто, то это тривиально верно. Предположим, что оно непусто. Рассмотрим последовательность $(\mu_n,\nu_n) \in T^{-1}(V)$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к (μ,ν) в $M^X \times M^Y$. Тогда $\mu_n \to \mu$, $\nu_n \to \nu$ слабо, причем последовательности (μ_n), (ν_n) плотны. Для каждой пары (μ_n,ν_n) существует $\pi_n \in L_t(\mu_n,\nu_n) \cap V$. Из этого следует, что $\mathrm{Pr}(\pi_n) = (\mu_n,\nu_n)$ и последовательность (π_n) плотна (для обоснования плотности можно рассмотреть произведения компактов). Пусть подпоследовательность (π_{n_k}) слабо сходится к пределу π. Так как V замкнуто, $\pi \in V$. Из слабой непрерывности оператора Pr и слабой полунепрерывности снизу функционала Cost ясно, что $\mathrm{Pr}(\pi) = (\mu,\nu)$ и $\mathrm{Cost}(\pi) \leqslant t$. Из слабой регулярности ограничения R следует, что функционал $\pi \to \int \omega d\pi$ слабо непрерывен для всякой функции $\omega \in \Omega$. Значит, $\int \omega d\pi = 0$ и $\pi \in L_t(\mu,\nu)$. Получаем, что для всякой пары (μ,ν) существует мера $\pi \in L_t(\mu,\nu) \cap V$, $(\mu,\nu) \in T^{-1}(V)$ и $T^{-1}(V)$ секвенциально замкнуто. Так как $M^X \times M^Y$ метризуемо, секвенциальная замкнутость влечет замкнутость, так что $T^{-1}(V)$ оказывается замкнутым. $\square$

Пусть $c\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}$ – такая измеримая функция, что функционал $\mathrm{Cost}\colon\ \mathcal{P}(X \times Y) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенный как $\mathrm{Cost}(\pi) = \int c\, d\pi$, оказывается полунепрерывным снизу относительно топологии слабой сходимости.

Лемма 4.7. *При предположениях, сделанных выше, существует марковское переходное ядро* Q_{opt} *из* $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ *в* $(X\times Y,(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0)$, *такое, что*

(1) $\int c\,dQ_{\text{opt}}^{(x,y)} = \inf\left\{\int c\,d\pi\colon\ \pi\in\Pi_R(\xi(x),\eta(y))\right\}$ *для всех* $(x,y)\in X\times Y$,

(2) $\int c dQ_{\text{opt}}(\widetilde{\pi})\leqslant\int c dQ_\pi(\widetilde{\pi})$ *для каждой пары* $(\pi,Q_\pi)\in\Theta(R,\mu,\nu)$, *где* $\widetilde{\pi}$ – *ограничение меры* π *с* $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ *на* $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0$,

(3) $(Q_{\text{opt}}(\widetilde{\pi}),Q_{\text{opt}})\in\Theta(R,\mu,\nu)$ *для каждой меры* $\widetilde{\pi}\in\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})$, *где* $\widetilde{\mu}$ – *ограничение меры* μ *с* $\mathcal{A}$ *на* $\mathcal{A}^0$, $\widetilde{\nu}$ – *ограничение меры* ν *с* $\mathcal{B}$ *на* $\mathcal{B}^0$.

Доказательство. Согласно предложению 4.4 существует измеримое отображение $f\colon\ M^X\times M^Y\to\Pi_R^{\text{opt}}(X\times Y)$, такое, что $\Pr(f(\mu,\nu))=(\mu,\nu)$. Пусть $Q_{\text{opt}}^{(x,y)}:=f(\xi(x),\eta(y))$. Так как $x\to\xi(x)$ и $y\to\eta(y)$ – измеримые отображения относительно алгебр $\mathcal{A}^0$ и $\mathcal{B}^0$ соответственно, Q_{opt} в действительности является марковским переходным ядром из $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ в $(X\times Y,\mathcal{A}^0\otimes\mathcal{B}^0)$ и, следовательно, переходным ядром в $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0$. Из определения следует, что

$$\int c\,dQ_{\text{opt}}^{(x,y)}=\inf\left\{\int c\,d\gamma\colon\ \gamma\in\Pi_R(\xi(x),\eta(y))\right\}.$$

Пусть $(\pi,Q_\pi)\in\Theta(R,\mu,\nu)$. Тогда $\int c\,dQ_\pi(\widetilde{\pi}):=\int\left(\int c\,dQ_\pi^{(x,y)}\right)d\widetilde{\pi}$. Так как $Q_\pi^{(x,y)}\in\Pi_R(\xi(x),\eta(y))$ $\widetilde{\pi}$-п.в. и $\int c\,dQ_\pi^{(x,y)}\geqslant\int c\,dQ_{\text{opt}}^{(x,y)}$ $\widetilde{\pi}$-п.в., имеем $\int c\,dQ_\pi(\widetilde{\pi})\geqslant\int c\,dQ_{\text{opt}}(\widetilde{\pi})$.

Пусть $\widetilde{\pi}\in\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})$, где $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\nu}$ – ограничения мер $\mu\in M^X$, $\nu\in M^Y$ на $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}^0$ соответственно. По определению марковского переходного ядра $Q_{\text{opt}}(\widetilde{\pi})\in\mathcal{P}(X\times Y)$. Проверим, что $Q_{\text{opt}}(\widetilde{\pi})\in\Pi_R(\mu,\nu)$. Так как $Q_{\text{opt}}^{(x,y)}\in\Pi_R(\xi(x),\eta(y))$ для каждой пары $(x,y)\in X\times Y$, можно показать, что $\Pr(Q_{\text{opt}}(\widetilde{\pi}))=(\mu,\nu)$. Приведем рассуждение для первого маргинала:

$$\begin{aligned}\int\int f(\widetilde{x})dQ_{\text{opt}}^{(x,y)}(\widetilde{x},\widetilde{y})d\widetilde{\pi}(x,y)&=\int\int f(\widetilde{x})dQ_X^x(\widetilde{x})d\widetilde{\pi}(x,y)\\&=\int\int f(\widetilde{x})dQ_X^x(\widetilde{x})d\widetilde{\mu}(x)=\int f(x)d\mu\ \text{для всех}\ \ f\in B(X,\mathcal{A}),\end{aligned}\tag{4.2}$$

где последнее равенство следует из того факта, что Q_X является разложением для $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^0, M^X)$. Аналогично можно провести рассуждение для второго маргинала. Ясно, что равенство $\int \omega\, dQ_{\mathrm{opt}}^{(x,y)} = 0$ для всех (x,y) влечет равенство $\int\int \omega\, dQ_{\mathrm{opt}}^{(x,y)} d\widetilde{\pi} = 0$. Поэтому $Q_{\mathrm{opt}}(\widetilde{\pi}) \in \Pi_R(\mu,\nu)$ и, следовательно, существует мера $\pi \in \Pi_R(\mu,\nu)$, такая, что $\pi = Q_{\mathrm{opt}}(\widetilde{\pi}) \in \Pi_R(\mu,\nu)$. $\square$

Сформулируем и докажем основной результат.

Теорема 4.8 (Основная теорема)**.** *Пусть $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ – два польских пространства с борелевскими σ-алгебрами, $c\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ – такая измеримая функция, что функционал $\mathrm{Cost}\colon \mathcal{P}(X\times Y) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, определяемый как $\mathrm{Cost}(\pi) = \int c\, d\pi$, оказывается полунепрерывным снизу относительно топологии слабой сходимости, M^X, M^Y – два эргодически разложимых симплекса, $\mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}^0 \subseteq \mathcal{B}$ – соответствующие им σ-подалгебры, $R = (\Omega, M^X, M^Y)$ – слабо регулярное, эргодически разложимое и внутренне согласованное относительно M линейное ограничение, где $M \subseteq \mathcal{P}(X\times Y)$ – соответствующий эргодически разложимый симплекс, Q_M и $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0 \subseteq \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ – связанные с ним марковское ядро и H-достаточная σ-алгебра. Тогда*

$$\begin{aligned}\inf\left\{\int c\, d\pi\colon\ \pi\in\Pi_R(\mu,\nu)\right\} &= \inf\left\{\int Q_{\mathrm{opt}}(c)d\widetilde{\pi}\colon\ \widetilde{\pi}\in\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})\right\}\\ &= \inf\left\{\int \inf\left\{\int c\, d\pi\colon\ \pi\in\Pi_R(\xi(x),\eta(y))\right\} d\widetilde{\pi}\colon\ \widetilde{\pi}\in\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})\right\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть

$$\Theta_{\mathrm{opt}}(R,\mu,\nu) := \{(Q_{\mathrm{opt}}(\widetilde{\pi}), Q_{\mathrm{opt}})\colon\ \widetilde{\pi}\in\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})\},$$

где Q_{opt} определено как в лемме 4.7. По этой лемме $\Theta_{\mathrm{opt}}(R,\mu,\nu) \subseteq \Theta(R,\mu,\nu)$; следовательно,

$$\inf\left\{\int Q_\pi(c)d\widetilde{\pi}\colon\ (\pi,Q_\pi)\in\Theta(R,\mu,\nu)\right\} \leqslant \inf\left\{\int Q_{\mathrm{opt}}(c)d\widetilde{\pi}\colon\ \widetilde{\pi}\in\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})\right\}.$$

Согласно лемме 4.3

$$\inf\left\{\int c\, d\pi\colon\ \pi\in\Pi_R(\mu,\nu)\right\} = \inf\left\{\int Q_\pi(c)d\widetilde{\pi}\colon\ (\pi,Q_\pi)\in\Theta(R,\mu,\nu)\right\}.$$

По лемме 4.7 имеем

$$\int c\,dQ_{\mathrm{opt}}(\widetilde{\pi}) \leqslant \int c\,dQ_{\pi}(\widetilde{\pi})$$

для всех $(\pi, Q_\pi) \in \Theta(R, \mu, \nu)$. Значит,

$$\inf\left\{\int Q_\pi(c)d\widetilde{\pi}\colon\ (\pi, Q_\pi) \in \Theta(R,\mu,\nu)\right\} \geqslant \inf\left\{\int Q_{\mathrm{opt}}(c)d\widetilde{\pi}\colon\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu})\right\}.$$

Теперь можно заключить, что

$$\inf\left\{\int c\,d\pi\colon\ \pi \in \Pi_R(\mu,\nu)\right\} = \inf\left\{\int Q_{\mathrm{opt}}(c)d\widetilde{\pi}\colon\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu})\right\}.$$

Равенство

$$\inf\left\{\int c\,d\pi\colon\ \pi \in \Pi_R(\mu,\nu)\right\} = \inf\left\{\int \inf\left\{\int c\,d\pi\colon\ \pi \in \Pi_R(\xi(x), \eta(y))\right\} d\widetilde{\pi}\colon\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu})\right\}$$

следует из явной формы ядра Q_{opt}, описанной в лемме 4.7. □

§5. Разложение обобщенных метрик Канторовича

В этом параграфе мы опишем приложение результата о разложении задачи Канторовича (теорема 4.8) к обобщенным метрикам Канторовича.

Зафиксируем некоторую функцию расстояния $d\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$ и эргодически разложимый симплекс $\mathrm{Dom}_Q \subseteq \mathcal{P}(X)$. Напомним, что под обобщенной метрикой Канторовича мы имеем в виду функцию $W_p^R\colon\ \mathrm{Dom}_Q \times \mathrm{Dom}_Q \to [0, \infty]$ из определения 3.7.

Для каждой $[0, +\infty]$-значной функции расстояния $\bar{d}$ на множестве $\partial_e \mathrm{Dom}_Q$ экстремальных точек множества Dom_Q определим ее продолжение до функции расстояния на всем Dom_Q:

$$\widehat{d_p}(\mu,\nu) := \inf\left\{\left(\int \bar{d}^p(\xi,\eta)d\pi\colon\right)^{\frac{1}{p}}\ \pi \in \Pi(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu})\right\}, \tag{5.1}$$

где $\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu} \in \mathcal{P}(\partial_e \operatorname{Dom}_Q)$,

$$\Pi(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}) := \Big\{\pi \in \mathcal{P}(\partial_e \operatorname{Dom}_Q \times \partial_e \operatorname{Dom}_Q)\colon\ \operatorname{Pr}_1(\pi) = \widetilde{\mu}, \operatorname{Pr}_2(\pi) = \widetilde{\nu}\Big\},$$
$$\operatorname{bar}(\widetilde{\mu}) = \mu, \quad \operatorname{bar}(\widetilde{\nu}) = \nu.$$

Теорема 5.1 (Разложение модифицированного расстояния Канторовича)**.** *Пусть (X,d) – метрическое польское пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{A}$, $\operatorname{Dom}_Q \subseteq \mathcal{P}(X)$ – замкнутый эргодически разложимый симплекс с соответствующим ему марковским ядром Q, таким, что $\{Q^x\} = \partial_e \operatorname{Dom}_Q$, $\mathcal{A}^0$ – соответствующая H-достаточная σ-подалгебра, $R = (\Omega, \operatorname{Dom}_Q, \operatorname{Dom}_Q)$ – метрическое, эргодически разложимое и внутренне согласованное относительно M линейное ограничение, где $M \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ – соответствующий эргодически разложимый симплекс, Q_M и $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0 \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – связанные с ним марковское ядро и H-достаточная σ-алгебра. Тогда для $\bar{d} := W_p^R|_{\partial_e \operatorname{Dom}_Q}$ (ограничения функции W_p^R на множество $\partial_e \operatorname{Dom}_Q$) верно равенство*

$$W_p^R(\mu,\nu) = \widehat{d}_p(\mu,\nu) \ \textit{для любых}\ \ \mu,\nu \in \operatorname{Dom}_Q,$$

где $\widehat{d}_p$ задано формулой (5.1)*. Более того, W_p^R есть $[0,+\infty]$-значная функция расстояния на Dom_Q.*

Доказательство. Из того, что $R = (\Omega, \operatorname{Dom}_Q, \operatorname{Dom}_Q)$ является метрическим ограничением, следует, что оно слабо регулярно. Известно, что d^p – ограниченная снизу и полунепрерывная снизу функция на $X \times X$. Поэтому $\pi \to \int d^p d\pi$ – полунепрерывный снизу функционал на $\mathcal{P}(X \times X)$ (относительно топологии слабой сходимости). Так как все условия теоремы 4.8 выполнены, получаем

$$\inf\left\{\int d^p d\pi\colon\ \pi \in \Pi_R(\mu,\nu)\right\}$$
$$= \inf\left\{\int \inf\left\{\int d^p d\pi\colon\ \pi \in \Pi_R(\xi(x),\eta(y))\right\} d\widetilde{\pi}\colon\ \widetilde{\pi} \in \widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})\right\}.$$

Здесь $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu},\widetilde{\nu})$ – как в определении 4.1. Так как отображение

$$(x,y) \to \left\{\int d^p d\pi\colon\ \pi \in \Pi_R(\xi(x),\eta(y))\right\} \tag{5.2}$$

измеримо относительно $\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0$ и $\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0 \subseteq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^0$, замена множества $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu})$ на $\Pi(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu})$ не повлияет на значение инфимума:

$$\inf \left\{ \int d^p d\pi \colon\ \pi \in \Pi_R(\mu, \nu) \right\}$$
$$= \inf \left\{ \int \inf \left\{ \int d^p d\pi \colon\ \pi \in \Pi_R(\xi(x), \eta(y)) \right\} d\widetilde{\pi} \colon\ \widetilde{\pi} \in \Pi(\widetilde{\mu}, \widetilde{\nu}) \right\}.$$

Из определений метрик $\widehat{d_p}$, W_p^R и установленного факта об эквивалентности σ-алгебр на пространстве мер (предложение 2.13) вытекает, что полученное равенство равносильно равенству $W_p^R = \widehat{d_p}$. Из предложения 3.11 следует, что $W_p^R(\mu, \nu)$ является $[0, +\infty]$-значной функцией расстояния на Dom_Q. □

Можно заметить, что пример разложения, описанный во введении, является частным случаем доказанного утверждения.

§6. Благодарности

Автор хотел бы выразить благодарность В. И. Богачеву, А. М. Вершику и А. В. Колесникову за ценные замечания и помощь в подготовке данной работы.

Литература

1. L. Ambrosio, N. Gigli, *A user's guide to optimal transport.* — Lect. Notes Math. **2062** (2013), 1–155.
2. В. И. Богачев, А. В. Колесников, *Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы.* — УМН **67**, вып. 5 (2012), 3–110.
3. А. М. Вершик, *Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **312** (2004), 69–85.
4. C. Villani, *Optimal Transport, Old and New*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
5. M. Beiglböck, C. Griessler, *An optimality principle with applications in optimal transport*, `arXiv:1404.7054` (2014).
6. A. V. Kolesnikov, D. Zaev, *Optimal transportation of processes with infinite Kantorovich distance. Independence and symmetry*, `arXiv:1303.7255` (2013).
7. A. Moameni, *Invariance properties of the Monge–Kantorovich mass transport problem*, `arXiv:1311.7051` (2013).
8. D. Zaev, *On the Monge–Kantorovich problem with additional linear constraints*, `arXiv:1404.4962` (2014), to appear in Math. Notes.
9. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2001.

10. E. B. Dynkin, *Sufficient statistics and extreme points.* — Ann. Probab. **6**, No. 5 (1978), 705–730.
11. J. Kerstan, A. Wakolbinger, *Ergodic decomposition of probability laws.* — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **56**, No. 3 (1981), 339–414.
12. M. Colombo, S. Di Marino, *Equality between Monge and Kantorovich multi-marginal problems with Coulomb Cost.* — Ann. Mat. Pura Appl. **194**, No. 2 (2015), 307–320.
13. M. I. Cortez, J. Rivera-Letelier, *Choquet simplices as spaces of invariant probability measures on post-critical sets.* — Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéare **27**, No. 1 (2010), 95–115.
14. А. М. Вершик, *Оснащенные градуированные графы, проективные пределы симплексов и их границы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2015), 83–104.
15. T. Downarowicz, *The Choquet simplex of invariant measures for minimal flows.* — Israel J. Math. **74**, No. 2–3 (1991), 241–256.
16. M. Gaudard, D. Hadwin, *Sigma-algebras on spaces of probability measures.* — Scand. J. Statist. **16**, No. 2 (1989), 169–175.
17. M. Einsiedler, T. Ward, *Ergodic Theory: With a View Towards Number Theory*, Springer-Verlag, 2011.
18. K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, 1967.
19. O. Chodosh, *Optimal transport and Ricci curvature: Wasserstein space over the interval*, `arXiv:1105.2883` (2011).
20. C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, New York, 1985.
21. V. Bogachev, *Measure Theory*, Vol. 2, Springer, New York, 2007.
22. А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и теоремы вложения.* — Функц. анал. и прил. **47**, вып. 3 (2013), 1–11.
23. U. Rieder, *Measurable selection theorems for optimization problems.* — Manuscripta Math. **24**, No. 1 (1978), 1151–131.
24. C. Himmelberg, *Measurable relations.* — Fund. Math. **87**, No. 1 (1975), 53–72.

Zaev D. A. On ergodic decompositions related to the Kantorovich problem.

Let X be a Polish space, $\mathcal{P}(X)$ be the set of Borel probability measures on X, and $T\colon X \to X$ be a homeomorphism. We prove that for the simplex $\mathrm{Dom} \subseteq \mathcal{P}(X)$ of all T-invariant measures, the Kantorovich metric on Dom can be reconstructed from its values on the set of extreme points. This fact is closely related to the following result: the invariant optimal transportation plan is a mixture of invariant optimal transportation plans between extreme points of the simplex. The latter result can be generalized

to the case of the Kantorovich problem with additional linear constraints and the class of ergodic decomposable simplices.

Факультет математики,
НИУ Высшая школа экономики,
Москва, Россия
E-mail: zaev.da@gmail.com

Поступило 29 сентября 2015 г.