

Н. Н. Васильев, В. С. Дужин

ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА МАКСИМАЛЬНЫХ И
ТИПИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ СТРОГИХ
ДИАГРАММ ЮНГА

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было введено понятие нормализованной размерности стандартной диаграммы Юнга и были получены двусторонние оценки для нормализованных размерностей диаграмм, типичных по мере Планшереля, и диаграмм максимальной размерности. Кроме того, в этой же работе были высказаны гипотезы (до сих пор не доказанные) о сходимости нормализованных размерностей как для типичных по Планшерелю, так и для максимальных диаграмм. Результаты проверки этих гипотез с помощью компьютерных экспериментов были описаны в статьях [2, 3]. В настоящей работе мы аналогичными методами изучаем асимптотику размерностей строгих диаграмм, то есть рассматриваем аналогичную задачу на графе Шура. Мы описываем алгоритмы построения последовательностей диаграмм, обладающих высокими размерностями, или, что то же самое, низкими нормализованными размерностями. Кроме этого мы изучаем размерности типичных строгих диаграмм в планшерелевском процессе на графике Шура, которые выражаются через вероятности путей, ведущих к диаграммам. Как будет видно из представленных ниже графиков нормализованных размерностей, их асимптотическое поведение, как и в случае стандартного графа Юнга, хорошо согласуется с гипотезами А. М. Вершика.

1.1. Определения. Диаграмма Юнга формы $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_k)$, где $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k$, состоит из k столбцов, где столбец с номером i состоит из l_i клеток. Высоты столбцов (l_1, l_2, \dots, l_k) образуют разбиение числа n , равного $l_1 + l_2 + \dots + l_k$. Существует несколько эквивалентных

Ключевые слова: диаграммы Юнга, процесс Планшереля, граф Шура, проективные представления, симметрическая группа.

Работа поддержана грантом РНФ 14-11-00581.

способов графического представления диаграмм Юнга. В данной работе мы рисуем диаграммы в правом верхнем квадранте. В качестве примера на рис. 1 изображены диаграммы Юнга, соответствующие разбиениям $\{5, 4, 4, 2, 1, 1\}$ и $\{5, 3, 1\}$.

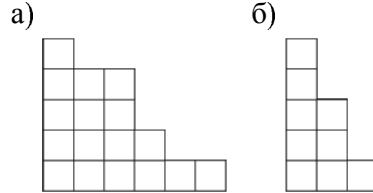


Рис. 1. Стандартная и строгая диаграммы Юнга.

Строгой диаграммой Юнга называется диаграмма, не имеющая столбцов одинаковой высоты. На рис. 1 изображены а) стандартная диаграмма Юнга, б) строгая диаграмма Юнга. Строгие диаграммы соответствуют так называемым строгим разбиениям натуральных чисел. Разбиение l_1, l_2, \dots, l_k числа n называется *строгим*, если оно не содержит одинаковых компонент.

Множество диаграмм Юнга есть множество вершин бесконечного ориентированного градуированного графа, называемого *графом Юнга*. Ребра в графе Юнга соединяют каждую диаграмму с диаграммами, получающимися из нее добавлением одной клетки.

Подграф графа Юнга, состоящий из строгих диаграмм Юнга, называется *графом Шура*. На рис. 2 изображено начало графа Юнга. Закрашенные диаграммы образуют начало графа Шура. *Шириной диаграммы* называется количество столбцов в ней, *размером диаграммы* – количество клеток. Под i -м уровнем графа Шура будем понимать множество всех строгих диаграмм размера i .

Таблицей Юнга называется такая расстановка чисел от 1 до n , где n – размер диаграммы, в ее клетках, что числа возрастают по строкам и столбцам. Легко видеть, что клетки диаграммы нумеруются в соответствии с порядком их возможного добавления. Диаграмма Юнга, в клетки которой расставлены соответствующие числа, называется *формой таблицы Юнга*. Таблицам Юнга соответствуют пути из корня графа Юнга в диаграмму заданной формы. *Размерностью стандартной диаграммы Юнга* будем называть количество путей в эту

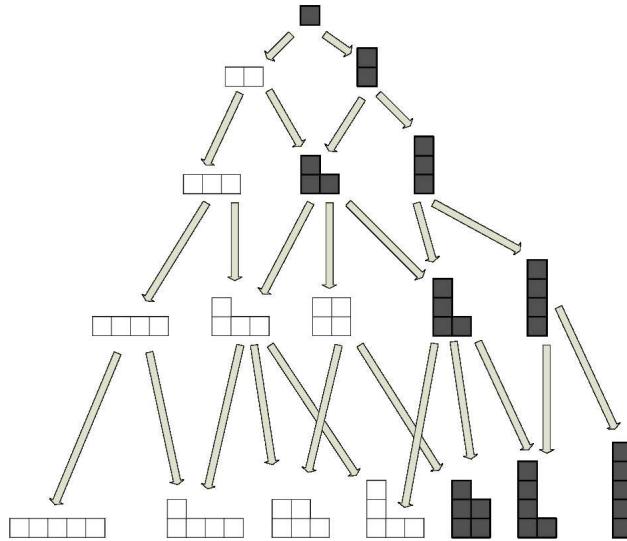


Рис. 2. Начало графа Юнга и графа Шура.

диаграмму. *Максимальной диаграммой* называется диаграмма, имеющая наибольшую размерность среди всех диаграмм данного размера.

Размерностью строгой диаграммы Юнга мы будем называть количество путей к ней из корня графа Шура. Пути в графе Шура находятся во взаимно однозначном соответствии с так называемыми *сдвинутыми таблицами Юнга*. Если сдвинуть вверх столбцы строгой диаграммы так, что столбец с номером i сдвигается на $i - 1$ клеток, то сдвинутой таблицей Юнга будет расстановка чисел от 1 до n , где n – размер диаграммы, в клетках сдвинутой диаграммы, такая, что числа возрастают по строкам и по столбцам. Легко видеть, что такие сдвинутые таблицы в точности соответствуют путям в графе Шура.

1.2. Точные и нормализованные размерности строгих диаграмм. Как в случае графа Юнга, так и в случае графа Шура существуют точные формулы, дающие размерность произвольной диаграммы. Для графа Юнга соответствующая формула – это знамени- тая формула крюков.

Формулу для размерности строгой диаграммы λ можно записать следующим образом [4–6]:

$$\dim(\lambda) = \prod_{i < j} \frac{l_i - l_j}{l_i + l_j} \cdot \frac{n!}{\prod l_i!}, \quad (1)$$

где l_i – высота i -го столбца диаграммы, а n – ее размер.

Эта формула получается из формулы крюков для количества сдвинутых таблиц Юнга несложными преобразованиями.

Значения размерностей при увеличении размера диаграмм могут расти очень быстро, поэтому для изучения их асимптотического поведения необходимо использовать их нормировку. В данной работе мы предлагаем использовать следующую формулу для нормализованной размерности:

$$c(\lambda) = -\frac{\ln \dim(\lambda) - \ln \sqrt{n!} + \frac{\ln 2}{2} \cdot n}{\sqrt{n}}. \quad (2)$$

Стандартные диаграммы Юнга размера n параметризуют неприводимые представления симметрической группы S_n . При этом размерностями диаграмм являются в точности веса неприводимых представлений. Строгие диаграммы размера n , или вершины графа Шура уровня n , параметризуют проективные представления группы S_n , но здесь соответствие уже не однозначное. В случае, если $\|\lambda\| - l(n)$ четно, строгой диаграмме λ соответствует одно проективное представление группы S_n . Если же $\|\lambda\| - l(n)$ нечетно, то диаграмме λ соответствуют два представления, размерности которых отличаются на единицу. Явное описание этих представлений и их размерностей приведено в статье [7].

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной статье с помощью компьютерных экспериментов изучается рост размерностей максимальных строгих диаграмм и строгих диаграмм в планшерелевском процессе.

Проблема изучения асимптотики нормализованных размерностей диаграмм на стандартном графе Юнга была поставлена А. М. Вершиком в статье [1], где была сформулирована гипотеза о сходимости нормализованных размерностей типичных по Планшерелю диаграмм.

Для диаграмм на стандартном графе Юнга эта задача с помощью компьютерных экспериментов исследовалась в [2, 3]. Описанные

там эксперименты дают дополнительные основания считать гипотезу А. М. Вершика справедливой и позволяют получить представление о значениях пределов нормализованной размерности, если эти пределы действительно существуют.

Целью настоящей работы является аналогичное исследование роста нормализованных размерностей в последовательностях максимальных диаграмм и типичных по Планшерелю на графе Шура. Мы применяем методы, использованные нами ранее при исследовании размерностей стандартных диаграмм Юнга. По всей видимости, подобные компьютерные эксперименты со строгими диаграммами не проводились.

§3. ПЛАНШЕРЕЛЕВСКИЙ ПРОЦЕСС НА СТРОГИХ ДИАГРАММАХ

На графе Шура можно определить центральную меру, которая называется мерой Планшереля. Нагрузка меры Планшереля в диаграмме λ задается следующей формулой [4, 8]:

$$\text{Pl}_n(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)^2}{n!} \cdot 2^{n-l(\lambda)}, \quad (3)$$

где $l(\lambda)$ – ширина диаграммы λ .

Этой мере соответствует центральный марковский процесс, называемый *планшерлевским процессом*. Свойство центральности означает, что все пути в диаграмму λ имеют одинаковую вероятность. Разделив (3) на количество путей $\dim(\lambda)$, получаем вероятность одного пути [8]:

$$P_{\text{path}}(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)}{n!} \cdot 2^{n-l(\lambda)}. \quad (4)$$

Вероятность перехода от диаграммы λ_1 размера n к диаграмме λ_2 размера $n+1$ вычисляется как отношение вероятностей путей к соответствующим диаграммам, вычисленных по формуле (4). Размерность $\dim(\lambda)$ вычисляется по формуле (1). После несложных преобразований получается следующая формула для вычисления переходной вероятности:

$$P(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = \frac{2^{l(\lambda_1)-l(\lambda_2)+1}}{H} \prod_{i \neq C} \frac{H-l_i}{H+l_i} \cdot \frac{H+l_i-1}{H-l_i-1},$$

где H – высота измененного столбца в диаграмме λ_2 , а C – номер измененного столбца.

Планшерелевской последовательностью будем называть путь, появляющийся в результате реализации процесса Планшереля. Планшерелевские последовательности, появляющиеся с вероятностью 1, называются *типичными по мере Планшереля*.

§4. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

К настоящему моменту не существует эффективного критерия, позволяющего доказать, что размерность некоторой диаграммы является максимальной. По этой причине мы использовали переборный алгоритм для вычисления точных максимальных диаграмм. Такой алгоритм имеет очень высокую сложность и не позволяет вычислять максимальные диаграммы, содержащие более нескольких сотен клеток. Нами были вычислены первые 250 строгих диаграмм максимальной размерности. На рис. 3 приведен график нормализованных размерностей этих диаграмм, а также график нормализованных размерностей планшерелевской последовательности.

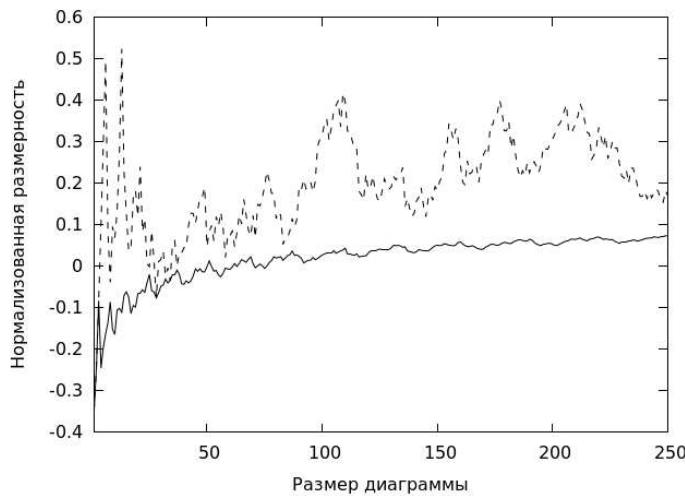


Рис. 3. Нормализованные размерности максимальных строгих диаграмм (сплошная линия) и диаграмм планшерелевской последовательности (пунктирная линия).

Для диаграмм с гораздо большим числом клеток мы ниже предлагаем алгоритмы, которые позволяют строить диаграммы с размерностями, по видимому, часто оказывающимися точными максимальными. Эти алгоритмы позволяют строить последовательности диаграмм с большими размерностями, или, что то же самое, с маленькими нормализованными размерностями, состоящих уже из сотен тысяч клеток. Исследование таких последовательностей дает представление об асимптотике нормализованных размерностей максимальных строгих диаграмм.

§5. РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММ С БОЛЬШИМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

5.1. Жадный алгоритм. Жадное приращение к диаграмме состоит в добавлении клетки, дающей диаграмму с наибольшей размерностью из возможных. Под *жадным алгоритмом*, или *жадным процессом*, будем понимать процесс последовательных жадных приращений к диаграмме. Получаемую в результате этого процесса последовательность будем называть *жадной последовательностью*.

Как видно из формулы (3), нагрузка меры Планшереля в строгой диаграмме зависит не только от размерности, но и от ширины диаграммы. Из этого следует, что планшерелевская вероятность пути в максимальную строгую диаграмму не обязана быть максимальной. Соответственно, идея жадного алгоритма, описанного в [3], была визуализирована в случае строгих диаграмм.

Поскольку настоящие размерности диаграмм очень велики, хранить их точные значения затруднительно. Для того чтобы сделать это возможным, мы на каждом шаге храним в виде рациональных чисел отношения точных размерностей соседних диаграмм в последовательности. Отношение размерностей диаграмм λ_2 и λ_1 , вычисленных по формуле (1), можно привести к виду

$$R = \frac{n}{H} \cdot \prod_{i \neq C} \frac{H - l_i}{H + l_i} \cdot \frac{H + l_i - 1}{H - l_i - 1}, \quad (5)$$

где n – новый размер диаграммы, H – высота измененного столбца в диаграмме λ_2 , C – номер измененного столбца, l_i – высота столбца i под номером i .

Заметим также, что если при каждом добавлении клетки запоминать значение логарифма отношения размерностей, вычисленного по

формуле (5), то это позволит в дальнейшем быстро вычислять значения логарифмов точных размерностей промежуточных диаграмм, суммируя значения логарифмов отношений.

5.2. Алгоритм встряски. Один из подходов к улучшению жадного алгоритма состоит в том, чтобы перед очередным жадным приращением диаграммы попытаться найти на этом же уровне диаграмму с большей размерностью. Такой подход мы называем алгоритмом встряски. Существуют различные реализации данного алгоритма.

В частности, можно перебирать диаграммы, отличающиеся в фиксированном числе клеток от исходной, и сравнивать их размерности. Другой возможный способ основан на наблюдении, что у первых точно вычисленных диаграмм максимальной размерности при переходе на следующий уровень длины строк изменяются не больше чем на единицу. Этот факт был использован в алгоритме перебора диаграмм, длины строк которых не больше чем на единицу отличаются от данных.

Мы использовали несколько различных способов встряски. В настоящей работе применяется метод, который осуществляет поиск диаграммы с большей размерностью на данном уровне графа Шура путем выполнения нескольких шагов “вперед – назад”. При этом шаги вперед, т.е. добавление клеток, происходят жадным способом, а шаги назад, т.е. вычитание, делаются так, чтобы отношение размерностей текущей диаграммы и меньшей диаграммы было, наоборот, минимальным из возможных.

Среди всех способов встряски, использованных нами, данный метод позволяет увеличивать текущую размерность диаграммы наилучшим образом.

5.3. Алгоритм ветвей. Алгоритм, который мы называем алгоритмом ветвей, основан на одновременном построении s последовательностей диаграмм и выборе из них на каждом шаге диаграммы с наибольшей размерностью. Таким образом, на i -м уровне графа Шура в качестве текущей рассматривается не одна, а s диаграмм размера i .

Алгоритм начинает работу из корня графа Шура, т.е. изначально в массив диаграмм помещается одна диаграмма размера 1. Для получения лучшей диаграммы размера $i + 1$ осуществляются следующие шаги.

- (1) К каждой диаграмме из массива жадным образом добавляется одна клетка. Размер диаграмм становится равным $i + 1$.
- (2) Из полученных диаграмм с помощью процедуры встрижки получаются другие диаграммы размера $i + 1$.
- (3) Лучшие s диаграмм, полученных в пп. 1 и 2, сохраняются в итоговый массив. Цикл повторяется.

Ниже будут представлены результаты экспериментов, показывающие, что такая процедура позволяет строить диаграммы значительно больших размерностей, чем жадный алгоритм.

§6. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 4 изображены разности нормализованных размерностей диаграмм жадной и типичной планшерелевских последовательностей. Рассмотрены диаграммы размером до миллиона клеток. Заметим, что каждая разность между настоящими размерностями диаграмм значительно превышает соответствующую разность между нормализованными размерностями. Например, разность между нормализованными размерностями диаграмм размера 20 из жадной и типичной планшерелевской последовательностей равна 0.1863933. При этом соответствующая разность между настоящими размерностями равна 1157328. Аналогичные значения для диаграмм размера 10000 равны 0.177724 и $\approx 5.5 \cdot 10^{16317}$ соответственно. На рис. 5 изображены нормализованные размерности диаграмм размером до миллиона клеток жадной последовательности и одной из случайных планшерелевских последовательностей. Как видно из графика, значение нормализованной размерности диаграмм жадной последовательности достаточно хорошо стабилизируется, что может свидетельствовать о наличии предела. Среднее арифметическое последних 50000 значений нормализованных размерностей диаграмм жадной последовательности равно 0.1794962.

На рис. 6 изображены последние сто тысяч значений нормализованных размерностей рис. 5. На рис. 7 отдельно изображена последовательность нормализованных размерностей диаграмм, построенных жадным алгоритмом на том же участке.

Заметим, что, несмотря на наличие осцилляций в жадной последовательности, их амплитуда намного меньше, чем у типичной планшерелевской последовательности.

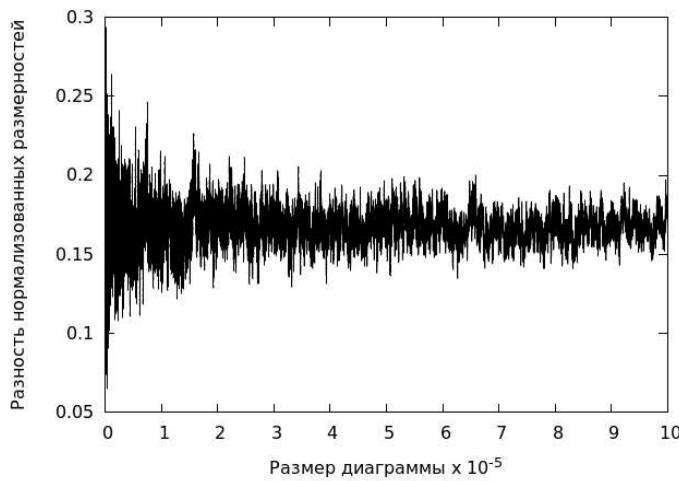


Рис. 4. Разности нормализованных размерностей жадной последовательности и планшерелевской последовательности.

Был проведен эксперимент по генерации множества планшерелевских процессов с целью получения средних значений и дисперсии нормализованных размерностей. Было построено 100 планшерелевских последовательностей для диаграмм размером до миллиона клеток. На рис. 8 и 9 изображены средние арифметические и дисперсии нормализованных размерностей соответственно. Поскольку дисперсия уменьшается, это дает основание думать, что у случайной планшерелевской последовательности существует предел нормализованной размерности.

На рис. 10 изображены нормализованные размерности диаграмм, полученных жадным алгоритмом и алгоритмом ветвей. Для того чтобы увидеть осциллирующий характер изменения нормализованной размерности, рассмотрен участок с диаграммами размера от 76000 до 80000 клеток.

В таблице приведены примеры, которые показывают, что алгоритм ветвей позволяет получить лучшие оценки максимальной размерности диаграмм, чем жадный алгоритм.

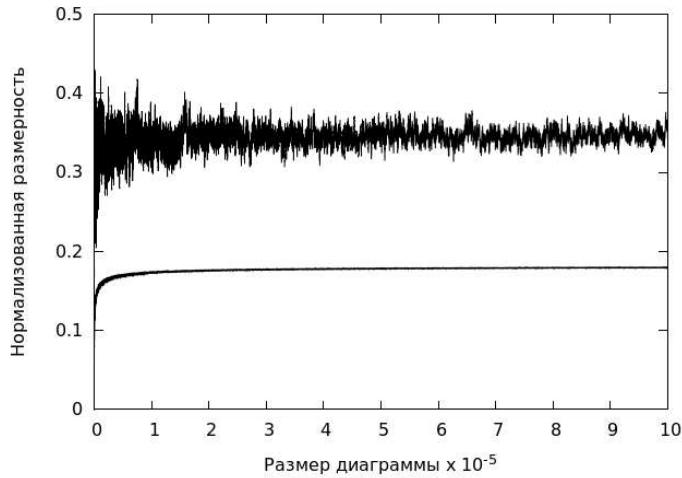


Рис. 5. Нормализованные размерности жадной (снизу) и планшерелевской (сверху) последовательностей диаграмм размером до миллиона клеток.

Характер поведения нормализованных размерностей строгих диаграмм напоминает поведение нормализованных размерностей стандартных диаграмм Юнга, также полученных жадным алгоритмом. Для сравнения на рис. 11 приведен график изменения нормализованной размерности жадной последовательности диаграмм на интервале от девяносто тысяч до миллиона клеток на стандартном графе Юнга. Эта функция так же сильно осциллирует, как и функция нормализованной размерности строгих диаграмм, показанная на рис. 7.

6.1. Жадные последовательности, начинающиеся с произвольных диаграмм. Жадная последовательность может быть построена начиная с любой диаграммы. При этом в большом количестве вычислительных экспериментов было проверено, что жадные последовательности, начинающиеся с различных диаграмм, образуют сливающиеся пути. Это справедливо как на графе Юнга [3], так и на графе Шура.

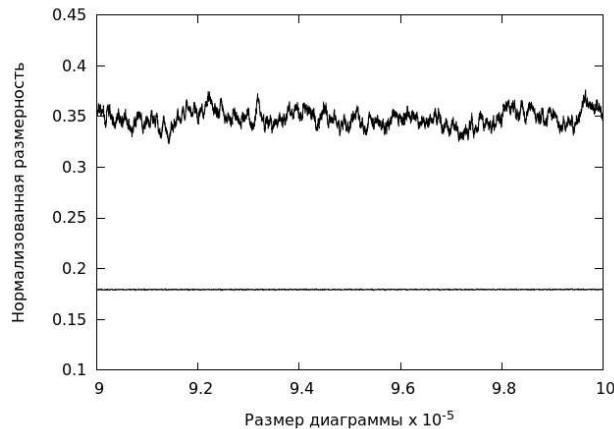


Рис. 6. Нормализованные размерности жадной (снизу) и планшерелевской (сверху) последовательностей диаграмм размером от девятисот тысяч до миллиона клеток.

Было сгенерировано 5000 пар планшерелевских строгих диаграмм Юнга из 5000 клеток. Каждая такая пара инициирует жадную последовательность диаграмм. Все эти последовательности сливаются в одну менее чем через 300 шагов после начала жадного процесса. Аналогичный единичный эксперимент был проведен для двух типичных диаграмм из миллиона клеток, и жадные процессы также слились через 23466 шагов.

На рис. 12 а), б) изображены две диаграммы Юнга из 500 клеток, сгенерированные с помощью случайного планшерелевского процесса. Жадные последовательности, начинающиеся с этих диаграмм, сливаются всего через 69 шагов. Их общая диаграмма из 569 клеток в точке слияния изображена на рис. 12 в).

Если формы начальных диаграмм жадных последовательностей сильно отличаются друг от друга, то количество шагов до слияния значительно выше. Нами были рассмотрены такие экстремальные случаи, когда начальные диаграммы существенно отличаются друг от

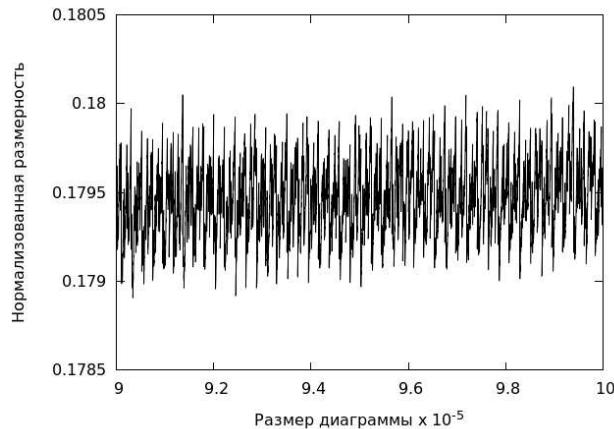


Рис. 7. Нормализованные размерности жадной последовательности диаграмм размером от девятисот тысяч до миллиона клеток.

Таблица 1. Примеры, в которых алгоритм ветвей дает большие размерности диаграмм по сравнению с размерностями диаграмм из жадной последовательности.

Размер диаграмм	25	174	500	100000	1000000
Разность между норма- лизованными размерностями	0.388×10^{-3}	3.965×10^{-4}	7.411×10^{-3}	2.47×10^{-4}	1.649×10^{-5}
Разница между настоящими размерностями	14421000	$\approx 1.3 \times 10^{129}$	$\approx 1.2 \times 10^{490}$	$\approx 2.6 \times 10^{213208}$	$\approx 5.4 \times 10^{2632259}$
Отношение настоящих размерностей	1.01961	1.00524	1.18104	1.00076	1.01663

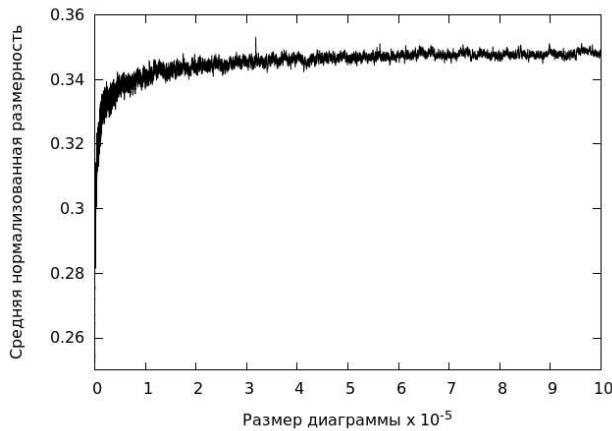


Рис. 8. Усредненные значения нормализованных размерностей типичных по мере Планшереля диаграмм для 100 экспериментов.

друга. В качестве начальных диаграмм были выбраны диаграмма-столбец и треугольная диаграмма (высоты столбцов отличаются на единицу, крайний правый столбец состоит из одной клетки).

Во всех компьютерных экспериментах, начинающихся с таких диаграмм, полученные последовательности диаграмм также сливаются. Были рассмотрены такие экстремальные пары диаграмм с размерами до 518 клеток. Например, жадные процессы, начинающиеся из диаграммы-столбца и треугольной диаграммы, состоящих из 518 клеток, сливаются через 34697 шагов.

Данное наблюдение дает основание выдвинуть гипотезу о том, что все жадные последовательности строгих диаграмм содержат бесконечное число диаграмм максимальной размерности. Легко понять, что если этот факт действительно имеет место, то асимптотика размерностей диаграмм в жадной последовательности совпадает с асимптотикой точных размерностей диаграмм максимальной размерности. Напротив, типичные последовательности, построенные с помощью процесса Планшереля, иногда не имеют ни одной общей диаграммы.

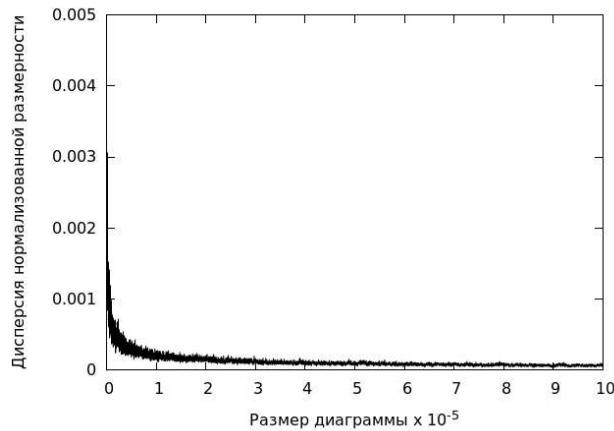


Рис. 9. Дисперсии нормализованных размерностей типичных по мере Планшереля диаграмм для 100 экспериментов.

§7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье мы описали способы построения последовательностей строгих диаграмм Юнга с большими размерностями. Размерности диаграмм в таких последовательностях дают лучшие нижние оценки максимальных размерностей строгих диаграмм. Из формулы (2) следует, что если нормализованная размерность диаграммы λ равна $c(\lambda)$, то $\dim(\lambda) \geq \exp(-c \cdot \sqrt{n}) \cdot \sqrt{n!} \cdot 2^{-\frac{n}{2}}$. Минимальное полученное нами значение c для диаграмм, состоящих из миллиона клеток, составляет ≈ 0.179 . Для диаграмм размером до 250 клеток включительно нами определены все точные максимальные размерности. Описанный в статье алгоритм ветвей строит эти же 250 максимальных диаграмм за доли секунды, но чтобы убедиться в том, что они действительно являются максимальными, требуются вычисления с помощью переборного алгоритма длительностью в несколько суток. Проведенные эксперименты дают дополнительные основания для гипотезы о сходимости последовательностей нормализованных размерностей как

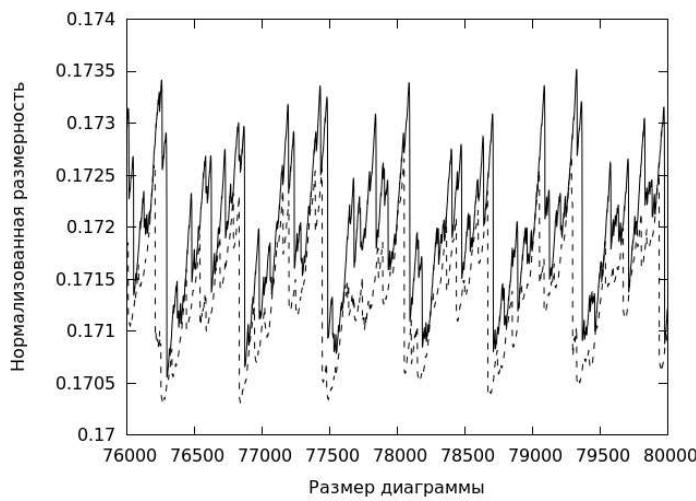


Рис. 10. Нормализованные размерности диаграмм, полученных жадным алгоритмом (сплошная линия) и алгоритмом ветвей (пунктирная линия).

максимальных, так и типичных по Планшерелю диаграмм. Последовательность нормализованных размерностей максимальных полученных нами диаграмм осциллирует значительно меньше, чем последовательность типичных планшерелевских диаграмм. Тем не менее эти осцилляции достаточно заметны и не позволяют определить гипотетические предельные значения нормализованных размерностей с точностью выше, чем 3–4 знака после запятой.

Задачи, рассмотренные в настоящей работе, требуют крайне трудоемких численных экспериментов, включающих вычисление диаграмм с сотнями тысяч клеток. Причиной этого является крайне медленная сходимость нормализованных размерностей как типичных по Планшерелю, так и максимальных строгих диаграмм. В то же время вычисления на графе Шура гораздо эффективнее, чем аналогичные вычисления на стандартном графе Юнга. Это позволяет проводить их для гораздо больших размеров диаграмм.

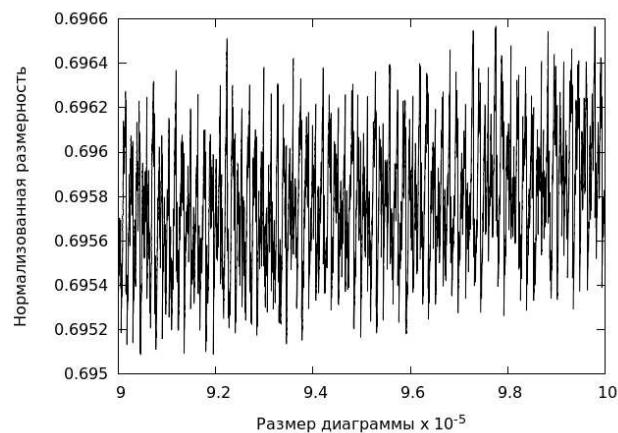


Рис. 11. Нормализованные размерности жадной последовательности диаграмм на графе Юнга размером от девятисот тысяч до миллиона клеток.

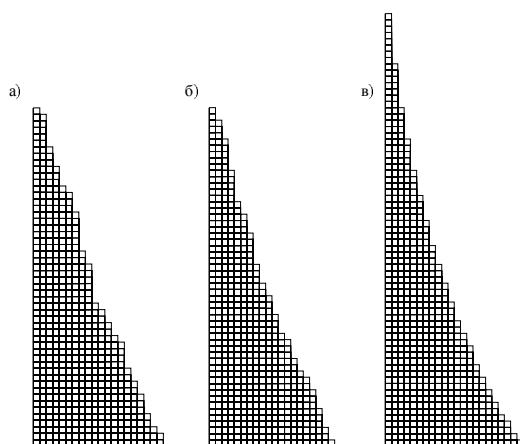


Рис. 12. Две диаграммы, образующие начала двух жадных последовательностей, и диаграмма в точке слияния данных последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы*. — Функц. анал. и его прил. **19**, вып. 1 (1985), 25–36.
2. А. М. Вершик, Д. А. Павлов, *Численные эксперименты в задачах асимптотической теории представлений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **373** (2009), 77–93.
3. Н. Н. Васильев, В. С. Дужин, *Построение неприводимых представлений симметрической группы $S(n)$ с большими и максимальными размерностями*. — Информ.-упр. системы, вып. 3 (2015), 17–22.
4. Л. Петров, *Случайные блуждания на строгих разбиениях*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **373** (2009), 226–272.
5. F. Petrov, *Polynomial approach to explicit formulae for generalized binomial coefficients*, arXiv:1504.01007.
6. В. Н. Иванов, *Размерность косых сдвинутых диаграмм Юнга и проективные характеристики бесконечной симметрической группы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **240** (1997), 115–135.
7. М. Л. Назаров, *Ортогональный базис в неприводимых проективных представлениях симметрической группы*. — Функц. анал. и его прил. **22**, вып. 1 (1988), 77–78.
8. А. М. Бородин, *Мультиликативные центральные меры на графе Шура*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **240** (1997), 44–52.

Vasiliev N. N., Duzhin V. S. A study of the growth of maximal and typical normalized dimensions of strict Young diagrams.

In this paper, we investigate the asymptotics of the normalized dimensions of strict Young diagrams (i.e., the numbers of paths to vertices in the Schur graph). We describe the results of corresponding computer experiments. The strict Young diagrams parametrize the projective representations of the symmetric group S_n . So, the asymptotics of the normalized dimensions of diagrams gives us the asymptotics of the dimensions of projective representations as well. Sequences of strict diagrams of high dimension consisting of up to one million cells were built. It was proved by an exhaustive search that the first 250 diagrams of all these sequences have the maximum possible dimensions. Presumably, these sequences contain infinitely many diagrams of maximum dimension, and thus give the correct asymptotics of their growth. Also, we investigate the behavior of the normalized dimensions of typical diagrams with respect to the Plancherel measure on the Schur graph. The calculations strongly agree with A. M. Vershik's hypothesis on the convergence of the normalized dimensions of maximal and

Plancherel typical diagrams not only for the standard Young graph, but also for the Schur graph.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербург, Россия
E-mail: vasiliev@pdmi.ras.ru
E-mail: vduzhin.science@gmail.com

Поступило 7 октября 2015 г.