Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 437, 2015 г.

О. В. Бурсиан

ЗАМЕНА ЧИПА С СОХРАНЕНИЕМ ЧИСЛА ПАРОСОЧЕТАНИЙ

1. Введение. Пусть дан граф G. *Чип* H – это индуцированный подграф графа G. Вершины чипа, из которых ведет ребро наружу (в остальную часть графа G), и сами эти ребра будем называть *наружными*, а вторые концы этих ребер назовем *контактами*. Под вырезанием чипа мы подразумеваем следующее преобразование графа:

1) удалим из G все вершины чипа H;

2) добавим "небольшой" чип h, не имеющий наружных ребер, совместив контакты в G с некоторыми вершинами чипа h.

Полученный граф назовем G'. Вершины чипа h, которые совмещаются с контактами в G, тоже будем называть контактами. Подберем чип h таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$M(G) = xM(G'), \tag{1}$$

где $M(G)$ и $M(G')$ – числа паросочетаний графов G и G', а x – множитель, зависящий от чипа H. Под паросочетанием всегда подразумевается совершенное паросочетание графа.

Техника вырезания чипов позволяет свести задачу подсчета числа паросочетаний графа к той же задаче на меньшем графе. В данной заметке получена формула (1) для некоторых двудольных планарных чипов H с небольшим числом контактов. На граф G при этом никаких условий не накладывается. Также приведен способ построения нового чипа h, если G – плоский граф, грани которого нечетно ориентированы, а чип является двудольным чипом с произвольным числом контактов, в котором соседние в порядке обхода границы чипа контакты принадлежат разным долям.

2. Построение биекции между паросочетаниями. Пусть G – неориентированный взвешенный граф, который может содержать кратные ребра. Рассмотрим некоторое множество V вершин графа G. Пусть при удалении множества V граф G распадается на две части,

Ключевые слова: число паросочетаний, "Urban renewal", пфаффиан.

не имеющие общих ребер. К каждой из этих частей присоединим вершины из множества V вместе с ребрами, которые соединяли их с вершинами этой части в G. Ребра между вершинами множества V присоединим к любой из частей. Назовем полученные графы G_1 и G_2. При этом часть кратных ребер между одной и той же парой вершин из V может оказаться в G_1, а оставшиеся – в G_2. Пусть U – подмножество в V и $U^C = V \setminus U$. Разобьем паросочетания на группы. В каждой группе ребра паросочетания, которые инцидентны вершинам множества U, принадлежат G_1, а те ребра, которые инцидентны вершинам множества U^C, принадлежат G_2. Отсюда следует, что

$$M(G) = \sum_{U\colon U\subset V} M(G_1 \setminus U^C) M(G_2 \setminus U). \tag{2}$$

Запишем эту сумму для графа G, взяв в качестве V множество контактов некоторого чипа H. Через $\widetilde{G}$ обозначим граф, полученный из G удалением вершин чипа H, через $\widetilde{G}_U$ – граф, полученный из $\widetilde{G}$ удалением вершин множества U, через H_U – граф, полученный из H удалением вершин, которые соединены наружными ребрами с контактами, принадлежащими множеству U. В данном случае G_1 – это чип H вместе с наружными ребрами и контактами, а G_2 есть $\widetilde{G}$. Если между контактами были ребра, то они попадут в граф G_2. Мы имеем $M(G_1 \setminus U^C) = M(H_U)$, так как листья графа G_1 всегда берутся в паросочетание. Получаем

$$M(G) = \sum_{U\colon U\subset V} M(H_U) M(\widetilde{G}_U). \tag{3}$$

Аналогично для графа G' получаем

$$M(G') = \sum_{U\colon U\subset V} M(h_U) M(\widetilde{G}_U), \tag{4}$$

где h_U – граф, полученный из h удалением всех контактов, которые принадлежат множеству U^C. В этом случае граф G_1 – это h (вместе с ребрами между контактами в h), а граф G_2 – тот же, что и в первом случае.

Если удастся подобрать такой подграф h, что $M(H_U) = xM(h_U)$ для некоторого x, не зависящего от U, то мы получим

$$M(G) = \sum_{U\colon U\subset V} M(H_U) M(\widetilde{G}_U) = \sum_{U\colon U\subset V} xM(h_U) M(\widetilde{G}_U) = xM(G'). \tag{5}$$

Таким образом, мы построили биекцию между паросочетаниями на графе G и на графе G' аналогично тому, как это сделано в urban renewal [8].

Рассмотрим задачу нахождения такого чипа h, для которого выполнено равенство (1), в случае планарного чипа H с небольшим числом контактов.

Определение. *Пусть зафиксирована некоторая укладка графа G на плоскости. Пусть чип H плоский и двудольный и прикреплен к графу с помощью четного числа контактов. Рассмотрим циклическую последовательность его контактов в порядке обхода вдоль границы чипа. Если любые два соседние элемента этой последовательности принадлежат разным долям, то такой чип будем называть* черно-белым.

В случае, когда чип прикреплен с помощью четырех контактов и имеет совершенное паросочетание, возможны всего два варианта раскраски его вершин. Для черно-белого чипа задача решена в [1] (теорема 5.3 и замечание после нее), при этом $x = M(H)$. Для чипа, в последовательности контактов которого есть две соседние вершины одной доли, в [1] получена аналогичная равенству (1) формула для пфаффиана графа, по которой можно посчитать число паросочетаний ([1, теорема 5.5]).

Следующая теорема позволяет заменить чип указанного вида на новый чип h таким образом, что выполнено равенство (1).

Отметим, что на граф G никаких специальных условий не накладывается.

Теорема 2.1. *Пусть граф G содержит двудольный планарный чип H с четырьмя контактами. Пусть зафиксирована укладка графа G на плоскости и в последовательности контактов в порядке обхода вдоль границы чипа есть две соседние вершины, принадлежащие одной доле графа (рис. 1). Пусть величины $\beta = M(H)$, $\beta_{ABCD} = M(H \setminus \{A, B, C, D\})$, $\beta_{uv} = M(H \setminus \{u, v\})$, где $u, v \in \{A, B, C, D\}$ и эти вершины принадлежат разным долям, не равны нулю. Пусть граф G' получен из графа G заменой чипа H на новый чип h (рис. 2), веса ребер которого заданы как показано на рисунке. Тогда*

$$M(G) = M(H)M(G').$$

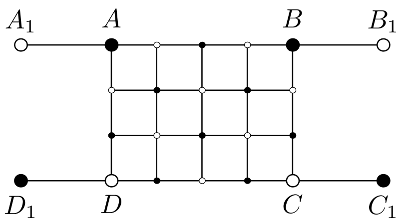

Рис. 1: Пример двудольного планарного чипа H.

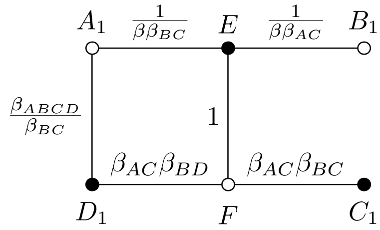

Рис. 2: Новый чип h.

Доказательство. Поскольку чип содержит четное число вершин и имеет поровну контактов в каждой доле, ненулевые слагаемые суммы (3) соответствуют множествам U с четным числом элементов. В случае четырех контактов множество U может состоять из 0, 2 или 4 вершин, при этом должно быть взято одинаковое количество вершин каждой доли. Запишем x – отношение числа паросочетаний в графе H_U к числу паросочетаний в графе h_U для всех подходящих U. Два случая биективного соответствия приведены на рис. 3 и 4. На каждом рисунке схематично изображен чип H в графе G (слева) и чип h в графе G' (справа). Жирной линией отмечены ребра, взятые в паросочетание. На рис. 3 в паросочетание в H взяты ребра (A_1, A) и (C_1, C), а ребра (B_1, B) и (D_1, D) не взяты. Соответственно, контакты A_1 и C_1 должны быть взяты в паросочетание в h, а контакты B_1 и D_1 – в $\widetilde{G}$. Это может быть сделано только одним способом – взять в паросочетание ребра (A_1, E) и (C_1, F). На рис. 4 справа приведены две картинки, соответствующие двум способам разбить на паросочетания граф $h \setminus \{B_1, C_1\}$.

Теперь нужно подобрать множитель x одинаковым во всех случаях. Получаем систему

$$\begin{cases} x = \beta/w_{EF}, \\ x = \beta_{ABCD}/(w_{A_1D_1} \cdot w_{B_1E} \cdot w_{C_1F}), \\ x = \beta_{AC}/(w_{A_1E} \cdot w_{C_1F}), \\ x = \beta_{BD}/(w_{D_1F} \cdot w_{B_1E}), \\ x = \beta_{BC}/(w_{B_1E} \cdot w_{C_1F}), \\ x = \beta_{AD}/(w_{A_1E} \cdot w_{D_1F} + w_{A_1D_1} \cdot w_{EF}). \end{cases}$$

Для чипов рассматриваемого вида имеет место соотношение Кyo ([6, теорема 2.3])

$$\beta_{AD}\beta_{BC} = \beta_{AC}\beta_{BD} + \beta_{ABCD}\beta. \tag{6}$$

С учетом этого соотношения одно из возможных решений системы при $x = M(H)$ имеет вид $w_{EF} = 1$, $w_{A_1D_1} = \frac{\beta_{ABCD}}{\beta_{BC}}$, $w_{B_1E} = \frac{1}{\beta\,\beta_{AC}}$, $w_{C_1F} = \beta_{AC}\,\beta_{BC}$, $w_{A_1E} = \frac{1}{\beta\,\beta_{BC}}$, $w_{D_1F} = \beta_{AC}\,\beta_{BD}$. □

Замечание. Если G – планарный граф, все грани которого были нечетно ориентированы, то чип h может быть ориентирован таким образом, что ориентация вне чипа сохраняется, а все грани графа G' тоже нечетно ориентированы.

Замечание. Если некоторые контакты были соединены ребрами в графе G, то после замены чипа к их весу прибавляется вес, указанный на рисунке.

3. Планаризация и построение пфаффовой ориентации на новом чипе. В случае построения биекции предполагается, что нужно найти чип h, для которого система уравнений, полученная сопоставлением паросочетаний на исходном и новом графе, имеет хотя бы одно

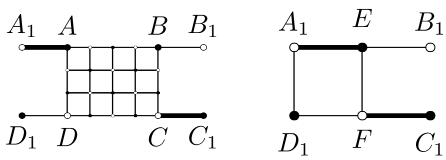

Рис. 3: $x = \frac{\beta_{AC}}{w_{A_1E}w_{C_1F}}$.

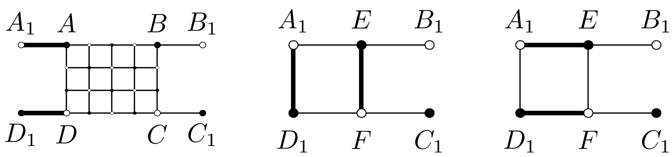

Рис. 4: $x = \frac{\beta_{AD}}{w_{A_1E}w_{D_1F}+w_{A_1D_1}w_{EF}}$.

решение, и предъявить это решение. При большом числе контактов система содержит много уравнений и такой чип подобрать сложно.

Перенумеруем вершины графа G и воспользуемся конструкцией пфаффиана так же, как это сделано в [5]. Приведем теорему 3.4 из работы [2], которая позволяет получить аналогичную равенству (1) формулу для пфаффиана графа, а в случае наличия пфаффовой ориентации – и для числа паросочетаний.

Теорема 3.1. *Пусть H – чип с наружными вершинами $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$, которые крепятся соответственно к контактам $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}$. Пусть $i_r < i_s$, и пусть вес заплатки между вершинами v_{j_r} и v_{j_s} задается формулой*

$$w(v_{j_r}v_{j_s}) = (-1)^{i_r+i_s} w_{i_r j_r} w_{i_s j_s} \frac{\operatorname{Pf} H \setminus \{v_{i_r}, v_{i_s}\}}{\operatorname{Pf} H}. \tag{7}$$

Тогда имеют место тождества

$$\det(\widetilde{A}(G)) = \det(\widetilde{A}(H)) \cdot \det(\widetilde{A}(G')) \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Pf} G = \operatorname{Pf} H \cdot \operatorname{Pf} G',$$

где $\widetilde{A}$ – кососимметрическая матрица смежности графа.

В общем случае чип h из теоремы 3.1 не допускает пфаффову ориентацию. Ниже мы покажем, что в некоторых частных случаях чип h может быть модифицирован в планарный подграф, на котором строится пфаффова ориентация, причем это можно сделать с помощью перестроек графа, сохраняющих пфаффиан с точностью до некоторого легко вычислимого множителя. Эти перестройки мы проведем таким образом, что не изменится ориентация ребер той части графа G', которая сохранилась от исходного графа G. В результате вместо пфаффиана можно снова написать число паросочетаний.

Определение. *Будем называть цикл* хорошим, *если он содержит четное число вершин и при его удалении из графа оставшаяся часть графа имеет совершенное паросочетание (см., например,* [4]*).*

Определение. *Ориентация на графе называется* пфаффовой, *если все хорошие циклы нечетно ориентированы, то есть содержат нечетное число ребер, которые ориентированы по направлению обхода цикла (см., например,* [4]*).*

Определение. *Пусть дан путь $p(a, b)$ из вершины a в вершину b на ориентированном графе H. Определим величину $d(p(a, b))$ равной* 1, *если при прохождении пути от a к b число ребер, направление которых совпадает с направлением движения, является четным, и равной -1, если оно нечетно.*

Заметим, что если на графе задана пфаффова ориентация, а путь p является хорошим циклом, то $d(p) = -1$.

Определение. *Будем говорить, что грани плоского графа нечетно ориентированы, если для каждой грани, кроме, возможно, внешней, число ребер, направленных по часовой стрелке, нечетно (см., например, [4]).*

Лемма 3.2. *Пусть грани плоского двудольного графа G нечетно ориентированы. Пусть $p_1(a,b)$ и $p_2(a,b)$ – два пути в G, не имеющие общих вершин кроме a и b. Пусть четность числа вершин внутри цикла $p_1 + \bar{p}_2$ не совпадает с четностью числа ребер пути p_2, где $\bar{p}_2$ – путь, противоположный пути p_2. Тогда $d(p_1) = d(p_2)$.*

Доказательство. По лемме 8.3.3 из работы [4] число ребер, ориентированных в направлении обхода по часовой стрелке, в любом простом цикле и число вершин внутри этого цикла имеют разную четность, если грани графа нечетно ориентированы. Значит, $d(p_1 + \bar{p}_2) = (-1)^{(v+1)}$, где v – число вершин внутри цикла $p_1 + \bar{p}_2$. Имеем $d(p_1 + \bar{p}_2) = d(p_1)d(\bar{p}_2)$, $d(\bar{p}_2) = (-1)^e d(p_2)$, где e – число ребер пути p_2. Из этих равенств получаем требуемое. □

Определение. *Будем говорить, что граф G построен по паросочетаниям M_1 и M_2 графов G_1 и G_2 соответственно, если $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и множество ребер графа G есть объединение множеств ребер паросочетаний M_1 и M_2.*

Лемма 3.3. *Пусть H – плоский двудольный граф, грани которого нечетно ориентированы. Зафиксируем некоторую нумерацию вершин и будем обозначать через $\mathrm{num}(v)$ номер вершины v в этой нумерации. Пусть H_{ab} – граф, полученный из графа H удалением двух вершин a и b, принадлежащих внешней грани, и $\mathrm{num}(a) < \mathrm{num}(b)$. Пусть H и H_{ab} имеют совершенное паросочетание. Тогда $\mathrm{sgn}\left(\frac{\mathrm{Pf}\, H_{ab}}{\mathrm{Pf}\, H}\right) = (-1)^{\mathrm{num}(a)+\mathrm{num}(b)} d(p(a,b))$, где $p(a,b)$ – путь от a к b в графе, построенном по паросочетаниям графов H и H_{ab}.*

Доказательство. Пусть H' – граф, полученный добавлением к графу H ребра $a \to b$ (если в H уже было ребро между этими вершинами, полагаем $H = H'$). Пусть M_1 – паросочетание в графе H', не содержащее ребра (a, b). Тогда M_1 является паросочетанием также и в графе H. Пусть M_2 – паросочетание в графе H', содержащее ребро (a, b). Пусть M_3 – паросочетание, полученное из M_2 удалением ребра (a, b). Тогда M_3 является паросочетанием также и в графе H_{ab}.

Поскольку граф H пфаффово ориентирован и, следовательно, его подграф H_{ab}, где a и b принадлежат внешней грани, тоже, все паросочетания в них имеют одинаковый знак и $\operatorname{sgn}\left(\frac{\operatorname{Pf} H_{ab}}{\operatorname{Pf} H}\right) = \frac{\operatorname{sgn}(M_3)}{\operatorname{sgn}(M_1)}$.

Мы имеем $\operatorname{sgn}(M_2) = \operatorname{sgn}(M_3)(-1)^{\operatorname{num}(a)+\operatorname{num}(b)+1} \operatorname{sgn}(ab)$ (см., например, [5, p. 9, Observation 4]).

Кроме того, $\operatorname{sgn}(M_1)\operatorname{sgn}(M_2) = (-1)^k$, где k – число четно ориентированных циклов в графе $M_1(H) \cup M_2(H)$, по лемме 8.3.1 работы [4].

Все циклы, кроме того, на котором лежит ребро (a, b), нечетно ориентированы, поскольку на H задана пфаффова ориентация. Значит, k равно нулю или единице в зависимости от ориентации цикла, на котором лежит ребро (a, b), и $\operatorname{sgn}(M_1)\operatorname{sgn}(M_2) = -d(p(a, b))\operatorname{sgn}(ab)$. □

Замечание. Пусть выполнены условия леммы 3.3 и теоремы 3.1. Тогда знак добавленного по теореме 3.1 ребра, соединяющего два контакта v_{j_1} и v_{j_2} в G', находится из формулы

$$\operatorname{sgn}(v_{j_1} v_{j_2}) = -d(p(v_{j_1}, v_{j_2})),$$

где $p(v_{i_1}, v_{i_2})$ – путь в графе, построенном по паросочетаниям графов H и $H \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, а путь $p(v_{j_1}, v_{j_2})$ образован ребром (v_{j_1}, v_{i_1}), путем $p(v_{i_1}, v_{i_2})$ и ребром (v_{i_2}, v_{j_2}).

Доказательство. Пусть вершины v_{j_1} и v_{j_2} были присоединены к чипу с помощью наружных ребер (v_{i_1}, v_{j_1}) и (v_{i_2}, v_{j_2}). По теореме 3.1

$$\operatorname{sgn}(v_{j_1} v_{j_2}) = (-1)^{i_1+i_2} \operatorname{sgn}(v_{i_1} v_{j_1}) \operatorname{sgn}(v_{i_2} v_{j_2}) \operatorname{sgn}\left(\frac{\operatorname{Pf}(H \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\})}{\operatorname{Pf}(H)}\right).$$

Поскольку по условию существует хотя бы одно паросочетание графа H и хотя бы одно паросочетание графа $H \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, по ним можно построить путь от v_{i_1} к v_{i_2}. Выражая знак отношения пфаффианов по лемме 3.3, получаем требуемое. □

Замечание. Пусть выполнены условия леммы 3.3 и теоремы 3.1. Пусть $C(j_1, j_2)$ – цикл, образованный путем $p(j_1, j_2)$ и новым ребром, соединяющим контакты j_1 и j_2. Тогда цикл $C(j_1, j_2)$ нечетно ориентирован.

Посмотрим, какова ориентация подграфа, полученного по теореме 3.1, если исходный граф планарен, а чип был черно-белым и имел n контактов.

Пусть зафиксирована укладка графа G на плоскости. Пусть весь чип H имеет совершенное паросочетание и для любых двух наружных вершин a и b, принадлежащих разным долям, граф H_{ab} тоже имеет совершенное паросочетание. По теореме 3.1 чип такого вида заменяется на граф $K_{n,n}$, в котором веса ребер заданы формулой (7) (при этом мы считаем, что ребра ориентированы от вершин с меньшим номером к вершинам с большим номером). Если вес ребра $K_{n,n}$ получается отрицательным, поменяем его ориентацию на противоположную. Полученный граф $K_{n,n}$ с положительными весами ребер обозначим через K.

Крайними ребрами будем называть ребра графа K, соединяющие два контакта, которые являются соседними в порядке обхода границы чипа в графе G. *Диагональными* будем называть все остальные ребра графа K.

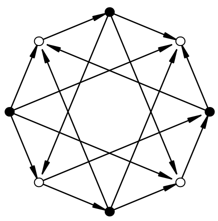

Рис. 5:

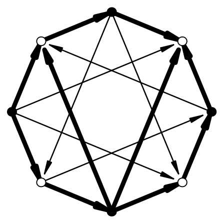

Рис. 6:

Лемма 3.4. *Пусть G – плоский граф и его грани нечетно ориентированы. Пусть Q – подграф графа K, содержащий все его крайние ребра и некоторое (возможно, пустое) подмножество непересекающихся диагональных ребер. Тогда все грани графа Q нечетно ориентированы.*

Например, на рис. 5 показана ориентация графа $K_{4,4}$, а на рис. 6 – возможный вид подграфа Q в графе $K_{4,4}$.

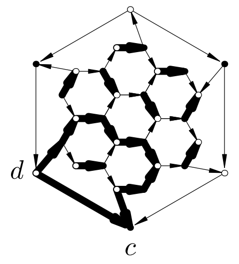

Рис. 7:

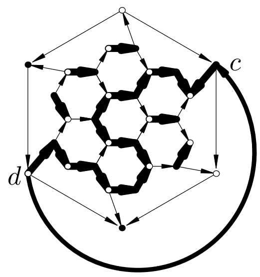

Рис. 8:

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность плоских графов. Расположим на плоскости чип H вместе с наружными ребрами так же, как в графе G. Добавим между контактами крайние ребра графа Q таким образом, чтобы они образовывали границу внешней грани. Полученный граф назовем P_0. Граф P_{i+1} получим из графа P_i добавлением одного диагонального ребра графа Q во внешнюю грань графа P_i. Диагональные ребра графа Q будем добавлять в следующем порядке.

Построим двойственный граф к графу Q. Удалим из него вершину, соответствующую внешней грани. Полученный двойственный граф является деревом; обозначим его T. Добавим диагональное ребро, соответствующее ребру текущего дерева T, которое инцидентно любому листу в T. Удалим этот лист из T. Добавленное диагональное ребро делит внешнюю грань P_i на две части, одна из которых получается инверсией грани графа Q, соответствующей данному листу. Будем считать внешней гранью графа P_{i+1} другую часть.

Докажем, что грани P_i, $i = 0, 1, \dots, k$, где k – число диагональных ребер графа Q, нечетно ориентированы (включая внешнюю грань). Граф Q получается из P_k удалением чипа H и инверсией относительно цикла, образованного крайними ребрами. Отсюда следует, что для каждой грани графа Q число ребер, направленных против часовой стрелки, нечетно. Поскольку граф Q двудольный, отсюда получаем, что и число ребер, направленных по часовой стрелке, для каждой грани тоже нечетно.

Докажем, что все грани графа P_0 нечетно ориентированы. Те его грани, которые являются также и гранями графа H, нечетно ориентированы по условию. Рассмотрим грань, которая образована двумя наружными ребрами (a, c) и (b, d), крайним ребром (c, d) между двумя соседними контактами и границей чипа H между вершинами a и b. Обозначим цикл, который ее окружает, через C_F. Построим цикл $C(c, d)$ по двум разбиениям H и H_{ab} так же, как это сделано в замечании после леммы 3.3. На рис. 7 показан возможный вид цикла $C(c, d)$ в случае, если чип является подграфом шестиугольной решетки.

Рассмотрим путь $p(c, d)$, который является частью цикла $C(c, d)$, и путь $p'(c, d)$, который является частью цикла C_F. Разобьем каждый из этих путей на l кусков: $p = \sum_{i=1}^{l} p_i$, $p' = \sum_{i=1}^{l} p'_i$, где для любого i либо ребра $p'_i + \bar{p}_i$ образуют простой цикл, либо все ребра частей p'_i и p_i совпадают. Если ребра $p'_i + \bar{p}_i$ образуют простой цикл, то они удовлетворяют условиям леммы 3.2, поскольку $H \setminus p(a, b)$ имеет совершенное паросочетание. Отсюда $d(p'_i) = d(p_i)$ для любого i, а значит, $d(p') = d(p)$. Следовательно, из нечетности ориентации цикла $C(c, d)$ следует нечетность ориентации цикла C_F. Внешняя грань графа P_0 также нечетно ориентирована по лемме 8.3.3 работы [4].

Осталось доказать, что из того, что все грани графа P_i нечетно ориентированы, следует, что и все грани графа P_{i+1} нечетно ориентированы. Проведем диагональное ребро (c, d) между контактами, которые не являются соседними. Построим цикл C_F, который ограничивает одну из новых граней, получившихся при добавлении последнего диагонального ребра, и цикл $C(c, d)$, соответствующий контактам c и d. На рис. 8 показан возможный вид цикла $C(c, d)$ при построении графа P_1.

Аналогично рассмотрим путь $p(c, d)$ в цикле $C(c, d)$ и путь $p'(c, d)$ в цикле C_F. Имеем $d(p(c, d)) = d(p'(c, d))$ по лемме 3.2. Следовательно, мы снова можем сделать вывод, что из нечетности ориентации цикла $C(c, d)$ следует нечетность ориентации цикла C_F. $\square$

4. Перестройки графа. Приведем несколько простых операций на ориентированном графе с указанием того, как они меняют пфаффиан (эти изменения пфаффиана проверяются по определению).

Ор 1. Пусть в графе G, содержащем n вершин, вершине v_i инцидентны ребра множества S. Разобьем множество S произвольным образом на две части S_1 и S_2. Пусть граф G' получен из G заменой вершины v_i на последовательность из трех новых вершин с номерами $i, n+1, n+2$, соединенных двумя новыми ребрами $v_i \to v_{n+1}$, $v_{n+1} \to v_{n+2}$, имеющими вес 1. При этом ребра множества S_1 присоединим к вершине v_i, а ребра множества S_2 – к вершине v_{n+2}. Тогда $\mathrm{Pf}(G) = \mathrm{Pf}(G')$.

Замечание. Аналогичная операция на вершинах для неориентированного графа называется vertex splitting (см., например, [8]).

Op 2. Пусть граф G' получен из G заменой на противоположные ориентаций всех ребер, инцидентных вершине v. Тогда $\mathrm{Pf}(G) = -\mathrm{Pf}(G')$.

Op 3. Пусть в графе G вес ребра между вершинами u и v равен нулю. Пусть граф G' получен из G добавлением двух ребер $u \to v$ и $v \to u$ с весом $w > 0$ каждое (или можно считать, что добавлено два ребра $u \to v$, одно из которых имеет вес w, а другое – вес $-w$). Тогда $\mathrm{Pf}(G) = \mathrm{Pf}(G')$.

Op 4. Пусть граф G' получен из G домножением весов всех ребер, инцидентных некоторой вершине, на множитель $d > 0$. Тогда $\mathrm{Pf}(G) = \frac{1}{d}\mathrm{Pf}(G')$. Аналогичную операцию можно рассматривать на неориентированном графе, в этом случае выполнено равенство $M(G) = \frac{1}{d}M(G')$.

Теоремы 2.1 и 3.1 подсказывают способ замены двух перекрещивающихся ребер на планарную конструкцию.

Теорема 4.1. *Пусть ориентированный двудольный граф G_1 содержит индуцированный подграф на четырех вершинах, вершины A_1 и B_1 которого принадлежат одной доле, а вершины C_1 и D_1 – другой (рис. 11). Пусть множество ребер этого подграфа состоит из ребер A_1D_1, B_1C_1, C_1A_1, D_1B_1. Пусть нумерация вершин графа такова, что $\mathrm{num}(A_1) < \mathrm{num}(B_1) < \mathrm{num}(C_1) < \mathrm{num}(D_1)$. Пусть граф G_2 получается из G_1 заменой этого подграфа на подграф на шести вершинах A_2, B_2, C_2, D_2, E и F (рис. 9), веса ребер которого задаются* *формулами*

$$
\begin{aligned}
v_{A_2D_2} &= \frac{w_{A_1D_1}w_{B_1C_1} - w_{C_1A_1}w_{D_1B_1}}{w_{B_1C_1}},\\
v_{FE} &= \frac{1}{w_{B_1C_1}},\\
v_{EA_2} &= \frac{w_{C_1A_1}}{w_{B_1C_1}},\\
v_{FD_2} &= \frac{w_{D_1B_1}}{w_{B_1C_1}},\\
v_{B_2E} &= 1, \quad v_{C_2F} = 1.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Тогда

$$\operatorname{Pf} G_1 = \pm w_{B_1C_1} \operatorname{Pf} G_2.$$

Доказательство. Заменим подграф на шести вершинах в графе G_2 на другой подграф, изображенный на рис. 10, с помощью операции **Ор** 1. Теперь заменим получившийся чип с четырьмя контактами. Получится исходный граф G_1, в котором веса ребер задаются по теореме 3.1, а знаки ребер – по лемме 3.3. В результате мы получим систему уравнений, из которой можем найти веса ребер графа G_2:

$$
\begin{cases}
w_{A_1D_1} = \frac{v_{EA_2}v_{FD_2}+v_{A_2D_2}v_{FE}}{v_{FE}},\\
w_{B_1C_1} = \frac{v_{C_2F}v_{B_2E}}{v_{FE}},\\
w_{C_1A_1} = \frac{v_{C_2F}v_{EA_2}}{v_{FE}},\\
w_{D_1B_1} = \frac{v_{B_2E}v_{FD_2}}{v_{FE}}.
\end{cases}
$$

Не вдаваясь в вопросы о разрешимости этой системы в общем виде, положим $v_{B_2E} = v_{C_2F} = 1$. Тогда выполнены равенства (8) и $\operatorname{Pf} G_2 = \pm v_{FE} \cdot \operatorname{Pf} G_1$, где знак зависит от знака пфаффиана чипа на рис. 10. □

Теорема 4.1 позволяет определить более сложную перестройку графа, которая “чинит” пфаффову ориентацию в случае наличия перекрещивающихся ребер.

Ор 5. Пусть в графе G есть индуцированный подграф, изображенный на рис. 11. Пусть граф G' получен из G заменой его на подграф, изображенный на рис. 9. Тогда

$$\operatorname{Pf} G' = \pm w_{B_1C_1} \operatorname{Pf} G,$$

где знак зависит от нумерации вершин.

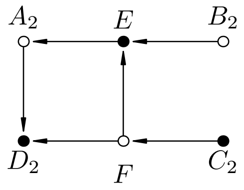

Рис. 9:

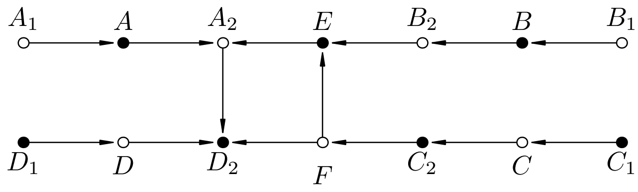

Рис. 10:

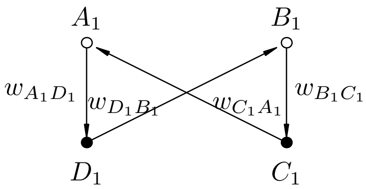

Рис. 11:

Замечание. Пусть грани планарного графа G нечетно ориентированы. Пусть граф G' получен из G по теореме 3.1 после вырезания черно-белого чипа. Тогда перестройками **Op** 1–5 граф G' приводится к планарному графу, грани которого нечетно ориентированы.

По теореме 3.1 получим граф G', содержащий непланарный граф K. Расположим ребра графа K таким образом, чтобы в некоторой окрестности каждой из точек пересечения двух ребер не содержалось других ребер. Добавим на каждом из пересекающихся ребер две новые вершины с помощью **Op** 1 так, чтобы они содержались внутри этой окрестности. Добавим (**Op** 3) два кратных ребра между новыми вершинами так, чтобы получить подграф, пригодный для **Op** 5, и заменим этот подграф на планарный. Таким образом, аналогично тому, как это сделано в [7, VI.A], с помощью похожих перестроек подграф K преобразуется в планарный подграф, который обозначим K'. Предположим, что ориентация графа K' не является пфаффовой. Тогда построим пфаффову ориентацию на K' тем же способом, что и в теореме 8.3.4 работы [4]. На первом шаге берется дерево на графе, ребра которого можно ориентировать произвольным образом. Возьмем в это дерево все кроме одного крайние ребра графа K', сохранив их ориентацию, и построим пфаффову ориентацию. Ориентация оставшегося крайнего ребра не изменится, что следует из леммы 8.3.3 работы [4] в силу четности числа добавленных в K вершин. С помощью рассуждений, аналогичных доказательству леммы 3.4, получим, что грани графа, который получается из G вырезанием чипа H и добавлением всех крайних ребер графа K, нечетно ориентированы. Значит, все грани графа, полученного из G' с помощью планаризации, нечетно ориентированы.

5. Замена чипа с шестью контактами. Пусть граф G содержит произвольный плоский двудольный чип с шестью контактами, которые принадлежат разным долям в порядке обхода границы чипа. При вырезании такого чипа по теореме 3.1 получим граф $K_{3,3}$. Если чип был вырезан из плоского графа G, грани которого нечетно ориентированы, то ориентация графа $K_{3,3}$ может быть найдена по лемме 3.4. На рис. 12 показано приведение графа $K_{3,3}$ к планарному чипу с помощью операций из предыдущего параграфа, при этом грани нового плоского чипа нечетно ориентированы, все грани, примыкающие к чипу в G', нечетно ориентированы и ориентация ребер исходного графа G вне чипа H не изменилась.

На рис. 12 первый подграф – пример черно-белого чипа с шестью контактами, а второй – полученный по теореме 3.1 граф $K_{3,3}$ с точностью до применения **Op** 2. Третий подграф получается после применения **Op** 5 и **Op** 1, четвертый – после **Op** 2, **Op** 3 и **Op** 5. Ориентация этого подграфа является пфаффовой, что позволяет снова перейти к неориентированному графу. При этом веса двух ребер получаются отрицательными и чип не является симметричным. Однако полученный

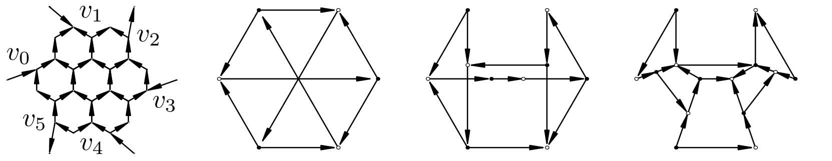

Рис. 12:

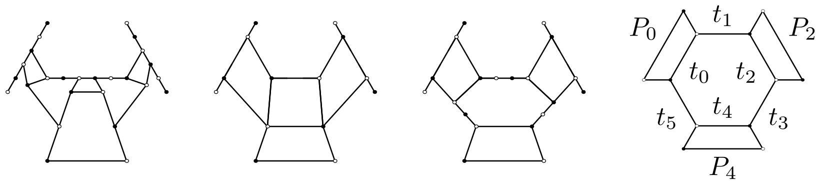

Рис. 13:

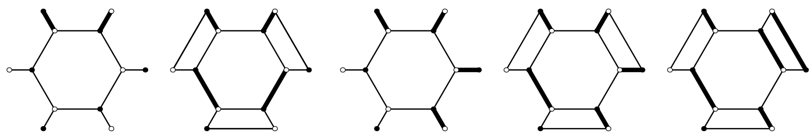

Рис. 14:

чип может быть приведен к симметричному виду с помощью перестроек vertex splitting, urban renewal и **Op** 4 для неориентированного графа (рис. 13). Отрицательные веса исчезают при сложении кратных ребер. Получаем $M(G) = xM(G')$, где $|x|$ – произведение весов множителей всех примененных **Op** 4 и **Op** 5, а $\operatorname{sgn}(x)$ – произведение знаков множителей всех применных **Op** 2 и **Op** 5.

Докажем полученный результат с помощью построения биекции, что позволит обобщить его на случай произвольного графа G.

Теорема 5.1. *Пусть граф G содержит черно-белый чип H с шестью контактами. Пусть v_i – наружные вершины чипа в порядке обхода вдоль границы, $i = 0, 1, \ldots, 5$. Пусть величины $\beta = M(H)$, $\beta_{ij} = M(H \setminus \{v_i, v_j\})$, где v_i, v_j являются вершинами разных долей, и $\beta_{ijkl} = M(H \setminus$*

$\{v_i, v_j, v_k, v_l\}$), где две из этих вершин принадлежат одной доле, а две – другой, не равны нулю. Пусть новый граф G' получен из графа G заменой этого чипа на новый чип h (последний граф на рис. 13), веса ребер которого задаются формулами

$$P_{2i} = \frac{\beta_{2i,2i+1,2i+3,2i+4}}{\beta_{2i+3,2i+4}}, \quad P_{2i+1} = 0,$$

$$t_{2i} = \frac{\beta_{2i+2,2i+5} \cdot \beta_{2i+3,2i+4} \cdot \beta}{p}, \quad t_{2i+1} = \frac{\beta_{2i+3,2i+4} \cdot \beta_{2i+5,2i} \cdot \beta}{p},$$

$$i = 0, 1, 2, \quad p = \beta_{12} \cdot \beta_{50} \cdot \beta_{34} + \beta_{25} \cdot \beta_{41} \cdot \beta_{03}; \tag{9}$$

сложение в индексах производится по модулю 6, оставшиеся ребра имеют единичный вес. Тогда

$$M(G) = \frac{p^2}{\beta^2 \cdot \beta_{50} \cdot \beta_{34} \cdot \beta_{12}} M(G').$$

Доказательство. Построим биекцию между паросочетаниями в графе G и в графе G' и получим систему уравнений аналогично тому, как это сделано в теореме 2.1. Разобьем множество паросочетаний на группы в зависимости от того, какие контактные ребра содержит паросочетание. Всего имеется около двух десятков таких групп. Два случая биективного соответствия приведены на рис. 14. Для каждого случая слева схематично изображено паросочетание в H. Жирными линиями отмечены наружные ребра, которые взяты в паросочетание. Справа изображено паросочетание в чипе h. Жирными линиями отмечены ребра, которые взяты в паросочетание. В том случае, который изображен на рисунке слева, получим уравнение $x = \beta_{12}/(t_3 \cdot t_5)$, для случая справа – уравнение $x = \beta_{1234}/((t_2 P_2 + 1) \cdot t_5)$. Собирая вместе уравнения для всех случаев, мы получим весьма большой набор равенств, которые можно рассматривать как систему уравнений, где неизвестными являются веса чипа h. Будем обозначать A, B, C, D, E, F вершины из множества $\{v_i\}$, $i = 0, \ldots, 5$. Для двудольных планарных чипов с четырьмя контактами выполнено соотношение (6) и равенство

$$\beta\beta_{ABCD} = \beta_{AB}\beta_{CD} + \beta_{AD}\beta_{BC},$$

где A и C принадлежат одной доле графа, а B и D – другой ([6, теорема 2.1]). Для черно-белого чипа с шестью контактами выполнено равенство

$$\beta\beta_{ABCDEF} = \beta_{AB}\beta_{CDEF} + \beta_{AF}\beta_{BCDE} + \beta_{AD}\beta_{BCEF}, \tag{10}$$

где A, C и E принадлежат одной доле графа, а B, D и F – другой. Последнее соотношение можно получить рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 2.1 работы [3] и теоремы 2.3 работы [6]. Добавив к системе эти соотношения, можно проверить, что приведенный в теореме набор весов ребер, полученный перестройками графа $K_{3,3}$, действительно является решением этой системы. □

Замечание. В [5, Corollary 7] получено аналогичное формуле (10) равенство для более общего случая как следствие из аналогичных теорем о планарных (не обязательно двудольных) графах. В случае черно-белого чипа оно содержит больше слагаемых.

Замечание. Веса нового чипа h были получены в предположении, что G является планарным графом, грани которого нечетно ориентированы. Однако в теореме 5.1 ограничения налагаются только на чип H, а граф G может быть произвольным.

Литература

1. В. Аксенов, К. Кохась, *Удаление чипов. Urban Renewal revisited.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2014), 5–29.
2. В. Аксенов, К. Кохась, *Удаление чипов при подсчете пфаффианов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ (2015).
3. К. Кохась, *Разбиение ацтекских диамантов и квадратов на домино.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **360** (2008), 180–230.
4. Л. Ловас, М. Пламмер. *Прикладные задачи теории графов.* М.: Мир, 1998.
5. M. Fulmek, *Graphical condensation, overlapping pfaffians and superpositions of matchings.* — Electron. J. Combin. **17**, No. 1 (2010), Research Paper 83.
6. E. Kuo, *Application of graphical condensation for enumerating matchings.* — Theoret. Comput. Sci. **319** (2004), 29–57.
7. G. Kuperberg, *An exploration of the permanent-determinant method.* Electron. J. Combin. **5** (1998), #R46.
8. J. Propp, *Generalized domino-shuffling.* — Theoret. Comput. Sci. **303**, No. 2–3 (2003), 267–301.

Bursian O. V. Chip removal for computing the number of perfect matchings.

We consider a transformation of a graph G that replaces an induced subgraph H of arbitrary size by a little new subgraph h. We choose h in such a way that the equality $M(G) = xM(G')$ holds (where G' is the new graph and the factor x depends on the numbers of matchings of H and its subgraphs). We describe how one can construct h when G is a planar

graph and H is a bipartite graph (with some restriction on the coloring of vertices connecting it with the other part of the graph G). For a planar bipartite graph H with a small number of such vertices, we prove that the equality holds for an arbitrary graph G.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., д. 28,
Старый Петергоф,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: obursian@gmail.com

Поступило 23 сентября 2015 г.