Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 436, 2015 г.

Ю. А. Неретин

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНЫХ ГРУПП

§1. Утверждения

1.1. Обозначения. Пусть F_n – свободная группа с n образующими $x_1, \dots, x_n$, а

$$F_\infty = \lim_{n\to\infty} F_n$$

– свободная группа со счетным множеством образующих. Обозначим через $\mathrm{Aut}(F_n)$ группу автоморфизмов группы F_n. Такие автоморфизмы определяются образами образующих,

$$x_1 \mapsto \gamma_1(x), \quad \dots, \quad x_n \mapsto \gamma_n(x), \tag{1.1}$$

где $\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)$ – набор элементов F_n (такой набор не произволен; введение в теорию групп $\mathrm{Aut}(F_n)$ содержится в монографии [5], см. также относительно недавний обзор [20]). Для отображения (1.1) мы используем символическое обозначение

$$x \mapsto \gamma(x).$$

Обозначим через

$$\mathbb{G} = \mathrm{Aut}(F_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Aut}(F_n)$$

индуктивный предел групп $\mathrm{Aut}(F_n)$. Группа $\mathrm{Aut}(F_\infty)$ действует автоморфизмами группы F_∞, но это не вся группа ее автоморфизмов. Обозначим через $\mathbb{H} = \mathbb{H}_m \subset \mathbb{G}$ стабилизатор образующих $x_1, \dots, x_m$. Удобно переименовать образующие как $x_1, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots$ и записывать элементы стабилизатора $\mathbb{H}$ в виде

$$\begin{cases} x \mapsto x, \\ y \mapsto \sigma(x,y), \end{cases}$$

или, подробнее,

$$x_1 \mapsto x_1, \quad \dots, \quad x_m \mapsto x_m, \quad y_1 \mapsto \sigma_1(x,y), \quad y_2 \mapsto \sigma_2(x,y), \quad \dots$$

Ключевые слова: свободная группа, бесконечная симметрическая группа, двойные классы смежности, классы сопряженности, бесконечномерные группы.

Поддержано грантами FWF, P22122, P25142.

Обозначим через S_∞ группу перестановок множества $\{1, 2, \dots\}$ с конечным носителем. Группа S_∞ действует на F_∞ перестановками образующих, это определяет вложение $S_\infty \to \mathbb{G}$. Мы также можем рассматривать S_∞ как группу бесконечных 0-1 матриц. Наконец, мы вводим группу $S_\infty[m] \subset S_\infty$, состоящую из всех перестановок, оставляющих на месте элементы 1, 2, ..., m.

1.2. Раздвигание и полугруппа двойных классов смежности. Обозначим через Γ_m множество двойных классов смежности

$$\Gamma_m := \mathbb{H} \setminus \mathbb{G}/\mathbb{H}.$$

Определим последовательность $\theta_j \in S_\infty[m]$ по формуле

$$\theta_j = \theta_j[m] := \begin{pmatrix} 1_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_j & 0 \\ 0 & 1_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}.$$

Фиксируем g, $h \in \mathbb{G}$. Рассмотрим следующую последовательность двойных классов смежности:

$$\mathbb{H} \cdot g\theta_j h \cdot \mathbb{H}.$$

Очевидно, что эта последовательность стабилизируется, начиная с некоторого места. Мы обозначим через $g \circ h \in \Gamma_m$ ее значение для достаточно больших номеров j.

Предложение 1.1. (a) *Двойной класс смежности, содержащий $g \circ h$, зависит только от двойных классов смежности, содержащих g и h.*

(b) *Операция $g \circ h$ на Γ_m ассоциативна.*

Переименуем образующие группы F_∞, обозначим их через x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_N, z_1,..., z_N, u_1, u_2, ..., где N достаточно велико (так что оба автоморфизма g, h оставляют на месте образующие z, u). Мы будем записывать g, θ_N, h как

$$g: \begin{cases} x \mapsto \alpha(x,y) \\ y \mapsto \beta(x,y) \\ z \mapsto z \\ u \mapsto u \end{cases} \qquad \theta_N: \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto z \\ z \mapsto y \\ u \mapsto u \end{cases} \qquad h: \begin{cases} x \mapsto \gamma(x,y) \\ y \mapsto \delta(x,y) \\ z \mapsto z \\ u \mapsto u. \end{cases} \tag{1.2}$$

Тогда произведение равно

$$g \circ h : \begin{cases} x \mapsto \gamma(\alpha(x,y),z) \\ y \mapsto \delta(\alpha(x,y),z) \\ z \mapsto \beta(x,y) \\ u \mapsto u. \end{cases} \tag{1.3}$$

Замечание. Группа обратимых элементов в Γ_m совпадает с $\mathrm{Aut}(F_m)$.

1.3. Действия в пространствах L^2. Пусть K – компактная группа, $U \subset K$ – замкнутая подгруппа[1]. Введем на K вероятностную меру Хаара. Рассмотрим счетное произведение

$$K^\infty := K \times K \times \dots$$

Группа U действует на K^∞ сопряжениями

$$(k_1, k_2, \dots) \mapsto (uk_1u^{-1}, uk_2u^{-1}, \dots). \tag{1.4}$$

Рассмотрим пространство *классов сопряженности* $K^\infty//U$.

Пусть $k = (k_1, k_2, \dots) \in K^\infty$. Для любого элемента (1.1) группы $\mathbb{G}$ мы определим отображение $K^\infty \to K^\infty$ как

$$g : (k_1, k_2, \dots) \mapsto \big(l_1(k_1, k_2, \dots), l_2(k_1, k_2, \dots), \dots\big) \tag{1.5}$$

(мы подставляем k_1, k_2, ... в соответствующие слова). Таким образом мы получаем действие группы $\mathbb{G}$ в пространстве K^∞. Указанные отображения сохраняют меру Хаара на K^∞ (это очевидно для образующих группы $\mathbb{G}$; о естественных системах образующих этой группы см. [5, §1.4]).

Преобразования (1.5) коммутируют с действием (1.4) группы U. Следовательно, мы получаем действие группы $\mathbb{G}$ на $K^\infty//U$ преобразованиями, сохраняющими меру, и унитарное представление

$$T(g)f(k) = f(g(k))$$

этой группы в $L^2(K^\infty//U)$.

Обозначим через $H \subset L^2(K^\infty)$ пространство функций, зависящих лишь от $k_1, \dots, k_m$:

$$H \simeq L^2(K^m).$$

[1]Основной интересный пример – это $K = U = \mathrm{SU}(2)$.

Обозначим через P ортогональный проектор на H. Для $g \in \mathrm{Aut}(F_\infty)$ мы определим оператор

$$\overline{T}(g) : H \to H$$

как

$$\overline{T}(g) = P\,T(g).$$

Очевидно, для любых h_1, $h_2 \in \mathbb{H}$ мы имеем

$$\overline{T}(k_1 g k_2) = \overline{T}(g).$$

Поэтому $g \mapsto \overline{T}(g)$ является корректно определенной операторно-значной функцией на полугруппе Γ_m.

Теорема 1.2. *$\overline{T}$ является представлением полугруппы Γ_m в $L^2(K^m)$.*

Замечание. Это также определяет действие полугруппы Γ_m на пространстве с мерой $K^m//U$ полиморфизмами ("размазывающими отображениями", см., например, [19], [6, §VIII.4]).

1.4. Комментарии. Явления, обсуждаемые выше (существование полугрупповой структуры на множестве двойных классов смежности и действие этой полугруппы на пространстве неподвижных векторов), обычны для бесконечномерных групп. Первые частные случаи этих явлений были обнаружены Р. С. Исмагиловым в 1960-х гг. (см. [3, 4]). Явления существуют для классических групп над $\mathbb{R}$ и p-адическими полями, для симметрических групп, для групп преобразований пространств с мерой. Это широко использовалось Г. И. Ольшанским в теории представлений бесконечномерных классических групп (см. [14, 15], а также [6]). О недавнем прогрессе и о явных описаниях таких полугрупп см. [7–12]. Настоящая заметка показывает, что группа $\mathrm{Aut}(F_\infty)$ похожа (по крайней мере, частично) на бесконечномерные группы. Доказательство теоремы 1.3, приведенное ниже (п. 2.2), совпадает с доказательством теоремы VIII.5.1 из [6].

Пространства классов сопряженности $(K \times \cdots \times K)//K$ и действия дискретных групп на этих пространствах широко обсуждались в теории пространств Тейхмюллера и родственных им объектов (о действиях в L^2 см. [1, 2, 16]).

1.5. Некоторые обобщения. Рассмотрим классы сопряженности

$$\Delta_m := \mathbb{G}//\mathbb{H}.$$

Для g, $h \in \mathbb{H}$ мы рассмотрим класс сопряженности, содержащий

$$g \cdot (\theta_j h \theta_j^{-1}).$$

Эта последовательность стабилизируется начиная с некоторого места, и мы полагаем $g * h$ равным ее значению при больших j.

Предложение 1.3. *$*$-Умножение является корректно определенной ассоциативной операцией на Δ_m.*

Далее, пусть $\mathbb{G}^k = \mathbb{G} \times \cdots \times \mathbb{G}$ – произведение k копий группы $\mathbb{G}$. Рассмотрим диагональную подгруппу $\mathbb{G} = \mathrm{diag}(G)$ и подгруппу $\mathbb{H}$ в $\mathrm{diag}(G)$.

Для g, $h \in \mathbb{G}^k$ рассмотрим следующую последовательность двойных классов смежности:

$$\mathbb{H} \cdot g\theta_j h \cdot \mathbb{H},$$

где θ_j рассматривается как элемент в $\mathbb{H}$. Опять, эта последовательность стабилизируется начиная с некоторого места, и мы обозначим через $g \circ h$ ее значение для достаточно больших j.

Предложение 1.4. *$\circ$-Умножение является корректно определенной операцией на $\mathbb{H} \setminus \mathbb{G}^k/\mathbb{H}$.*

Я благодарю П. Михора за обсуждение этой темы.

§2. Доказательства

2.1. Доказательство предложения 1.1. Во-первых, мы покажем, что произведение не зависит от выбора N. Действительно, обозначим образующие свободной группы через

$$x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_p, z_1, \dots, z_N, z'_1, \dots, z'_p, u_1, u_2, \dots$$

Мы получаем

$$g\theta_{N+p}h : \begin{cases} x \mapsto \gamma(\alpha(x,y), z) \\ y \mapsto \delta(\alpha(x,y), z) \\ y' \mapsto z' \\ z \mapsto \beta(x,y) \\ z' \mapsto y' \\ u \mapsto u. \end{cases}$$

Мы умножаем этот автоморфизм на подстановку

$$y' \mapsto z', \qquad z' \mapsto y'$$

и перенумеровываем образующие в порядке

$$x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_N, z_1, \dots, z_N, y'_1, \dots, y'_p, z'_1, \dots, z'_p, u_1, u_2, \dots$$

Тогда мы получаем (1.3). Это перенумерация равносильна сопряжению элемента $g\theta_{N+p}h$ некоторым элементом из $S_\infty[m]$.

Далее, рассмотрим элементы r, $q \in \mathbb{H}$, заданные как

$$r : \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto \sigma(x,y) \\ z \mapsto z \\ u \mapsto u, \end{cases} \qquad q : \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto \tau(x,y) \\ z \mapsto z \\ u \mapsto u. \end{cases}$$

Тогда

$$g\theta_N rh : \begin{cases} x \mapsto \gamma(\alpha(x,y), \sigma(\alpha(x,y),z)) \\ y \mapsto \delta(\alpha(x,y), \sigma(\alpha(x,y),z)) \\ z \mapsto \beta(x,y) \\ u \mapsto u. \end{cases}$$

Следовательно,

$$g\theta_N rh = r^\square \cdot g\theta_N h,$$

где $r^\square$ – эндоморфизм группы F_∞, заданный как

$$r^\square : \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto y \\ z \mapsto \sigma(\alpha(x,y),z) \\ u \mapsto u. \end{cases}$$

Чтобы показать обратимость эндоморфизма $r^\square$, мы записываем r^{-1} как

$$r^{-1} : \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto s(x,y) \\ z \mapsto z \\ u \mapsto u. \end{cases}$$

Тогда

$$s(\sigma(x,y),y) = y; \qquad \sigma(s(x,y),y) = y.$$

В этих уравнениях мы можем заменить $x_1, \dots, x_m$ на любой набор слов в F_∞, не содержащих y. Поэтому эндоморфизм

$$\begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto y \\ z \mapsto s(\alpha(x,y), z) \\ u \mapsto u \end{cases}$$

является обратным к $r^\square$.

Далее, расмотрим элемент $gq\theta_N h$. Переходя к обратному элементу

$$(gq\theta_N h)^{-1} = h^{-1}\theta_N q^{-1} g^{-1},$$

мы приходим к только что разобранному случаю,

$$h^{-1}\theta_N q^{-1} g^{-1} = q^\triangledown \cdot h^{-1}\theta_N g^{-1}$$

для некоторого $q^\triangledown \in \mathbb{K}$. Поэтому

$$gq\theta_N h = g\theta_N h \cdot (q^\triangledown)^{-1}.$$

Это доказывает утверждение (a).

Чтобы доказать ассоциативность, возьмем три элемента группы $\mathbb{G}$,

$$g: \begin{cases} x \mapsto \alpha(x,y) \\ y \mapsto \beta(x,y) \\ z \mapsto z, \end{cases} \qquad h: \begin{cases} x \mapsto \gamma(x,y) \\ y \mapsto \delta(x,y) \\ z \mapsto z, \end{cases} \qquad f: \begin{cases} x \mapsto \varphi(x,y) \\ y \mapsto \psi(x,y) \\ z \mapsto z. \end{cases}$$

При вычислении $\circ$-произведений

$$(g \circ h) \circ f, \qquad g \circ (h \circ f) \tag{2.1}$$

мы можем заменять эти элементы сопряженными элементами

$$g: \begin{cases} x \mapsto \alpha(x,y) \\ y \mapsto y \\ z \mapsto z \\ u \mapsto \beta(x,u) \\ v \mapsto v, \end{cases} \qquad h: \begin{cases} x \mapsto \gamma(x,y) \\ y \mapsto y \\ z \mapsto \delta(x,z) \\ u \mapsto u \\ v \mapsto v, \end{cases} \qquad f: \begin{cases} x \mapsto \varphi(x,y) \\ y \mapsto \psi(x,y) \\ z \mapsto z \\ u \mapsto u \\ v \mapsto v. \end{cases}$$

Тогда при вычислении $\circ$-произведений в (2.1) мы можем положить $\theta_N = \theta_0$, т.е. вычислять обычные произведения. Теперь ассоциативность становится очевидной. Окончательная формула имеет вид

$$g \circ h \circ f : \begin{cases} x \mapsto \varphi(\gamma(\alpha(x,u),z),y) \\ y \mapsto \psi(\gamma(\alpha(x,u),z),y) \\ z \mapsto \delta(\alpha(x,u),z) \\ u \mapsto \beta(x,u) \\ v \mapsto v. \end{cases}$$

Это также объясняет, как писать многократные произведения.

2.2. Доказательство предложений 1.3 и 1.4. Те же доводы доказывают предложение 1.4.

Далее, имеется взаимно однозначное соответствие между множествами

$$\mathbb{H} \setminus \big(\mathbb{G} \times \mathbb{H}\big)/\mathbb{H} \quad \text{и} \quad \mathbb{G}//\mathbb{H}.$$

Первое множество является подполугруппой в

$$\mathbb{H} \setminus \big(\mathbb{G} \times \mathbb{G}\big)/\mathbb{H},$$

поэтому и второе множество имеет полугрупповую структуру. Остается проследить, что два умножения в $\mathbb{G}//\mathbb{H}$ совпадают.

2.3. Доказательство теоремы 1.2.

Лемма 2.1. (a) *Подпространство $S_\infty[m]$-инвариантных векторов в $L^2(K^\infty//U)$ совпадает с H.*

(b) *Последовательность операторов $T(\theta_N)$ сходится к проектору P в слабой операторной топологии*[2].

Доказательство. (a) Для пространства $L^2(K^\infty)$ это следует из закона нуля или единицы Хьюитта–Сэвиджа, см., например, [18, § IV.1, теорема 3]. Пространство $L^2(K^\infty//U)$ может рассматриваться как пространство U-инвариантных функций из $L^2(K^\infty)$, а действие подгруппы U коммтирует с действием группы $S_\infty[m]$.

(b) Утверждение легко проверяется непосредственно. Так или иначе, это общий факт для непрерывных представлений полной бесконечной симметрической группы (Либерман–Ольшанский, см. [6, § VIII.1, следствие 5], [13]). □

[2]См., например, [17]; ниже в (2.2) мы используем раздельную непрерывность произведения в слабой топологии.

Доказательство теоремы 1.2. Разложим $L^2(K^\infty//U)$ в прямую сумму подпространства H и его ортогонального дополнения. Рассмотрим оператор

$$\begin{pmatrix} \overline{T}(g\circ h) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : L^2(K^\infty//U) \to L^2(K^\infty//U).$$

Он равен $P\,T(g\theta_N h)\,P$ для достаточно больших N. Следовательно,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{T}(g\circ h) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= P\,T(g\theta_N h)\,P = P\,T(g\theta_{N+k} h)\,P \\ &= \lim_{j\to\infty} P\,T(g\theta_j h)\,P = \lim_{j\to\infty} P\,T(g)T(\theta_j)T(h)\,P \\ &= P\,T(g)\Big(\lim_{j\to\infty} T(\theta_j)\Big)T(h)\,P = P\,T(g)PT(h)\,P \\ &= (P\,T(g)\,P)(P\,T(h)\,P) = \begin{pmatrix} \overline{T}(g) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{T}(h) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\lim\limits_{j\to\infty}$ обозначает слабый операторный предел. Таким образом, мы получили

$$\overline{T}(g\circ h) = \overline{T}(g)\overline{T}(h). \qquad \square$$

Литература

1. W. Goldman, *An ergodic action of the outer automorphism group of a free group.* — Geom. Funct. Anal. **17**, No. 3 (2007), 793–805.
2. W. Goldman, E. Z. Xia, *Action of the Johnson–Torelli group on representation varieties.* — Proc. Amer. Math. Soc. **140**, No. 4 (2012), 1449–1457.
3. Р. С. Исмагилов, *Элементарные сферические функции на группе $SL(2,P)$ над полем P, не являющимся локально компактным, относительно подгруппы матриц с целыми элементами.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **31**, вып. 2 (1967), 361–390.
4. Р. С. Исмагилов, *Сферические функции над нормированным полем, поле вычетов которого бесконечно.* — Функц. анал. и его прил. **4**, вып. 1 (1970), 42–51.
5. Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп.* М.: Мир, 1980.
6. Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы.* М.: УРСС, 1998.
7. Yu. A. Neretin, *Multi-operator colligations and multivariate spherical functions.* — Anal. Math. Phys. **1**, No. 2–3 (2011), 121–138.
8. Ю. А. Неретин, *Сферичность и умножение двойных классов смежности для бесконечномерных классических групп.* — Функц. анал. и его прил. **45**, вып. 3 (2011), 79–96.
9. Yu. Neretin, *Infinite tri-symmetric group, multiplication of double cosets, and checker topological field theories.* — Int. Math. Res. Not. IMRN, No. 3 (2012), 501–523.

10. Yu. A. Neretin, *Symmetries of Gaussian measures and operator colligations.* — J. Funct. Anal. **263**, No. 3 (2012), 782–802.
11. Ю. А. Неретин, *Бесконечномерные p-адические группы, полугруппы двойных классов смежности и внутренние функции на ансамблях Брюа–Титса.* — Изв. РАН. Сер. матем. **79**, вып. 3 (2015), 87–130.
12. Ю. А. Неретин, *Бесконечная симметрическая группа и комбинаторные конструкции типа топологических теорий поля.* — Успехи мат. наук **70**, вып. 4(424) (2015), 143–204.
13. G. I. Olshanski, *Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach.* — In: A. A. Kirillov (ed.), *Representations of Lie Groups and Lie Algebras*, Akad. Kiado, Budapest, 1985, pp. 181–197.
14. G. I. Olshanski, *On semigroups related to infinite-dimensional groups.* — In: A. A. Kirillov (ed.), *Topics in Representation Theory*, Adv. Sov. Math. **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 67–101.
15. G. I. Olshanski, *Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe.* — In: *Representation of Lie Groups and Related Topics*, Gordon and Breach, 1990, pp. 269–463.
16. D. Pickrell, E. Z. Xia, *Ergodicity of mapping class group actions on representation varieties. II. Surfaces with boundary.* — Transform. Groups **8**, No. 4 (2003), 397–402.
17. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Т. 1. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1977.
18. А. Н. Ширяев, *Вероятность.* М.: Наука, 1979.
19. А. М. Вершик, *Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **72** (1977), 26–61.
20. K. Vogtmann, *Automorphisms of free groups and outer space.* — Geom. Dedicata **94** (2002), 1–31.

Neretin Yu. A. Several remarks on groups of automorphisms of free groups.

Let $\mathbb{G}$ be the group of automorphisms of a free group F_∞ of infinite order. Let $\mathbb{H}$ be the stabilizer of the first m generators of F_∞. We show that the double cosets $\Gamma_m = \mathbb{H}\backslash\mathbb{G}/\mathbb{H}$ admit a natural semigroup structure. For any compact group K, the semigroup Γ_m acts in the space L^2 on the product of m copies of K.

University of Vienna,
Vienna, Austria;
ИТЭФ, МГУ, ИППИ РАН,
Москва, Россия
E-mail: neretin@mccme.ru

Поступило 22 июля 2015 г.