Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 436, 2015 г.

П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров

О СУБАДДИТИВНОСТИ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ЭНТРОПИЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§1. Введение

1.1. Основные понятия. В этом пункте мы приводим необходимые понятия и утверждения из других работ.

Все пространства с мерой, встречающиеся в статье, будут стандартными вероятностными пространствами (пространствами Лебега–Рохлина). В основном мы будем работать с пространствами с непрерывной мерой, однако все определения даются для произвольного пространства Лебега, т.е. пространства, в котором мера может содержать атомы. Мы позволим себе опускать обозначение σ-алгебры пространства.

Напомним определение допустимой полуметрики (и допустимой тройки) и ее ε-энтропии. Понятие допустимой метрики на пространстве с мерой ввел А. М. Вершик в работе [2] (подробную теорию допустимых троек см., например, в [7, 10]).

Определение 1. *Полуметрику ρ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) назовем* измеримой, *если она измерима на пространстве (X^2, μ^2) как функция двух переменных, и* допустимой, *если она сепарабельна на некотором подмножестве $X_1 \subset X$ полной меры. Тройку (X, μ, ρ) будем называть* полуметрической *и* допустимой полуметрической *соответственно. Измеримую (допустимую) полуметрику ρ на пространстве (X, μ) будем называть* измеримой (*соответственно* допустимой) метрикой, *если найдется такое подмножество $X_2 \subset X$ полной меры, что ρ задает метрику на X_2.*

Следующее определение восходит к А. Н. Колмогорову (см. [8], а также подробное обсуждение в [10]).

Определение 2. *Для $\varepsilon > 0$ определим ε-энтропию $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ полуметрической тройки (X, μ, ρ) по следующему правилу. Рассмотрим*

Ключевые слова: динамическая система, энтропия, масштабирующая последовательность.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 14-11-00581.

наименьшее натуральное k, для которого пространство X можно представить в виде объединения таких множеств $X_0, X_1, \ldots, X_k$, что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и при $j = 1, \ldots, k$ диаметр множества X_j в полуметрике ρ меньше ε. Положим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \log k$$

(*здесь и далее* $\log = \log_2$). *Если такого k не существует, положим* $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = +\infty$. *В то же время* ε-энтропией *называют и функцию* $\varepsilon \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$.

Следуя А. М. Вершику (см., например, [1, 3–5, 9]), определим масштабирующую энтропийную последовательность для действий групп. Именно, назовём *оснащением* группы G выделенную последовательность непустых конечных подмножеств $G_1, G_2, \ldots$, для которой $\lim |G_n| = \infty$. Мы будем говорить, что последовательности $a = (a_n)$ и $b = (b_n)$ *одного роста*, если $a_n \asymp b_n$, то есть $a_n = O(b_n)$, $b_n = O(a_n)$. Будем писать $a_n = \Omega(b_n)$, если $b_n = O(a_n)$.

Определение 3. *Пусть группа G с оснащением (G_n) действует автоморфизмами на пространстве (X, μ). Для допустимой метрики ρ на (X, μ) положим $d_n(x, y) := |G_n|^{-1} \sum\limits_{g \in G_n} \rho(gx, gy)$. Будем говорить, что последовательность $h = (h_n)$ положительных чисел является* масштабирующей энтропийной последовательностью *действия оснащенной группы G, если асимптотическое соотношение*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, d_n) \asymp h_n \tag{1}$$

имеет место при всех достаточно малых ε.

Отметим, что если последовательность h является масштабирующей, то любая последовательность того же роста также является таковой. Иными словами, уместно говорить о классе масштабирующих последовательностей.

Кроме того, отметим, что если $|G_n \,\Delta\, G'_n| = o(|G_n|)$, то классы масштабирующих энтропийных последовательностей для оснащений (G_n) и (G'_n) совпадают.

Как показано в [6], если соотношение (1) имеет место для одной суммируемой допустимой метрики, то автоматически оно выполнено и для любой другой.

Группа $G = \mathbb{Z}$ имеет естественное оснащение $G_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ее действие на X задается порождающим автоморфизмом T; масштабирующую энтропийную последовательность действия группы G назовем масштабирующей энтропийной последовательностью автоморфизма T.

§2. Две оценки для ε-энтропий усреднений

Лемма 1. *Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ – допустимые полуметрики на (X, μ) и $\max_i \rho_i \leqslant 1$. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i) > 0$ для всех i. Тогда выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}\Big(X, \mu, \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \rho_i}{k}\Big) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{k} \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i).$$

Доказательство. Для каждого i найдем такое число $n(i)$ и такие множества $X_0^i, \dots, X_{n(i)}^i$, что $\mu(X_0^i) < \varepsilon$, $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i) = \log n(i)$ и множества X_j^i в полуметрике ρ_i имеют диаметр меньше ε при $j = 1, \dots, n(i)$.

Рассмотрим множество $X_0 = \{x \in X \colon \sum\limits_{i=1}^{k} \chi_{X_0^i}(x) \geqslant k\sqrt{\varepsilon}\}$. По неравенству Чебышева имеем $\mu(X_0) \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \mu(X_0^i)}{k\sqrt{\varepsilon}} < \sqrt{\varepsilon}$. Множество $X \setminus X_0$ можно разбить на всевозможные части вида $\bigcap_{i=1}^{k} X_{j(i)}^i \setminus X_0$. Отметим, что если две точки $x, y \in X \setminus X_0$ попали в одну такую часть, то $\rho_1(x,y) + \dots + \rho_k(x,y) \leqslant k\varepsilon + k\sqrt{\varepsilon} \max_i \rho_i(x,y) < 2k\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, каждая такая часть имеет диаметр меньше $2\sqrt{\varepsilon}$ в полуметрике $\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \rho_i}{k}$. Отсюда следует неравенство

$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}\Big(X, \mu, \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \rho_i}{k}\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \log(1 + n_i) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{k} \log(n_i) = 2 \sum_{i=1}^{k} \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i).$$

□

Лемма 2. *Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ – допустимые полуметрики на (X, μ), а $\tilde{\rho} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \rho_i}{k}$. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда для некоторого индекса i, $1 \leqslant i \leqslant k$,*

выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}(X,\mu,\rho_i) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\tilde\rho).$$

Доказательство. Найдем число n и множества $X_0,\dots,X_n$, такие, что $\mu(X_0)<\varepsilon$, $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\tilde\rho)=\log n$ и множества X_j в полуметрике $\tilde\rho$ имеют диаметр меньше ε при $j=1,\dots,n$. В каждом множестве X_j зафиксируем одну точку x_j. Для каждой точки $y\in X$ пусть $j(y)$ – наименьший из индексов от 0 до n, таких, что $y\in X_{j(y)}$. Тогда для любой точки $y\in X\setminus X_0$ выполнено неравенство

$$\Big|\big\{i\in\{1,\dots,k\}\colon \rho_i(y,x_{j(y)})>\sqrt{\varepsilon}\big\}\Big| \leqslant k\sqrt{\varepsilon},$$

откуда следует, что для некоторого индекса i от 1 до k для множества

$$Y=\{y\in X\setminus X_0\colon \rho_i(y,x_{j(y)})>\sqrt{\varepsilon}\}$$

выполнено неравенство $\mu(Y)\leqslant\sqrt{\varepsilon}$. Следовательно, $\mu(Y\cup X_0)<2\sqrt{\varepsilon}$, и множества $X_j\setminus Y$, $1\leqslant j\leqslant n$, в полуметрике ρ_i имеют диаметр не более $2\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, $\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}(X,\mu,\rho_i)\leqslant\log n=\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\tilde\rho)$. □

§3. Леммы о последовательностях

Лемма 3. *Для последовательности $a(n)$ положительных чисел рассмотрим следующие свойства ее асимптотического поведения*:

(i) (*асимптотическая монотонность*) *для некоторой константы $c>0$ при всех $n\geqslant k$ выполняется неравенство $a(n)\geqslant ca(k)$*;

(ii) (*асимптотическая субаддитивность*) *$a(nk)\leqslant Cka(n)$ для всех натуральных k,n и некоторой константы C.*

Если последовательность обладает одним из этих свойств или обоими сразу, то найдется последовательность $a'(n)\asymp a(n)$ того же роста, удовлетворяющая соответствующим свойствам (одному из них или обоим сразу соответственно) с константой 1.

Доказательство. Если выполняется свойство (i), то мы положим $a'(n)=\inf_{k\geqslant n}a(k)$. Тогда $a'(n)\leqslant a(n)\leqslant c^{-1}a'(n)$ и последовательность $a'(n)$ возрастает. Аналогично, если выполнено свойство (ii), положим $a'(n)=\sup_{k\geqslant1}k^{-1}a(nk)$. Тогда $a(n)\leqslant a'(n)\leqslant Ca(n)$ и при $k\geqslant1$ имеем

$$\begin{aligned}a'(nk)&=\sup_{m\geqslant1}m^{-1}a(mnk)=k\sup_{m\geqslant1}(mk)^{-1}a(mnk)\\&\leqslant k\sup_{M\geqslant1}M^{-1}a(Mn)=ka'(n).\end{aligned}$$

Если последовательность удовлетворяет обоим свойствам, сначала заменим ее на неубывающую последовательность того же роста, а затем уже для нее определим новую последовательность по рецепту, указанному выше. Очевидно, он сохраняет монотонность. □

Лемма 4. *Пусть $h = (h_n)$ – неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая неравенству $h_{kn} \leqslant kh_n$ при всех n. Тогда найдется неубывающая субаддитивная последовательность h' того же роста.*

Доказательство. Положим $h'_n = n \sup_{m \geqslant n} h_m/m$. Во-первых, ясно, что $h'_n \geqslant h_n$. Во-вторых, для всякого $m \geqslant n$ найдем такое $k \geqslant 1$, что $m \leqslant nk \leqslant 2m$; тогда $h_m/m \leqslant h_{kn}/m \leqslant kh_n/m \leqslant 2h_n/n$, то есть $h'_n \leqslant 2h_n$. Осталось заметить, что

$$h'_{a+b} = a \sup_{m \geqslant a+b} \frac{h_m}{m} + b \sup_{m \geqslant a+b} \frac{h_m}{m} \leqslant a \sup_{m \geqslant a} \frac{h_m}{m} + b \sup_{m \geqslant b} \frac{h_m}{m} = h_a + h_b.$$

□

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{N}$ – любое неограниченное подмножество натурального ряда. Пусть функция $a(n)$ определена при $n \in \mathcal{N}$, принимает положительные значения и удовлетворяет соотношениям $a(n) = O(a(m))$, $a(m)/m = O(a(n)/n)$ равномерно по $n, m \in \mathcal{N}$, $n < m$. Тогда функцию $a(n)$ можно продолжить на все натуральные числа с сохранением этих свойств.*

Доказательство. На отрезках между последовательными элементами множества $\mathcal{N}$ доопределим a по линейности. Тогда на каждом таком отрезке максимум и минимум как функции $a(n)$, так и функции $a(n)/n$ достигается на одном из концов, откуда и следует, что свойства сохраняются. □

§4. Условия на энтропийную последовательность

Теорема 1. *Пусть G – такая оснащенная группа, что при всех n, k выполняются следующие условия:*

(i) *множество G_n можно покрыть правыми сдвигами $G_k h$, $h \in G$, множества G_k в количестве $O(1 + |G_n|/|G_k|)$;*

(ii) *найдется $O(1)$ правых сдвигов множества G_n, в объединении которых содержится $\Omega(1 + |G_n|/|G_k|)$ сдвигов множества G_k так, что каждый элемент покрыт $O(1)$ раз.*

Пусть также (h_n) – масштабирующая энтропийная последовательность действия группы G автоморфизмами на (X, μ). Тогда существует такая неубывающая субаддитивная функция f натурального аргумента, что $h_n \asymp f(|G_n|)$.

Доказательство. Зададимся ограниченной допустимой метрикой ρ на (X, μ). Определим $\mathcal{N}$ как множество всех чисел вида $|G_n|, n \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathcal{N}$ рассмотрим такое (произвольное, если их несколько) n, что $|G_n| = k$. Положим $a(k) = h_n$. Функция $a(k)$ удовлетворяет условиям леммы 5, что непосредственно вытекает из наших предположений об оснащении и лемм 1, 2 (а также того наблюдения, что ε-энтропия усреднения по множеству элементов группы не меняется при правом сдвиге этого множества). Продолжим ее на все натуральные числа и воспользуемся леммами 3, 4. □

Для случая $G = \mathbb{Z}$ оснащение $G_n = \{0, \dots, n-1\}$ удовлетворяет условию теоремы, поэтому имеем такое следствие.

Следствие 1. *Если T – автоморфизм пространства (X, μ), а $h = (h_n)$ – его масштабирующая энтропийная последовательность, то найдется неубывающая субаддитивная последовательность h' того же роста, то есть тоже являющаяся масштабирующей энтропийной последовательностью автоморфизма T.*

Авторы выражают благодарность А. М. Вершику за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры.* — УМН **59**, вып. 334(4) (2000), 59–128.
2. А. М. Вершик, *Случайные метрические пространства и универсальное пространство Урысона.* В сб.: Фундаментальная математика сегодня. М., МЦНМО, 2003, сс. 54–88; `arXiv:math/0205086`.
3. А. М. Вершик, *Информация, энтропия, динамика.* В сб.: Математика XX века. Взгляд из Петербурга. М.: МЦНМО, 2010, сс. 47–76.
4. А. М. Вершик, *Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром.* — Алгебра и анализ **23**, вып. 1 (2011), 111–135.
5. А. М. Вершик, А. Д. Горбульский, *Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр.* — Теор. вероятн. и прим. **52**, вып. 3 (2007), 446–467.
6. П. Б. Затицкий, *О возможной скорости роста масштабирующей энтропийной последовательности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **436** (2015), 136–166.

7. П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *Об исправлении метрик.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **390** (2011), 201–209.
8. А. Н. Колмогоров, *Теория передачи информации.* — В кн.: А. Н. Колмогоров, Теория информации и теория алгоритмов, М.: Наука, 1987, сс. 29–58.
9. A. M. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants.* — Markov Process. Related Fields **16**, No. 1 (2010), 169–184.
10. A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov, *Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces.* — Cent. Eur. J. Math. **1**, No. 3 (2013), 379–400.

Zatitskiy P. B., Petrov F. V. On the subadditivity of a scaling entropy sequence.

We prove that if the class of scaling entropy sequences of an automorphism is nonempty, then it contains a nondecreasing subadditive sequence.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ,
14-я линия В.О., д. 29Б,
199178 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербург, Россия
E-mail: paxa239@yandex.ru

Поступило 13 октября 2014 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия; С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: fedyapetrov@gmail.com