Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 436, 2015 г.

П. Б. Затицкий

О ВОЗМОЖНОЙ СКОРОСТИ РОСТА МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ЭНТРОПИЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§1. Введение

Одним из центральных вопросов метрической теории динамических систем является проблема изоморфизма. Исследованию различных инвариантов динамических систем посвящено множество работ. Важнейшим инвариантом действия групп автоморфизмов является классическая энтропия Колмогорова. В дальнейшем появились различные ее обобщения. Одно из них, масштабированная энтропия, принадлежит А. М. Вершику (см., например, [3, 5, 6, 8, 17], а также работы [14–16], где появлялись схожие инварианты). В данной статье мы рассматриваем свойства этого понятия.

1.1. Основные понятия. В этом пункте мы приводим необходимые понятия и утверждения из других работ.

Все пространства с мерой, встречающиеся в работе, будут стандартными вероятностными пространствами (пространствами Лебега–Рохлина). В основном мы будем работать с пространствами с непрерывной мерой, однако все определения даются для произвольного пространства Лебега, т.е. пространства, в котором мера может содержать атомы. Мы позволим себе опускать обозначение σ-алгебры пространства.

Напомним определение допустимой полуметрики (и допустимой тройки) и ее ε-энтропии. Понятие допустимой метрики на пространстве с мерой ввел А. М. Вершик в работе [4] (подробную теорию допустимых троек см., например, в работах [11, 18]).

Определение 1. *Полуметрику ρ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) назовем* измеримой, *если она измерима на пространстве (X^2, μ^2) как функция двух переменных, и* допустимой, *если*

Ключевые слова: динамическая система, энтропия, масштабирующая последовательность.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 14-11-00581.

она сепарабельна на некотором подмножестве $X_1 \subset X$ полной меры. Тройку (X, μ, ρ) будем называть полуметрической *и* допустимой полуметрической *соответственно. Измеримую (допустимую) полуметрику ρ на пространстве (X, μ) будем называть* измеримой (*соответственно* допустимой) метрикой*, если найдется такое подмножество $X_2 \subset X$ полной меры, что ρ задает метрику на X_2.*

Следующее определение восходит к А. Н. Колмогорову (см. [13]; подробное обсуждение см. в [18]).

Определение 2. *Для $\varepsilon > 0$ определим ε-*энтропию *$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ полуметрической тройки (X, μ, ρ) по следующему правилу.*

Рассмотрим наименьшее натуральное число k, для которого пространство X можно представить в виде объединения таких множеств X_0, $X_1, \ldots, X_k$, что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и при $j = 1, \ldots, k$ диаметр множества X_j в полуметрике ρ меньше ε. Положим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \log k$$

*(здесь и далее $\log = \log_2$). Если такого k не существует, положим $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = +\infty$. В то же время ε-*энтропией *называют и функцию $\varepsilon \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$.*

Следующая элементарная лемма проясняет связь между допустимостью и ε-энтропией (см., например, теорему 2.7 работы [18]).

Лемма 1. *Измеримая полуметрика ρ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) допустима тогда и только тогда, когда $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Следующая простая лемма дает оценку энтропий суммы полуметрик через энтропии слагаемых (см., например, лемму 3 работы [10]).

Лемма 2. *Пусть ρ, ρ_1, ρ_2 – три измеримые полуметрики на стандартном вероятностном пространстве (X, μ), и пусть μ^2-п. в. выполнено неравенство $\rho \leqslant \rho_1 + \rho_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X, \mu, \rho) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_1) + \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_2).$$

В дальнейшем мы будем работать в основном с суммируемыми допустимыми полуметриками на фиксированном стандартном вероятностном пространстве (X, μ). Суммируемые допустимые полуметрики образуют выпуклый конус в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$, обозначенный в работе [18] символом $\mathcal{A}dm(X, \mu)$. Для работы с допустимыми

полуметриками там введена специальная норма, названная m-нормой, и изучены ее свойства. Эта метрика определена и конечна на конусе $\mathcal{A}dm(X,\mu)$ и даже на некотором более широком подпространстве пространства $L^1(X^2,\mu^2)$. Напомним ее определение.

Определение 3. *Для функции $f \in L^1(X^2,\mu^2)$* m-норма *(конечная или бесконечная) определяется равенством*

$$\|f\|_m = \inf\left\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} : \rho - \textit{измеримая полуметрика на } (X,\mu),\right.$$
$$\left.\rho(x,y) \geqslant |f(x,y)| \ \textit{для } \mu^2\text{-п. в. } (x,y) \in X^2\right\}.$$

Пусть T – автоморфизм стандартного вероятностного пространства (X,μ), а ρ – измеримая полуметрика на (X,μ). Сдвиги $T^k\rho(x,y) = \rho(T^kx, T^ky)$ также являются измеримыми полуметриками на (X,μ), причем для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) = \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^k\rho).$$

Определим конечные усреднения полуметрики ρ под действием оператора T формулой $T^n_{\mathrm{av}}\rho = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k\rho$.

Наибольший интерес в контексте динамических систем представляют порождающие полуметрики (см., например, [10]).

Определение 4. *Измеримая на (X,μ) полуметрика ρ называется (двусторонней)* порождающей *для метрической динамической системы (X,μ,T), если ее сдвиги $T^k\rho, k \in \mathbb{Z}$, в совокупности разделяют точки с точностью до множества меры нуль, то есть существует некоторое множество $X' \subset X$ полной меры, такое, что для любых различных $x,y \in X'$ найдется такое $k \in \mathbb{Z}$, что $T^k\rho(x,y) > 0$.*

Отметим, что измеримая метрика является порождающей для любого автоморфизма T, так как уже она сама разделяет точки.

Напомним определение, предложенное А. М. Вершиком (см., например, [3,5,6,8,17]). Здесь и далее мы пишем $a_n \preceq b_n$, если $a_n = O(b_n)$, и $a_n \asymp b_n$, если $a_n \preceq b_n \preceq a_n$.

Определение 5. *Пусть (X,μ,T) – метрическая динамическая система, а ρ – допустимая полуметрика на (X,μ). Последовательность положительных чисел $\{h_n\}$ называется* масштабирующей *для полуметрики ρ, если при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено асимптотическое соотношение*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho) \asymp h_n, \quad n \to +\infty.$$

Класс всех масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ обозначим символом $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$.

Замечание 1. Если ρ – допустимая полуметрика, $h=\{h_n\}$ – масштабирующая последовательность для ρ, а $h'=\{h'_n\}$ – последовательность положительных чисел, то $h'\in\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ тогда и только тогда, когда $h'_n\asymp h_n$.

Следующая теорема проясняет зависимость класса $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ масштабирующих последовательностей от полуметрики ρ (см. теорему 5 работы [10]).

Теорема 1. *Пусть $\rho,\widetilde{\rho}\in\mathcal{A}dm(X,\mu)$ – суммируемые допустимые порождающие полуметрики на (X,μ). Тогда $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$=$\mathcal{H}(X,\mu,T,\widetilde{\rho})$.*

Нам также будет полезна следующая лемма (лемма 8 работы [10]).

Лемма 3. *Если последовательность суммируемых допустимых полуметрик $\rho_k\in\mathcal{A}dm(X,\mu)$ сходится к суммируемой допустимой полуметрике $\widetilde{\rho}\in\mathcal{A}dm(X,\mu)$ в т-норме, то для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших k для любого $n\geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\widetilde{\rho})\leqslant\mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho_k).$$

Теорема 1 позволила дать следующее определение (см. определение 12 работы [10]).

Определение 6. *Последовательность $h=\{h_n\}$ положительных чисел называется* масштабирующей энтропийной последовательностью *метрической динамической системы (X,μ,T), если $h\in\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ для некоторой (а тогда и любой) суммируемой допустимой порождающей полуметрики $\rho\in\mathcal{A}dm(X,\mu)$. Класс масштабирующих энтропийных последовательностей динамической системы (X,μ,T) обозначается $\mathcal{H}(X,\mu,T)$.*

Замечание 2. Стоит отметить, что априори класс $\mathcal{H}(X,\mu,T)$ может быть пуст, хотя автору такие примеры не известны. В работе [12] показано, что если класс $\mathcal{H}(X,\mu,T)$ не пуст, то в нем можно найти субаддитивную последовательность.

§2. Действие оснащенной группы и его масштабирующая энтропийная последовательность

В этом параграфе мы вводим понятие масштабирующей энтропийной последовательности для действия группы автоморфизмов стандартного вероятностного пространства по аналогии со случаем действия одного автоморфизма.

Оснащением группы G будем называть некоторую выделенную последовательность конечных подмножеств $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $G_n \subset G$. Пусть $T\colon G \to \mathrm{Aut}(X,\mu)$ – левое действие группы G автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X,μ). Пусть ρ – измеримая полуметрика на (X,μ), а $g \in G$. Тогда, очевидно, сдвиг $T^g\rho(x,y) = \rho(T^gx, T^gy)$ также является измеримой полуметрикой на пространстве (X,μ). Отметим, что так записанное действие на полуметриках является правым, то есть $T^{g_1g_2}\rho = T^{g_2}(T^{g_1}\rho)$. Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) = \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^g\rho). \tag{1}$$

Определим усреднение полуметрики ρ по конечному подмножеству G', $G' \subset G$, формулой $T_{\mathrm{av}}^{G'}\rho = \frac{1}{|G'|}\sum\limits_{g\in G'} T^g\rho$.

Дадим определение масштабирующей последовательности, аналогичное введенному ранее для случая действия одного преобразования.

Определение 7. *Пусть $T\colon G \to \mathrm{Aut}(X,\mu)$ – действие оснащенной группы автоморфизмов на стандартном вероятностном пространстве (X,μ). Пусть ρ – допустимая полуметрика на (X,μ). Последовательность положительных чисел $\{h_n\}$ называется* масштабирующей *для полуметрики ρ и действия оснащенной группы G, если при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено асимптотическое соотношение*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T_{\mathrm{av}}^{G_n}\rho) \asymp h_n, \quad n \to +\infty.$$

Класс всех масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ и действия оснащенной группы G обозначим символом $\mathcal{H}(X,\mu,G,\rho)$.

Оказывается, верна следующая теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. *Пусть $\rho, \widetilde{\rho} \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ – суммируемые допустимые метрики на (X,μ). Тогда $\mathcal{H}(X,\mu,G,\rho) = \mathcal{H}(X,\mu,G,\widetilde{\rho})$.*

Отметим, что теорема 2 говорит лишь о допустимых метриках, в то время как в теореме 1 фигурировали и порождающие полуметрики.

Это связано с возможной некоммутативностью группы G. Более общая теорема о порождающих полуметриках в этом случае будет сформулирована чуть позже. Что касается доказательства теоремы 2, то мы приведем здесь лишь его схему, потому как оно практически дословно повторяет доказательство теоремы 1 (теоремы 5 работы [10]).

Схема доказательства теоремы 2. Зафиксируем суммируемую допустимую метрику ρ и рассмотрим множество $\mathcal{M}_\rho$ всех таких суммируемых допустимых полуметрик ρ_1, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $c_1, \varepsilon_1 > 0$, что для каждого n выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{\mathrm{av}}^{G_n}\rho_1) \leqslant c_1 \mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X, \mu, T_{\mathrm{av}}^{G_n}\rho). \tag{2}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, доказывается, что это множество $\mathcal{M}_\rho$ есть выпуклый конус, замкнутый в m-норме, замкнутый относительно перехода к мажорируемой полуметрике. Единственное отличие от упомянутого доказательства заключается в том, что мы не проверяем инвариантность этого конуса относительно действия группы G, препятствием к которой может быть некоммутативность группы.

Для липшицевой по метрике ρ функции $f \in L^1(X, \mu)$ полуметрика $d[f](x, y) = |f(x) - f(y)|$ на пространстве (X, μ) мажорируется самой метрикой ρ, умноженной на константу, и поэтому принадлежит конусу $\mathcal{M}_\rho$. В силу того, что ρ – допустимая метрика на стандартном вероятностном пространстве (X, μ), липшицевы по ней функции плотны в пространстве $L^1(X, \mu)$, при этом сходимость функций f_j к функции f в пространстве $L^1(X, \mu)$ влечет сходимость в m-норме полуметрик $d[f_j]$ к полуметрике $d[f]$. В силу замкнутости конуса $\mathcal{M}_\rho$ в m-норме отсюда следует, что для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ построенная по ней полуметрика $d[f]$ принадлежит этому конусу. Отсюда следует, что любая разрезная полуметрика (иными словами, полуметрика $d[\chi_A(\cdot)]$ для некоторого измеримого множества $A \subset X$) принадлежит конусу $\mathcal{M}_\rho$. Стало быть, в этом конусе содержатся всевозможные полуметрики, которые мажорируются конечными суммами разрезных. Остается лишь вспомнить, что каждая ограниченная полуметрика аппроксимируется в m-норме таковыми, а каждая допустимая суммируемая полуметрика аппроксимируется в m-норме ограниченными (например, своими срезками, см. лемму 2.16 работы [18]). Итого, для любой суммируемой допустимой метрики ρ конус $\mathcal{M}_\rho$ совпадает со множеством всех суммируемых допустимых полуметрик на пространстве (X, μ).

Утверждение теоремы легко выводится из доказанных включений $\widetilde{\rho} \in \mathcal{M}_\rho$, $\rho \in \mathcal{M}_{\widetilde{\rho}}$. $\square$

Несколько сложнее дело обстоит, если мы хотим рассматривать порождающие полуметрики.

Определение 8. *Будем говорить, что полуметрика ρ на (X, μ) является* порождающей для действия T оснащенной группы G, *если сдвиги $T^g\rho$, $g \in \bigcup G_n$, в совокупности разделяют точки с точностью до множества меры нуль.*

Определение 9. *Будем говорить, что оснащение $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ группы G* подходящее, *если для любого $g \in \bigcup G_n$ и любого $\delta > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие $g_1, \ldots, g_k \in G$, что выполнено неравенство*

$$\left| gG_n \setminus \bigcup_{j=1}^{k} G_n g_j \right| \leqslant \delta |G_n|. \tag{3}$$

Замечание 3. Подходящим является оснащение любой коммутативной группы; счетной аменабельной группы множествами Фельнера; конечно порожденной группы последовательностью шаров; любой группы последовательностью расширяющихся подгрупп.

Теорема 3. *Пусть оснащение $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ группы G подходящее. Пусть $\rho, \widetilde{\rho}$ – суммируемые допустимые полуметрики на (X, μ), порождающие для действия оснащенной группы G. Тогда*

$$\mathcal{H}(X, \mu, G, \rho) = \mathcal{H}(X, \mu, G, \widetilde{\rho}).$$

Схема доказательства теоремы 3. Мы приведем лишь ту часть доказательства, которая отличается от доказательства теоремы 2. Опять же, для каждой суммируемой допустимой полуметрики ρ рассмотрим множество $\mathcal{M}_\rho$ в точности как в доказательстве теоремы 2. Мы хотим доказать, что это множество совпадает со множеством всех суммируемых допустимых полуметрик на пространстве (X, μ). Можно считать, что полуметрика ρ ограничена сверху единицей (в противном случае заменим ее на срезку, отчего множество $\mathcal{M}_\rho$ не увеличится).

Покажем, что для любого $g \in \bigcup G_n$ будет выполнено включение $T^g\rho \in \mathcal{M}_\rho$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию теоремы мы можем найти некоторые $k \in \mathbb{N}$ и $g_1, \ldots, g_k \in G$, такие, что неравенство (3) выполнено для

$\delta = \varepsilon/2$. Тогда

$$T_{\mathrm{av}}^{G_n}(T^g\rho) = T_{\mathrm{av}}^{gG_n}\rho \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sup\rho + \sum_{j=1}^{k} T_{\mathrm{av}}^{G_n g_j}\rho \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{k} T_{\mathrm{av}}^{G_n g_j}\rho,$$

поэтому

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T_{\mathrm{av}}^{G_n}(T^g\rho)) &= \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T_{\mathrm{av}}^{gG_n}\rho)\\ &\leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{j=1}^{k}T_{\mathrm{av}}^{G_n g_j}\rho) \leqslant \mathbb{H}_{\varepsilon/2}(X,\mu,\sum_{j=1}^{k}T_{\mathrm{av}}^{G_n g_j}\rho)\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k}\mathbb{H}_{\varepsilon/(2k)}(X,\mu,T^{g_j}(T_{\mathrm{av}}^{G_n}\rho)) = k\mathbb{H}_{\varepsilon/(2k)}(X,\mu,T_{\mathrm{av}}^{G_n}\rho),\end{aligned} \tag{4}$$

где последнее равенство выполнено в силу соотношения (1). Таким образом, неравенство (2) выполнено для $\rho_1 = T^g\rho$ с константами $c_1 = k$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2k)$. Итого, мы доказали, что для любого $g \in \bigcup G_n$ выполнено включение $T^g\rho \in \mathcal{M}_\rho$.

Оставшаяся часть доказательства теоремы может быть проведена точно так же, как доказательство теоремы 1 (теоремы 5 работы [10]). Однако вместо этого мы приведем аргумент, позволяющий просто воспользоваться рассуждениями, уже осуществленными при доказательстве теоремы 2. Как и раньше, легко понять, что множество $\mathcal{M}_\rho$ есть выпуклый конус, замкнутый в m-норме, замкнутый относительно перехода к мажорируемой полуметрике. Отсюда следует, что полуметрики $T_{\mathrm{av}}^{G_n}\rho$ лежат в этом конусе. Следовательно, в этом конусе лежит и полуметрика

$$\rho_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}T_{\mathrm{av}}^{G_n}\rho,$$

которая является суммируемой допустимой метрикой в силу того, что полуметрика ρ порождающая для действия оснащенной группы G. Но тогда, как мы видели при доказательстве теоремы 2, конус $\mathcal{M}_{\rho_1}$ совпадает со множеством всех суммируемых допустимых полуметрик на пространстве (X,μ). С другой стороны, $\rho_1 \in \mathcal{M}_\rho$, поэтому $\widetilde{\rho} \in \mathcal{M}_{\rho_1} \subset \mathcal{M}_\rho$. Аналогично выполнено включение $\rho \in \mathcal{M}_{\widetilde{\rho}}$, откуда и следует утверждение теоремы. □

Определение 10. *Последовательность $h = \{h_n\}$ положительных чисел называется* масштабирующей энтропийной последовательностью

действия оснащенной группы G на стандартном вероятностном пространстве (X, μ), если $h \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \rho)$ для некоторой (а тогда и любой) суммируемой допустимой метрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Класс масштабирующих энтропийных последовательностей обозначим через $\mathcal{H}(X, \mu, G)$.

Замечание 4. Если оснащение группы G подходящее, то $\mathcal{H}(X, \mu, G) = \mathcal{H}(X, \mu, G, \rho)$ для любой суммируемой допустимой порождающей для действия G полуметрики ρ.

§3. Примеры вычисления масштабирующей энтропийной последовательности

А. М. Вершик определил понятие так называемого адического действия группы $\mathbb{Z}$ на пространстве путей градуированного графа, снабженного структурой линейного порядка (см. [1,2]). Такие графы называют диаграммами Браттели–Вершика. Аналогичным образом были определены адические действия и других счетных групп, в частности группы $\oplus\mathbb{Z}_2$ (см., например, [7]). Адические преобразования меняют только начальную часть путей, поэтому они сохраняют центральные меры. А. М. Вершик доказал, что некоторые графы, например рассмотренные им графы упорядоченных или неупорядоченных пар, являются универсальными в том смысле, что на них можно реализовать любые эргодические действия групп $\mathbb{Z}$ или $\oplus\mathbb{Z}_2$, выбирая нужные центральные меры. В этой работе мы используем граф упорядоченных пар для доказательства другой универсальности, а именно для доказательства того, что выбор центральной меры позволяет реализовать действия этих групп с любой наперед заданной масштабирующей последовательностью (неубывающей и субаддитивной).

В этом параграфе мы приведем серию примеров действий групп $\mathbb{Z}$ и $\oplus\mathbb{Z}_2$, для которых вычислим масштабирующие энтропийные последовательности. При этом в качестве оснащения группы $G = \oplus\mathbb{Z}_2$ мы выберем подгруппы, порожденные несколькими первыми образующими. В работе [12] показано, что если класс масштабирующих энтропийных последовательностей для некоторого автоморфизма не пуст, то в нем можно найти неубывающую субаддитивную последовательность. В качестве следствия доказанных ниже теорем 5 и 6 мы получим следующую теорему, завершающую описание разнообразия всевозможных масштабирующих энтропийных последовательностей.

Теорема 4. *Пусть неубывающая последовательность $h = \{h_n\}$ положительных чисел субаддитивна. Тогда найдется такой эргодический автоморфизм T стандартного вероятностного пространства (X, μ), что $h \in \mathcal{H}(X, \mu, T)$. Аналогично можно найти эргодическое действие группы $G = \oplus\mathbb{Z}_2$, для которой $h \in \mathcal{H}(X, \mu, G)$.*

Стоит отметить, что конструкции таких примеров содержатся в работах [15,16]. Однако там они описаны на языке "cutting and stacking", в то время как мы будем использовать язык диаграмм Браттели–Вершика.

3.1. Граф упорядоченных пар. Рассмотрим следующий бесконечный ориентированный граф Γ, который называется *графом упорядоченных пар.* Для каждого целого $n \geqslant 0$ возьмем $V_n = \{0,1\}^{2^n}$ – множество слов длины 2^n, составленных из 0 и 1. В качестве множества вершин графа выберем множество $V = V(\Gamma) = \sqcup_{n\geqslant 0} V_n$, при этом исходные подмножества $V_n = V_n(\Gamma)$ будут n-ми уровнями (или этажами) графа Γ.

Определим множество ребер $E(\Gamma)$ графа Γ, одновременно определив специальную функцию $\mathfrak{c}\colon E(\Gamma) \to \{0,1\}$, задающую раскраску ребер в два цвета. Для каждого $n \geqslant 0$ проведем ребро $e = (v_1, v_2)$ из вершины $v_1 \in V_n$ в вершину $v_2 \in V_{n+1}$ в том и только том случае, если слово v_1 является началом или окончанием слова v_2; одновременно зададим цвет $\mathfrak{c}(e)$ этого ребра нулем или единицей соответственно. Если при этом слово v_1 является и началом, и окончанием слова v_2, то мы проведем два ребра разных цветов из v_1 в v_2. Множество всех ребер, идущих из вершин этажа n в вершины этажа $n+1$, обозначим $E_n = E_n(\Gamma)$; таким образом, имеем $E = E(\Gamma) = \cup_{n\geqslant 0} E_n(\Gamma)$. Для ребра $e \in E(\Gamma)$ его начало и конец будем обозначать символами $s(e)$ и $r(e)$ соответственно.

Отметим, что в каждую вершину графа Γ, кроме вершин нулевого этажа, входит ровно два ребра разных цветов. Введем отображения $p_0, p_1\colon V \setminus V_0 \to V$, положив $p_i(v) = s(e_i)$, где ребро $e_i \in E(\Gamma)$ таково, что $r(e_i) = v$ и $\mathfrak{c}(e_i) = i$ при $i = 0, 1$. Граф Γ, построенный таким образом, называется графом упорядоченных пар, потому как каждой вершине $v \in V_n$, $n \geqslant 1$, отвечает упорядоченная пара $(p_0(v), p_1(v))$ вершин предыдущего этажа.

Пути в графе Γ – это такие последовательности ребер $x = \{e_i\}_i$, что $r(e_i) = s(e_{i+1})$ для каждого i. Для конечного пути x обозначим символом $r(x)$ конец его последнего ребра. Множество всех путей длины $n \in \mathbb{N}$ с началом на нулевом уровне обозначим символом X_n, а множество бесконечных путей с началом на нулевом уровне обозначим X. Для бесконечного пути $x \in X$ его начало длины n, элемент множества X_n, будем обозначать символом $P_n(x)$. На множестве X стандартным образом вводится цилиндрическая топология. Цилиндрическим множеством называется множество всех путей с фиксированным началом. Такие множества объявляются открытыми, а получаются также и замкнутыми. Пространство X с введенной топологией является компактным. На нем можно задавать различные борелевские меры, обладающие теми или иными свойствами. Важный класс мер образуют центральные меры (см. [7, 9]), для которых при фиксированном хвосте пути все его возможные начала равновероятны.

3.1.1. *Адическое преобразование.* На пространстве X задается адическое преобразование (преобразование Вершика) T. Для пути $x = \{x_i\}_{i \geqslant 0} \in X$, где $x_i \in E_i$ для всех $i \geqslant 0$, найдем наименьшее такое $n \geqslant 0$, что $\mathfrak{c}(x_n) = 0$. Найдем путь $y = \{y_i\}_{i \geqslant 0} \in X$, где ребра $y_i \in E_i$ определяются следующим образом: $y_i = x_i$ при $i \geqslant n+1$, $\mathfrak{c}(y_n) = 1$ и $\mathfrak{c}(y_i) = 0$ при $0 \leqslant i < n$. Легко понять, что такой путь $y \in X$ существует и единствен. Положим $T(x) = y$. Заметим, что для пути $x \in X$, все ребра которого покрашены в цвет 1, это преобразование не определено. Но таких путей мало, в том смысле, что для любой центральной меры на графе Γ мера множества таких путей равна нулю. Следовательно, мера множества их всевозможных прообразов под действием отображений T^n, $n \geqslant 1$, также равна нулю. Аналогично нулю равна мера множества путей, у которых нет прообразов при отображениях T^n, $n \geqslant 1$. Преобразование T изменяет лишь начало пути, поэтому оно действует на классах хвостового отношения эквивалентности (два пути называются эквивалентными, если они совпадают начиная с некоторого места). Более того, оно линейно упорядочивает элементы каждого класса хвостового отношения эквивалентности, то есть для любых двух эквивалентных путей $x, y \in X$ найдется такое число $n \in \mathbb{Z}$, что $T^n(x) = y$. Преобразование T сохраняет центральные меры; стало быть, для любой центральной меры μ на пространстве X оно является автоморфизмом пространства (X, μ).

3.1.2. *Действие группы* $\oplus\mathbb{Z}_2$. Помимо адического преобразования, которое мы будем в дальнейшем рассматривать как действие группы $\mathbb{Z}$, на графе Γ задано введенное А. М. Вершиком действие группы $G = \oplus\mathbb{Z}_2$. Его называют адическим действием группы G. Эта группа порождена счетным набором образующих $\{z_n\}_{n\geqslant 0}$. Для элемента $g = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i z_i$ группы G, где $n \geqslant 0$ и $c_i \in \{0,1\}$, и пути $x = \{x_i\}_{i\geqslant 0} \in X$, где $x_i \in E_i$, найдем единственный путь $y = \{y_i\}_{i\geqslant 0} \in X$, где ребра $y_i \in E_i$ определяются следующим образом: $y_i = x_i$ при $i \geqslant n+1$, $\mathfrak{c}(y_i) = \mathfrak{c}(x_i) + c_i \bmod 2$ при $0 \leqslant i \leqslant n$. Легко понять, что такой путь $y \in X$ существует и единствен. Положим $T^g(x) = y$. Необходимые коммутационные соотношения тривиальны, поэтому таким образом задано адическое действие группы G на X.

3.1.3. *Параметризация конечных путей.* Для фиксированного n сопоставим каждому пути x, длина которого не меньше n, пару

$$(\mathfrak{v}_n(x), \mathfrak{o}_n(x)) = \Big(r(P_n(x)), \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{c}(x_i)2^i\Big) \in V_n \times \{0,\dots,2^n-1\}.$$

Легко понять, что такое отображение является биекцией множества X_n на $V_n \times \{0,\dots,2^n-1\}$. Символом Φ_n обозначим обратное отображение, действующее из $V_n \times \{0,\dots,2^n-1\}$ на X_n. Эта параметризация путей удобна для описания действий, заданных выше. Отображение $\mathfrak{v}_n$ каждому пути сопоставляет вершину уровня n, через который он проходит, а отображение $\mathfrak{o}_n$ – порядковый номер начала пути до этой вершины в лексикографическом порядке.

Легко проверить, что если путь $x \in X$ таков, что $\mathfrak{o}_n(x) < 2^n - 1$, то $\mathfrak{v}_n(Tx) = \mathfrak{v}_n(x)$ и $\mathfrak{o}_n(Tx) = \mathfrak{o}_n(x) + 1$. В случае же, когда $\mathfrak{o}_n(x) = 2^n - 1$, имеем $\mathfrak{c}(x_i) = 1$ при $i = 0,\dots,n-1$, поэтому первые n ребер пути Tx не могут быть определены однозначно.

С адическим действием группы $G = \oplus\mathbb{Z}_2$ не возникает таких проблем. Для каждого $n \geqslant 1$ подгруппа G_{n-1} группы G, порожденная образующими $z_0,\dots,z_{n-1}$, действует на множестве $\{0,\dots,2^n-1\}$ естественным образом по формуле

$$\Theta^{\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i z_i}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i 2^i\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} (c_i + \alpha_i \bmod 2)\, 2^i \quad \text{для } c_i, \alpha_i \in \{0,1\}.$$

Естественным образом задается и действие подгруппы G_{n-1} на множестве V_n (обозначим его той же буквой Θ) по формуле $(\Theta^g v)_i = v_{\Theta^g i}$ для $v \in V_n$, $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Действия Θ связаны с действием T следующим соотношением. Для $x \in X$ и $g \in G_{n-1}$ выполнены равенства $\mathfrak{v}_n(T^g x) = \mathfrak{v}_n(x)$, $\mathfrak{o}_n(T^g x) = \Theta^g \mathfrak{o}_n(x)$.

3.1.4. *Центральные меры на графе* Γ. Отметим, что задание борелевской меры μ на пространстве X равносильно заданию согласованной системы мер $\{\mu_n\}_{n \geqslant 0}$ на цилиндрических алгебрах, или, что то же самое, на конечных пространствах X_n, $n \geqslant 0$. Под согласованностью здесь имеется в виду, что для любых $n \geqslant 0$ и $x \in X_n$ выполнено равенство

$$\mu_n(x) = \sum_{x'} \mu_{n+1}(x'),$$

где суммирование ведется по всем путям $x' \in X_{n+1}$, начало которых совпадает с x.

Конструкция графа Γ такова, что для любого $n \geqslant 1$ и любой вершины $v \in V_n$ количество путей длины n с началом на нулевом уровне, идущих в вершину v, равно 2^n. Поэтому центральность меры μ на графе Γ равносильна тому, что мера μ_n на множестве X_n зависит только от конца пути: если $x, x' \in X_n$ таковы, что $r(x) = r(x')$, то $\mu_n(x) = \mu_n(x')$. Поэтому удобно рассматривать семейство мер $\{\nu_n\}$, заданных на множествах $\{V_n\}$ формулой

$$\nu_n(v) = \sum_{\substack{x \in X_n, \\ r(x) = v}} \mu_n(x) \quad \text{для } v \in V_n.$$

В терминах мер ν_n центральность меры μ равносильна тому, что для любой вершины $v \in V_n$ выполнено равенство

$$\nu_n(v) = \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{\substack{v' \in V_{n+1}, \\ p_0(v') = v}} \nu_{n+1}(v') + \sum_{\substack{v' \in V_{n+1}, \\ p_1(v') = v}} \nu_{n+1}(v') \Bigg). \tag{5}$$

3.1.5. *Специальные центральные меры на графе* Γ. Займемся теперь конструированием специальных центральных мер на графе Γ. Пусть $\sigma = \{\sigma_n\}_{n \geqslant 0}$ – последовательность нулей и единиц. Наша цель – сконструировать некую специальную центральную меру μ^σ на графе Γ.

Определим последовательность множеств $\{V_n^\sigma\}_{n\geqslant 0}$, $V_n^\sigma \subset V_n$, следующим образом. Положим $V_0^\sigma = V_0$, а дальше зададим множества индуктивно. Если $\sigma_n = 0$, то положим $V_n^\sigma = \{aa \in V_n \colon a \in V_{n-1}^\sigma\}$, а если $\sigma_n = 1$, то положим $V_n^\sigma = \{ab \in V_n \colon a, b \in V_{n-1}^\sigma\}$. Для каждого $n \geqslant 0$ введем равномерную меру ν_n^σ на множестве V_n^σ. Отметим, что эти меры согласованы, то есть выполнено равенство (5), поэтому они задают некоторую центральную меру μ^σ на графе Г.

В дальнейшем мы займемся вычислением масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы (X, μ^σ, T). Кроме того, мы также вычислим масштабирующую энтропийную последовательность адического действия группы $G = \oplus\mathbb{Z}_2$ на пространстве (X, μ^σ). Пока лишь заметим, что носители мер ν_n^σ, множества V_n^σ, хорошо описываются в терминах последовательности σ. Легко понять, что множество V_n^σ состоит в точности из тех слов, которые инвариантны относительно действия тех $\Theta(z_k)$, для которых $\sigma_k = 0$.

3.1.6. *Эргодичность адического действия.*

Лемма 4. *Если последовательность σ содержит бесконечное количество единиц, то адическое преобразование T является эргодическим на пространстве (X, μ^σ). Также эргодическим является адическое действие группы $\oplus\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Докажем лемму от противного. Пусть $A \subset X$ – такое измеримое инвариантное множество, что $\mu^\sigma(A) \in (0, 1)$. Пусть ξ_n – разбиение пространства путей X на прообразы точек при проекции P_n (два пути лежат в одном элементе этого разбиения, если их начала длины n совпадают). Эти разбиения в совокупности порождают σ-алгебру пространства X, поэтому по закону нуля и единицы Леви $\mathbb{E}(\chi_A \mid \xi_n) \to \chi_A$ в $L^1(X, \mu^\sigma)$. Для малого $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$A_{n,\varepsilon} = \bigl\{x \in X \colon \mathbb{E}(\chi_A \mid \xi_n)(x) > 1 - \varepsilon\bigr\}.$$

Тогда $\mu^\sigma(A \triangle A_{n,\varepsilon}) \to 0$ при $n \to +\infty$. Отметим, что множество A инвариантно, поэтому для $w \in V_n^\sigma$ при $k < 2^n - 1$ имеем

$$\mu^\sigma\bigl(x \in A \colon P_n(x) = \Phi_n(w, k)\bigr) = \mu^\sigma\bigl(x \in A \colon P_n(x) = \Phi_n(w, k+1)\bigr).$$

Отсюда следует, что множество $A_{n,\varepsilon}$ вместе с каждым путем $x \in X$ содержит все пути $y \in X$, для которых $\mathfrak{v}_n(x) = \mathfrak{v}_n(y)$. Пусть $B_{n,\varepsilon} = \{\mathfrak{v}_n(x) \colon x \in A_{n,\varepsilon}\} \subset V_n^\sigma$. Тогда $\mu^\sigma(A_{n,\varepsilon}) = \nu_n^\sigma(B_{n,\varepsilon})$.

Пусть $\delta > 0$. Найдем такое большое число n, что $\sigma_{n+1} = 1$, а также $\mu^\sigma(A \triangle A_{n,\varepsilon}) < \delta$, $\mu^\sigma(A \triangle A_{n+1,\varepsilon}) < \delta$. Оценим меру симметрической разности $A_{n,\varepsilon} \triangle A_{n+1,\varepsilon}$ снизу и придем к противоречию. Имеем

$$\begin{aligned} A_{n,\varepsilon} =& \{x \in X : \mathfrak{v}_{n+1}(x) = ab, a \in B_{n,\varepsilon}, b \in V_n^\sigma, 0 \leqslant \mathfrak{o}_{n+1}(x) < 2^n\} \\ &\cup \{x \in X : \mathfrak{v}_{n+1}(x) = ab, b \in B_{n,\varepsilon}, a \in V_n^\sigma, 2^n \leqslant \mathfrak{o}_{n+1}(x) < 2^{n+1} - 1\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} 2\delta \geqslant& \mu^\sigma(A_{n,\varepsilon} \triangle A_{n+1,\varepsilon}) \geqslant \frac{1}{2}\nu_{n+1}^\sigma(ab\colon a \in B_{n,\varepsilon}, b \in V_n^\sigma \setminus B_{n,\varepsilon}) \\ =& \frac{1}{2}\nu_n^\sigma(B_{n,\varepsilon})\big(1 - \nu_n^\sigma(B_{n,\varepsilon})\big) = \frac{1}{2}\mu^\sigma(A_{n,\varepsilon})\big(1 - \mu^\sigma(A_{n,\varepsilon})\big) \\ \geqslant& \frac{1}{2}\big(\mu^\sigma(A) - \delta\big)\big(1 - \mu^\sigma(A) - \delta\big), \end{aligned}$$

которое не может быть верно для достаточно малых δ. □

3.2. Вычисление масштабирующей энтропийной последовательности для адического преобразования. В этом пункте мы займемся вычислением масштабирующей энтропийной последовательности адического преобразования T на пространстве путей X графа Γ для центральных мер μ^σ, построенных в п. 3.1.5.

3.2.1. *Формулировка основного результата и редукция.* Для последовательности σ, состоящей из нулей и единиц, определим последовательность частичных сумм $s(n) = s^\sigma(n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sigma_i$, $n \in \mathbb{N}$. Одним из основных результатов этой работы является следующая теорема.

Теорема 5. *Для любой последовательности σ, состоящей из нулей и единиц, последовательность $h_n = 2^{s^\sigma([\log(n)])}$ принадлежит классу $\mathcal{H}(X, \mu^\sigma, T)$ масштабирующих энтропийных последовательностей преобразования T на пространстве (X, μ^σ).*

Замечание 5. Преобразование T на пространстве (X, μ^σ) имеет положительную энтропию (а последовательность $h_n = n$ принадлежит классу $\mathcal{H}(X, \mu^\sigma, T)$) тогда и только тогда, когда последовательность σ содержит лишь конечное количество нулей. В этом случае энтропия вычисляется по формуле

$$h(T) = 2^{-\sum\limits_{i=0}^{\infty}(1-\sigma_i)}.$$

Для доказательства теоремы 5 мы проведем вычисления масштабирующих последовательностей для специального семейства полуметрик.

Определим семейство полуметрик $\{\rho_m\}_{m\geqslant 1}$ на пространстве X следующим образом. Для путей $x, y \in X$ положим $\rho_m(x,y) = 0$ в случае, если $P_m(x) = P_m(y)$, и $\rho_m(x,y) = 1$ в противном случае. Иными словами, полуметрика ρ_m не различает пути с одинаковым началом длины m. Отметим, что никакая из этих полуметрик не является порождающей для автоморфизма T (и для адического действия $\oplus\mathbb{Z}_2$ тоже).

Предложение 1. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $2^{s^\sigma([\log n])}$ является масштабирующей для полуметрики ρ_m и динамической системы (X, μ^σ, T).*

Предложение 1 моментально влечет теорему 5.

Доказательство теоремы 5. Применяя лемму 2, легко получить, что последовательность $2^{s^\sigma[\log n]}$ является масштабирующей для суммируемых допустимых полуметрик $\sum\limits_{m=1}^{M} \frac{1}{2^m}\rho_m$, $M \in \mathbb{N}$, которые сходятся в m-норме к суммируемой допустимой метрике $\rho = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\rho_m$ при $M \to \infty$. Из леммы 3 следует, что последовательность $2^{s^\sigma[\log n]}$ является масштабирующей последовательностью для метрики ρ. Стало быть, она является масштабирующей энтропийной последовательностью системы (X, μ^σ, T). $\square$

Само же предложение 1 легко выводится из следующей леммы, доказательство которой будет приведено в п. 3.2.2.

Лемма 5. *Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено асимптотическое соотношение*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu^\sigma, T_{\mathrm{av}}^{2^n}\rho_m) \asymp 2^{s^\sigma(n)}, \quad n \to +\infty. \tag{6}$$

Доказательство предложения 1. Имея оценки ε-энтропии усреднений за 2^n шагов, мы можем получить оценки для усреднений за произвольное количество шагов. Пусть $2^n \leqslant \widetilde{n} < 2^{n+1}$. Тогда имеется тривиальное неравенство

$$\frac{1}{2}T_{\mathrm{av}}^{2^n}\rho_m \leqslant T_{\mathrm{av}}^{\widetilde{n}}\rho_m \leqslant 2T_{\mathrm{av}}^{2^{n+1}}\rho_m$$

на усредненные полуметрики, из которого следует неравенство для ε-энтропий:

$$\mathbb{H}_{2\varepsilon}(X,\mu^\sigma,T_{\mathrm{av}}^{2^n}\rho_m)\leqslant\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu^\sigma,T_{\mathrm{av}}^{\widetilde{n}}\rho_m)\leqslant\mathbb{H}_{\varepsilon/2}(X,\mu^\sigma,T_{\mathrm{av}}^{2^{n+1}}\rho_m). \tag{7}$$

В силу тривиального неравенства $s^\sigma(n)\leqslant s^\sigma(n+1)\leqslant s^\sigma(n)+1$ и соотношения (6) имеем

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu^\sigma,T_{\mathrm{av}}^{\widetilde{n}}\rho_m)\asymp 2^{s^\sigma([\log\widetilde{n}])},\quad \widetilde{n}\to+\infty. \tag{8}$$

□

3.2.2. *Доказательство леммы* 5. Этот пункт посвящен доказательству леммы 5. Сначала введем необходимые обозначения.

Пусть $m,N\in\mathbb{N}$, $m\leqslant N$, $v\in V_N$, $0\leqslant k\leqslant 2^N-1$. На слово v, состоящее из 2^N нулей и единиц, можно смотреть как на слово длины 2^{N-m}, составленное из блоков длины 2^m. Символом $p_m(v,k)$ обозначим блок длины 2^m слова v, содержащий индекс k. Отметим, что

$$P_m(\Phi_N(v,k))=\Phi_m(p_m(v,k),k \bmod 2^m).$$

Отсюда ясно, что для $x,y\in X$ равенство $\rho_m(x,y)=0$ выполнено в том и только том случае, когда $\mathfrak{o}_N(x)\equiv\mathfrak{o}_N(y)\pmod{2^m}$ и $p_m(\mathfrak{v}_N(x),\mathfrak{o}_N(x))=p_m(\mathfrak{v}_N(y),\mathfrak{o}_N(y))$.

Нас интересует усредненная под действием преобразования T полуметрика $T_{\mathrm{av}}^{2^n}\rho_m$. Для $x,y\in X$ по определению имеем

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{av}}^{2^n}\rho_m(x,y)&=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1}\rho_m(T^ix,T^iy)\\&=\frac{1}{2^n}\Big|\big\{i\in\{0,\dots,2^n-1\}\colon P_m(T^ix)\neq P_m(T^iy)\big\}\Big|.\end{aligned}$$

На множестве $A_m^n=(X_m)^{2^n}$ определим меру $\mu_{m,n}^\sigma$ равенством

$$\mu_{m,n}^\sigma(w)=\mu^\sigma(x\in X\colon P_m(T^ix)=w_i,\ 0\leqslant i\leqslant 2^n-1),$$

где $w=(w_0,\dots,w_{2^n-1})\in A_m^n$. Символом ρ^H мы будем далее обозначать нормированную метрику Хэмминга. Легко понять, что отображение $\mathfrak{P}_m^n\colon x\mapsto(P_m(T^ix))_{i=0}^{2^n-1}$ есть изометрия полуметрического пространства $(X,T_{\mathrm{av}}^{2^n}\rho_m)$ в метрическое пространство (A_m^n,ρ^H), переводящее меру μ^σ в меру $\mu_{m,n}^\sigma$. Поэтому нас интересует асимптотика по n при фиксированных m и ε величины

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu^\sigma,T_{\mathrm{av}}^{2^n}\rho_m)=\mathbb{H}_\varepsilon(A_m^n,\mu_{m,n}^\sigma,\rho^H). \tag{9}$$

Вычислять это выражение напрямую не получается, приходится его оценивать. Для этого мы попробуем аппроксимировать меру μ^σ мерами μ^σ_N при больших N, пропуская отображение P_m через P_N.

В силу центральности меры μ^σ для любых $N > n$ имеем

$$\mu^\sigma(x \in X\colon \mathfrak{o}_N(x) \geqslant 2^N - 2^n) = 2^{n-N}, \tag{10}$$

что позволяет ограничиться рассмотрением лишь тех $x \in X$, для которых $\mathfrak{o}_N(x) < 2^N - 2^n$. А для таких x мы можем следить за $T^i x$ при $i = 0, \dots, 2^n - 1$.

Введем еще одно обозначение. Для слова v, состоящего из нулей и единиц, для $m, n, k \geqslant 0$ положим

$$\Phi^n_m(v, k) = \{\Phi_m(p_m(v, k+i), (k+i) \bmod 2^m)\}_{i=0}^{2^n-1} \in A^n_m.$$

Смысл введенного обозначения понятен: для $x \in X$ имеем

$$\Phi^n_m(\mathfrak{v}_N(x), \mathfrak{o}_N(x)) = \mathfrak{P}^n_m(x), \quad \text{если } \mathfrak{o}_N(x) < 2^N - 2^n.$$

Меру на A^n_m, аппроксимирующую меру $\mu^\sigma_{m,n}$, зададим равенством

$$\begin{aligned} \mu^\sigma_{m,n,N}(w) &= \frac{1}{2^N - 2^n} \sum_{k=0}^{2^N - 2^n - 1} \nu^\sigma_N\big(v \in V_N\colon \Phi^n_m(v,k) = w\big) \\ &= \frac{1}{1 - 2^{n-N}} \mu^\sigma\big(x \in X\colon \mathfrak{P}^n_m(x) = w, \mathfrak{o}_N(x) < 2^N - 2^n\big) \end{aligned} \tag{11}$$

для $w \in A^n_m$. Из определений мер $\mu^\sigma_{m,n,N}$ и $\mu^\sigma_{m,n}$ очевидно неравенство

$$(1 - 2^{n-N})\mu^\sigma_{m,n,N} \leqslant \mu^\sigma_{m,n}, \tag{12}$$

из которого, в свою очередь, легко следует взаимная оценка ε-энтропий:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{1-(1-\varepsilon)(1-2^{n-N})}(A^n_m, \mu^\sigma_{m,n}, \rho^H) &\leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(A^n_m, \mu^\sigma_{m,n,N}, \rho^H) \\ &\leqslant \mathbb{H}_{\varepsilon - 2^{n-N}\varepsilon}(A^n_m, \mu^\sigma_{m,n}, \rho^H). \end{aligned}$$

Мы можем загрубить это неравенство и, считая, что $N = N(n)$ достаточно велико, а именно выполнено неравенство

$$2^{n-N} < \varepsilon < 1/2, \tag{13}$$

написать оценку

$$\mathbb{H}_{2\varepsilon}(A^n_m, \mu^\sigma_{m,n}, \rho^H) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(A^n_m, \mu^\sigma_{m,n,N}, \rho^H) \leqslant \mathbb{H}_{\varepsilon/2}(A^n_m, \mu^\sigma_{m,n}, \rho^H). \tag{14}$$

Итак, в силу неравенства (14) нам достаточно изучать при фиксированных ε и m асимптотику по n величины $\mathbb{H}_\varepsilon(A^n_m, \mu^\sigma_{m,n,N(n)}, \rho^H)$,

где функция $N(n)$, удовлетворяющая неравенству (13), будет выбрана несколько позже.

Отметим, что при $m < n$ значение $\Phi_m^n(v,k)$ зависит лишь от блоков $p_n(v,k)$, $p_n(v,k+2^n)$ и остатка от деления числа k на 2^n, а именно

$$\Phi_m^n(v,k) = \Phi_m^n\Big(p_n(v,k)p_n(v,k+2^n), k \bmod 2^n\Big).$$

Пусть число k фиксировано, $0 \leqslant k < 2^N - 2^n$. Посмотрим на то, как устроено распределение пары блоков $\big(p_n(v,k), p_n(v,k+2^n)\big)$, когда слово $v \in V_N$ выбирается случайно по мере ν_N^σ. Вспомним, что эта мера есть просто равномерная мера на множестве V_N^σ всех слов длины 2^N, инвариантных относительно действия тех $\Theta(z_i)$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, для которых $\sigma_i = 0$. Отсюда легко понять, что блоки $p_n(v,k)$, $p_n(v,k+2^n)$ выбираются случайно по мере ν_n^σ из множества V_n^σ, при этом они либо всегда совпадают, либо выбираются независимо, и это зависит лишь от $\left[\frac{k}{2^n}\right]$ и σ. Обозначим

$$\begin{aligned} D_{n,N} &= \Big\{q \in \{0,\dots,2^{N-n}-2\} \colon p_n(v,2^n q) = p_n(v,2^n(q+1))\ \forall\, v \in V_n^\sigma\Big\}, \\ R_{n,N} &= \{0,\dots,2^{N-n}-2\} \setminus D_{n,N}. \end{aligned} \tag{15}$$

Теперь мы можем переписать формулу (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (2^N - 2^n)\mu_{m,n,N}^\sigma(w) &= \sum_{q=0}^{2^{N-n}-2} \sum_{r=0}^{2^n-1} \nu_N^\sigma\Big(v \in V_N \colon \Phi_m^n(v, 2^n q + r) = w\Big) \\ &= \sum_{q \in D_{n,N}} \sum_{r=0}^{2^n-1} \nu_n^\sigma\Big(a \in V_n \colon \Phi_m^n(aa, r) = w\Big) \\ &+ \sum_{q \in R_{n,N}} \sum_{r=0}^{2^n-1} \nu_n^\sigma \times \nu_n^\sigma\Big((a,b) \in V_n^2 \colon \Phi_m^n(ab, r) = w\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

Очевидным для любых $a_1, a_2 \in V_n^\sigma$ является неравенство

$$\rho^H(a_1,a_2) \leqslant \rho^H\big(\Phi_m^n(a_1,0), \Phi_m^n(a_2,0)\big) \leqslant 2^m \rho^H(a_1,a_2). \tag{17}$$

Для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in V_n^\sigma$ и для любого $r \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ выполнено равенство

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho^H\big(\Phi_m^n(a_1b_1, r), \Phi_m^n(a_2b_2, r)\big) + \frac{1}{2}\rho^H\big(\Phi_m^n(b_1a_1, r), \Phi_m^n(b_2a_2, r)\big)\\
&\quad = \rho^H\big(\Phi_m^{n+1}(a_1b_1, 0), \Phi_m^{n+1}(a_2b_2, 0)\big) \qquad (18)\\
&\quad = \frac{1}{2}\rho^H\big(\Phi_m^n(a_1, 0), \Phi_m^n(a_2, 0)\big) + \frac{1}{2}\rho^H\big(\Phi_m^n(b_1, 0), \Phi_m^n(b_2, 0)\big).
\end{aligned}$$

Из неравенства (17) и равенства (18) для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in V_n^\sigma$ и любого $r \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ следует оценка

$$\rho^H\big(\Phi_m^n(a_1b_1, r), \Phi_m^n(a_2b_2, r)\big) \leqslant 2^m\big(\rho^H(a_1, a_2) + \rho^H(b_1, b_2)\big). \qquad (19)$$

Пусть множество $A \subset V_n^\sigma$ таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H) = \log|A|$ и $\nu_n^\sigma(Q) < \varepsilon$, где $Q = \{a \in V_n^\sigma : \rho^H(a, A) \geqslant \varepsilon\}$. Проверим, что множество

$$W = \{\Phi_m^n(ab, r) \colon 0 \leqslant r \leqslant 2^n - 1,\ a, b \in A\} \qquad (20)$$

является $(2^{m+1}\varepsilon)$-сетью в некотором большом по мере $\mu_{m,n,N}^\sigma$ подмножестве в A_m^n. Пусть $\widetilde{Q} = \{w \in A_m^n \colon \rho^H(w, W) \geqslant 2^{m+1}\varepsilon\}$. Отметим, что если $\Phi_m^n(ab, r) \in \widetilde{Q}$ для некоторых $a, b \in V_n^\sigma$ и некоторого $r \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, то в силу неравенства (19) и определения множества $\widetilde{Q}$ выполнено неравенство $\rho^H(a, A) \geqslant \varepsilon$ или $\rho^H(b, A) \geqslant \varepsilon$, поэтому $a \in Q$ или $b \in Q$. Итак, по формуле (16) имеем

$$\begin{aligned}
(2^N - 2^n)\mu_{m,n,N}^\sigma(\widetilde{Q}) =& |D_{n,N}| \sum_{r=0}^{2^n-1} \nu_n^\sigma\Big(a \in V_n \colon \Phi_m^n(aa, r) \in \widetilde{Q}\Big)\\
&+ |R_{n,N}| \sum_{r=0}^{2^n-1} \nu_n^\sigma \times \nu_n^\sigma\Big((a, b) \in V_n^2 \colon \Phi_m^n(ab, r) \in \widetilde{Q}\Big)\\
\leqslant& |D_{n,N}| 2^n \nu_n^\sigma(Q) + 2|R_{n,N}| 2^n \nu_n^\sigma(Q) < 2\varepsilon(2^N - 2^n),
\end{aligned}$$

откуда $\mu_{m,n,N}^\sigma(\widetilde{Q}) < 2\varepsilon$. Таким образом, имеем неравенство

$$\mathbb{H}_{2^{m+1}\varepsilon}(A_m^n, \mu_{m,n,N}^\sigma, \rho^H) \leqslant \log|W| \leqslant 2\mathbb{H}_\varepsilon(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H) + n. \qquad (21)$$

Перейдем теперь к обратной оценке. Мы хотим оценить ε-энтропию тройки $(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H)$ сверху через ε-энтропию тройки $(A_m^n, \mu_{m,n,N}^\sigma, \rho^H)$.

Пусть множество $W \subset A_m^n$ таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(A_m^n, \mu_{m,n,N}^\sigma, \rho^H) = \log|W|$ и $\mu_{m,n,N}^\sigma(\widetilde{Q}) < \varepsilon$, где $\widetilde{Q} = \{w \in A_m^n \colon \rho^H(w, W) \geqslant \varepsilon\}$. По формуле (16)

имеем

$$\frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{2^n-1}\Bigg(|D_{n,N}|\nu_n^\sigma\Big(a\in V_n^\sigma\colon \Phi_m^n(aa,r)\in\widetilde{Q}\Big)$$
$$+|R_{n,N}|\,\nu_n^\sigma\times\nu_n^\sigma\Big((a,b)\in(V_n^\sigma)^2\colon \Phi_m^n(ab,r)\in\widetilde{Q}\Big)\Bigg)$$
$$=(2^{N-n}-1)\mu_{m,n,N}^\sigma(\widetilde{Q})<(2^{N-n}-1)\varepsilon.$$

Отсюда следует, что найдется такое $r\in\{0,\dots,2^n-1\}$, что

$$\begin{aligned}&|D_{n,N}|\nu_n^\sigma\Big(a\in V_n^\sigma\colon \Phi_m^n(aa,r)\in\widetilde{Q}\Big)\\&+|R_{n,N}|\,\nu_n^\sigma\times\nu_n^\sigma\Big((a,b)\in(V_n^\sigma)^2\colon \Phi_m^n(ab,r)\in\widetilde{Q}\Big)<(2^{N-n}-1)\varepsilon.\end{aligned}\tag{22}$$

Зафиксируем такое r. Так как $|D_{n,N}|+|R_{n,N}|=2^{N-n}-1$, выполнено хотя бы одно из следующих двух неравенств:

$$\nu_n^\sigma\Big(a\in V_n^\sigma\colon \Phi_m^n(aa,r)\in\widetilde{Q}\Big)<2\varepsilon,\tag{23}$$

$$\nu_n^\sigma\times\nu_n^\sigma\Big((a,b)\in(V_n^\sigma)^2\colon \Phi_m^n(ab,r)\in\widetilde{Q}\Big)<2\varepsilon.\tag{24}$$

Теперь мы можем перейти к оценкам расстояний. Если $a_1,a_2\in V_n^\sigma$ таковы, что найдется такое $w\in W$, что $\rho^H\big(w,\Phi_m^n(a_1a_1,r)\big)<\varepsilon$ и $\rho^H\big(w,\Phi_m^n(a_2a_2,r)\big)<\varepsilon$, то, воспользовавшись неравенством треугольника, равенством (18) для $b_1=a_1,b_2=a_2$ и неравенством (17), имеем

$$2\varepsilon>\rho^H\big(\Phi_m^n(a_1a_1,r),\Phi_m^n(a_2a_2,r)\big)=\rho^H\big(\Phi_m^n(a_1,0),\Phi_m^n(a_2,0)\big)\geqslant\rho^H(a_1,a_2).$$

Из этого неравенства и того факта, что множество W есть ε-сеть в $A_m^n\setminus\widetilde{Q}$, следует, что в множестве $\{a\in V_n^\sigma\colon \Phi_m^n(aa,r)\notin\widetilde{Q}\}$ можно найти (2ε)-сеть в метрике ρ^H, состоящую из не более чем $|W|$ точек. В случае, когда неравенство (23) выполнено, получаем

$$\mathbb{H}_{2\varepsilon}(V_n^\sigma,\nu_n^\sigma,\rho^H)\leqslant\log|W|=\mathbb{H}_\varepsilon(A_m^n,\mu_{m,n,N}^\sigma,\rho^H).\tag{25}$$

Если же неравенство (23) не выполнено, то выполнено неравенство (24). Из него следует, что

$$\nu_n^\sigma\times\nu_n^\sigma\Big((a,b)\in(V_n^\sigma)^2\colon \Phi_m^n(ab,r)\notin\widetilde{Q},\ \Phi_m^n(ba,r)\notin\widetilde{Q}\Big)>1-4\varepsilon.\tag{26}$$

Пусть $a_1,a_2,b_1,b_2\in V_n^\sigma$ таковы, что для некоторых $w_1,w_2\in W$ выполнены неравенства $\rho^H(w_1,\Phi_m^n(a_1b_1,r))<\varepsilon$, $\rho^H(w_1,\Phi_m^n(a_2b_2,r))<\varepsilon$,

а также $\rho^H(w_2, \Phi_m^n(b_1a_1, r)) < \varepsilon$ и $\rho^H(w_2, \Phi_m^n(b_2a_2, r)) < \varepsilon$. Воспользовавшись неравенством треугольника, равенством (18) и неравенством (17), получаем

$$\begin{aligned}4\varepsilon >& \rho^H(\Phi_m^n(a_1b_1, r), \Phi_m^n(a_2b_2, r)) + \rho^H(\Phi_m^n(b_1a_1, r), \Phi_m^n(b_2a_2, r))\\ =& \rho^H(\Phi_m^n(a_1, 0), \Phi_m^n(a_2, 0)) + \rho^H(\Phi_m^n(b_1, 0), \Phi_m^n(b_2, 0))\\ \geqslant& \rho^H(a_1, a_2) + \rho^H(b_1, b_2) = 2\rho^H(a_1b_1, a_2b_2).\end{aligned}$$

Снова, так как W есть ε-сеть в $A_m^n \setminus \widetilde{Q}$, отсюда следует, что в множестве $\{ab \in (V_n^\sigma)^2\colon \Phi_m^n(ab, r) \notin \widetilde{Q},\ \Phi_m^n(ba, r) \notin \widetilde{Q}\}$ можно найти (2ε)-сеть в метрике ρ^H, состоящую не более чем из $|W|^2$ точек. Проекции этих точек на V_n^σ (первый сомножитель в $(V_n^\sigma)^2$) образуют (4ε)-сеть в множестве меры как минимум $1 - 4\varepsilon$ (в силу неравенства (26)), поэтому

$$\mathbb{H}_{4\varepsilon}(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H) \leqslant 2\log|W| = 2\mathbb{H}_\varepsilon(A_m^n, \mu_{m,n,N}^\sigma, \rho^H). \tag{27}$$

Отметим, что неравенство (27) следует из неравенства (25), поэтому, независимо от того, какое из неравенств (23) или (24) выполнено, неравенство (27) выполнено всегда. Вместе с неравенством (21) получаем двустороннюю оценку

$$\frac{1}{2}\mathbb{H}_{2^{m+3}\varepsilon}(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H) \leqslant \mathbb{H}_{2^{m+1}\varepsilon}(A_m^n, \mu_{m,n,N}^\sigma, \rho^H) \leqslant 2\mathbb{H}_\varepsilon(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H) + n. \tag{28}$$

Осталось лишь вычислить напрямую $\mathbb{H}_\varepsilon(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H)$. Вспомним, что мера ν_n^σ равномерна на множестве V_n^σ, состоящем из всех последовательностей нулей и единиц длины 2^n, инвариантных относительно действия $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(1-\sigma_i) = n - s(n)$ образующих группы $\oplus_{i=0}^{n-1}\mathbb{Z}_2$. Отсюда следует, что ε-энтропия тройки $(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H)$ совпадает с ε-энтропией стандартного диадического куба размерности $2^{n-\sum\limits_{i=0}^{n-1}(1-\sigma_i)} = 2^{s(n)}$ с равномерной мерой и метрикой Хэмминга. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbb{H}_\varepsilon(V_n^\sigma, \nu_n^\sigma, \rho^H) \asymp 2^{s(n)}, \quad n \to +\infty. \tag{29}$$

Подставляя этот результат в формулу (28), получаем, что при фиксированных ε и m выполнено асимптотическое неравенство

$$2^{s(n)} \preceq \mathbb{H}_\varepsilon(A_m^n, \mu_{m,n,N(n)}^\sigma, \rho^H) \preceq 2^{s(n)} + n, \quad n \to +\infty, \tag{30}$$

где последовательность $N(n)$ можно выбирать произвольным образом, лишь бы было выполнено неравенство $N(n) > n$.

В случае, если последовательность $\frac{n}{2^{s(n)}}$ ограничена, для любых $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ и $m \in \mathbb{N}$, выбирая $N(n) > n - \log \varepsilon$ (чтобы удовлетворить неравенству (13)), применяя неравенства (14), формулы (30) и (9), получаем формулу (6).

Однако в случае, если $2^{s(n)}$ растет медленнее, чем n, верхняя и нижняя оценка в неравенстве (30) расходятся, поэтому нужно их уточнять. Оказывается, верхнюю оценку в неравенстве (30) можно улучшить. Если последовательность $s(n)$ растет медленно, то в последовательности σ много нулей. Это значит, что слова из множества V_n^σ обладают большим количеством симметрий. Но это позволяет нам уменьшить множество W, определенное формулой (20).

Итак, зафиксируем $a, b \in V_n^\sigma$. Пусть $s(m,n) = s(n) - s(m)$ есть количество единиц в последовательности σ с номерами между m и $n-1$, и пусть $k_1 < k_2 < \cdots < k_{s(m,n)}$ – все эти номера. Добавим к ним еще два фиктивных индекса $k_0 = m-1$ и $k_{s(m,n)+1} = n$. Тогда при $0 \leqslant j \leqslant s(m,n)$ каждый блок слова ab длины $2^{k_{j+1}}$ состоит из $2^{k_{j+1}-k_j-1}$ одинаковых блоков длины 2^{k_j+1}. Значит, для всех таких i, что

$$i \bmod 2^{k_{j+1}} < 2^{k_{j+1}} - 2^{k_j+1},$$

выполнено равенство $p_{k_j+1}(ab,i) = p_{k_j+1}(ab, i + 2^{k_j+1})$, из которого следует, что $p_m(ab,i) = p_m(ab, i + 2^{k_j+1})$. Отсюда при $0 \leqslant r \leqslant 2^n - 1$ получаем

$$\rho^H\left(\Phi_m^n(ab, r + 2^{k_j+1}), \Phi_m^n(ab,r)\right) \leqslant 2^{k_j+1-k_{j+1}}. \tag{31}$$

Неравенства (31) оказывается достаточно для доказательства улучшенной оценки. Каждое целое число r от 0 до $2^n - 1$ может быть единственным образом представлено в виде

$$r = \beta(r) + \sum_{j=0}^{s(m,n)} \alpha_j(r) 2^{k_j+1}, \tag{32}$$

где $\alpha_j(r)$ – целые коэффициенты и $0 \leqslant \alpha_j(r) < 2^{k_{j+1}-k_j}$, $0 \leqslant \beta(r) < 2^m$. Если числа $r_1, r_2 \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ таковы, что $\beta(r_1) = \beta(r_2)$, то многократное применение неравенства (31) позволяет написать следующую

оценку:

$$\rho^H\big(\Phi_m^n(ab,r_1),\Phi_m^n(ab,r_2)\big)\leqslant\sum_{j=0}^{s(m,n)}|\alpha_j(r_1)-\alpha_j(r_2)|2^{k_j+1-k_{j+1}}. \tag{33}$$

Для $0\leqslant j\leqslant s(m,n)$ пусть $d_j=[2^{k_{j+1}-k_j-1}\frac{\varepsilon}{s(m,n)+1}]$. Из неравенства (33) следует, что если $\beta(r_1)=\beta(r_2)$ и $|\alpha_j(r_1)-\alpha_j(r_2)|\leqslant d_j$ при всех $j=0,\dots,s(m,n)$, то

$$\rho^H\big(\Phi_m^n(ab,r_1),\Phi_m^n(ab,r_2)\big)\leqslant\varepsilon.$$

При каждом $j=0,\dots,s(m,n)$ выберем множество

$$\mathcal{A}_j=\left\{0,(d_j+1),2(d_j+1),\dots,\Big[\frac{2^{k_{j+1}-k_j}-1}{d_j+1}\Big](d_j+1)\right\},$$

которое, очевидно, есть d_j-сеть в отрезке $[0,2^{k_{j+1}-k_j}-1]$. Ясно, что при таком выборе множеств $\mathcal{A}_j$ для любого $r_1\in\{0,\dots,2^n-1\}$ найдется такое $r_2\in\{0,\dots,2^n-1\}$, что $\beta(r_1)=\beta(r_2)$, $|\alpha_j(r_1)-\alpha_j(r_2)|\leqslant d_j$ и $\alpha_j(r_2)\in\mathcal{A}_j$ при $0\leqslant j\leqslant s(m,n)$. В таком случае получаем $\rho^H\big(\Phi_m^n(ab,r_1),\Phi_m^n(ab,r_2)\big)\leqslant\varepsilon$. Мощность каждого множества $\mathcal{A}_j$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_j|=\left(\Big[\frac{2^{k_{j+1}-k_j}-1}{d_j+1}\Big]+1\right)&\leqslant\left(\Big[\frac{2^{k_{j+1}-k_j}-1}{2^{k_{j+1}-k_j-1}\varepsilon}\big(s(m,n)+1\big)\Big]+1\right)\\&\leqslant 2\Big(\frac{s(m,n)+1}{\varepsilon}+1\Big).\end{aligned} \tag{34}$$

Итак, вместо множества W, заданного формулой (20), рассмотрим его подмножество

$$\begin{aligned}W'=\big\{\Phi_m^n(ab,r)\colon a,b\in A,r\in\{0,\dots,2^n-1\},\\ \alpha_j(r)\in\mathcal{A}_j\ \forall j\in\{0,\dots,s(m,n)\}\big\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Мы только что доказали, что множество W' является ε-сетью в множестве W. Осталось лишь оценить его мощность:

$$|W'|\leqslant 2^m|A|^2\prod_{j=0}^{s(m,n)}|\mathcal{A}_j|\leqslant 2^{m+s(m,n)+1}|A|^2\Big(\frac{s(m,n)+1}{\varepsilon}+1\Big)^{s(m,n)+1}. \tag{36}$$

Ранее мы доказали, что множество W, определенное формулой (20), является $(2^{m+1}\varepsilon)$-сетью в некотором подмножестве пространства A_m^n,

мера $\mu^{\sigma}_{m,n,N}$ которого не меньше $1-2\varepsilon$. Итого, мы получаем оценку ε-энтропии пространства $(A^n_m, \mu^{\sigma}_{m,n,N}, \rho^H)$, уточняющую неравенство (21):

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{(2^{m+1}+1)\varepsilon}(A^n_m, \mu^{\sigma}_{m,n,N}, \rho^H) \leqslant \log|W'| \leqslant 2\mathbb{H}_{\varepsilon}(V^{\sigma}_n, \nu^{\sigma}_n, \rho^H) + m \\ +\big(s(m,n)+1\big)\cdot\left(1+\log\left(\frac{s(m,n)+1}{\varepsilon}+1\right)\right);\end{aligned} \tag{37}$$

из нее, в свою очередь, в силу соотношения (29) для любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ следует асимптотическая верхняя оценка

$$\mathbb{H}_{(2^{m+1}+1)\varepsilon}(A^n_m, \mu^{\sigma}_{m,n,N}, \rho^H) \preceq 2^{s(n)} + s(n)\log s(n) \preceq 2^{s(n)}. \tag{38}$$

Вместе с левой частью неравенства (30) имеем двустороннюю оценку

$$\mathbb{H}_{\varepsilon}(A^n_m, \mu^{\sigma}_{m,n,N}, \rho^H) \asymp 2^{s(n)}.$$

Далее, выбирая $N(n) > n - \log\varepsilon$ (выполняя тем самым условие (13)), используя неравенство (14) и равенство (9), получаем соотношение (6). Лемма 5 полностью доказана.

Доказательство замечания 5. Условие $h_n = o(n)$, которое в данном случае равносильно расходимости ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(1-\sigma_i)$, является необходимым и достаточным для того, чтобы автоморфизм T имел нулевую энтропию (см., например, [10]). Стало быть, для того чтобы энтропия была положительна, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(1-\sigma_i)$ сходился, то есть последовательность σ содержала лишь конечное количество нулей.

Пусть m_0 таково, что $\sigma_i = 1$ при $i > m_0$. Для того чтобы вычислить энтропию преобразования T, зададим последовательность конечных измеримых разбиений ξ_m, $m > m_0$, в совокупности порождающих всю σ-алгебру пространства (X, μ^{σ}). Для $m > m_0$ определим такое разбиение ξ_m, которое отождествляет пути с одинаковым началом длины m: пути $x, y \in X$ принадлежат одному элементу разбиения ξ_m тогда и только тогда, когда $P_m(x) = P_m(y)$. Энтропия разбиения $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} T^i\xi_m$ в точности совпадает с энтропией меры $\mu^{\sigma}_{m,n}$ на конечном множестве A^n_m, которая аппроксимируется мерой $\mu^{\sigma}_{m,n,N}$ при больших $N = N(n)$ (неравенство (12)). Отметим, что при $N > n > m_0$ множество $D_{n,N}$, определенное формулой (15), пусто, так как $\sigma_i = 1$

при $i \geqslant n$. Из формулы (16) для $w \in A_m^n$ следует равенство

$$\mu^\sigma_{m,n,N}(w) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2^n-1} \nu_n^\sigma \times \nu_n^\sigma \Big((a,b) \in V_n^2 \colon \Phi_m^n(ab,r) = w \Big).$$

Отметим, что если слова $a, b \in V_n$ выбираются случайно по мере ν_n^σ, то блоки длины 2^m в их составе выбираются случайно и независимо из множества V_m^σ. Пусть для некоторого r нашлись такие $a, b \in V_n^\sigma$, что $\Phi_m^n(ab,r) = w$. Отметим, что если $r' \not\equiv r \pmod{2^m}$, то $\Phi_m^n(a'b',r') \neq \Phi_m^n(ab,r)$ для любых $a, b \in V_n^\sigma$. Мы можем изменять блоки длины 2^m, не содержащие индексы $r, r+1, \ldots, r+2^n-1$, в слове ab случайным образом. Следовательно,

$$\nu_n^\sigma \times \nu_n^\sigma \Big((a,b) \in V_n^2 \colon \Phi_m^n(ab,r) = w \Big) = \frac{1}{|V_m^\sigma|^{2^{n-m}+1}},$$

если $r \not\equiv 0 \pmod{2^m}$, и

$$\nu_n^\sigma \times \nu_n^\sigma \Big((a,b) \in V_n^2 \colon \Phi_m^n(ab,r) = w \Big) = \frac{1}{|V_m^\sigma|^{2^{n-m}}},$$

если $r \equiv 0 \pmod{2^m}$. Более того, для $r' \equiv r \pmod{2^m}$ выполнены те же равенства. Следовательно,

$$\mu^\sigma_{m,n,N}(w) = \frac{1}{2^m |V_m^\sigma|^{2^{n-m}+1}} \quad \text{или} \quad \mu^\sigma_{m,n,N}(w) = \frac{1}{2^m |V_m^\sigma|^{2^{n-m}}}.$$

Из этого, в свою очередь, следует, что энтропия меры $\mu^\sigma_{m,n,N}$ лежит между $m + 2^{n-m} \log |V_m^\sigma|$ и $m + (2^{n-m}+1) \log |V_m^\sigma|$. После деления на 2^n и перехода к пределу по n получаем $2^{-m} \log |V_m^\sigma| = 2^{-\sum\limits_{i=0}^{m-1}(1-\sigma_i)} = 2^{-\sum\limits_{i=0}^{\infty}(1-\sigma_i)}$. Замечание доказано. □

3.3. Вычисление масштабирующей энтропийной последовательности для адического действия группы $\oplus\mathbb{Z}_2$. Естественным оснащением группы $G = \oplus\mathbb{Z}_2$ является последовательность конечных подгрупп $G_n \subset G$, $n \geqslant 0$, порожденных первыми $n+1$ образующими. Отметим, что группа G коммутативна, поэтому любое ее оснащение является подходящим.

Наряду с теоремой 5 одним из основных результатов этой работы является следующая теорема.

Теорема 6. *Для любой последовательности σ, состоящей из нулей и единиц, последовательность $h_n = 2^{s^\sigma(n)}$ является масштабирующей энтропийной последовательностью адического действия оснащенной группы G на пространстве (X, μ^σ).*

Как и в случае адического автоморфизма, можно сделать следующее замечание.

Замечание 6. Адическое действие группы G на пространстве (X, μ^σ) имеет положительную энтропию (а последовательность $h_n = n$ принадлежит классу $\mathcal{H}(X, \mu^\sigma, G)$) тогда и только тогда, когда последовательность σ содержит лишь конечное количество нулей. В этом случае энтропия вычисляется по формуле

$$h = 2^{-\sum\limits_{i=0}^{\infty}(1-\sigma_i)}.$$

Под энтропией действия здесь имеется в виду величина

$$h = \sup\Big\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|G_n|}H\big(\bigvee_{g\in G_n} T^g\xi\big)\Big\},$$

где супремум берется по всевозможным конечным измеримым разбиениям ξ.

Как и в доказательстве теоремы 5, мы будем вычислять масштабирующие последовательности для полуметрик ρ_m, $m \geqslant 1$.

Предложение 2. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $2^{s^\sigma(n)}$ является масштабирующей для полуметрики ρ_m и адического действия оснащенной группы G на пространстве (X, μ^σ).*

Теорема 6 выводится из предложения 2 дословно так же, как теорема 5 выводилась из предложения 1.

Доказательство предложения 2. Легко понять, что если $x \in X$, $g \in G_{n-1}$ и $m < n$, то

$$\mathfrak{v}_m(T^g x) = p_m\big(\mathfrak{v}_n(x), \Theta^g\mathfrak{o}_n(x)\big), \quad \mathfrak{o}_m(T^g x) = \Theta^g\mathfrak{o}_n(x) \bmod 2^m. \tag{39}$$

Если $x, y \in X$ таковы, что $\mathfrak{o}_n(x) \not\equiv \mathfrak{o}_n(y) \pmod{2^m}$, то для всех элементов $g \in G_{n-1}$ имеем $\Theta^g\mathfrak{o}_n(x) \not\equiv \Theta^g\mathfrak{o}_n(y) \pmod{2^m}$, поэтому из (39) получаем $P_m(T^g x) \neq P_m(T^g y)$, откуда следует, что $T_{\mathrm{av}}^{G_{n-1}}\rho_m(x, y) = 1$.

Разобьем пространство X на непересекающиеся подмножества Y_j, $j = 0, \dots, 2^m - 1$, заданные формулой

$$Y_j = \{x \in X\colon \mathfrak{o}_n(x) \equiv j \pmod{2^m}\}.$$

Как мы только что показали, если x, y лежат в разных элементах этого разбиения, то $T_{\mathrm{av}}^{G_{n-1}}\rho_m(x,y) = 1$. Для каждого j имеем $\mu^\sigma(Y_j) = 2^{-m}$ в силу центральности.

Пусть $\kappa \in \{0,\dots,2^m-1\}$ фиксировано. Поймем, как устроена полуметрика $T_{\mathrm{av}}^{G_{n-1}}\rho_m$ на множестве Y_κ. Для каждого $k \in \{0,\dots,2^n-1\}$, такого, что $k \equiv \kappa \pmod{2^m}$, найдем единственный элемент $\widetilde{g}(k) \in G_{n-1}$, для которого $\Theta^{\widetilde{g}(k)}k = \kappa$. При этом $\widetilde{g}(k)$ в разложении по образующим $z_0,\dots,z_{n-1}$ имеет нулевые коэффициенты при $z_0,\dots,z_{m-1}$, поэтому преобразование $\Theta^{\widetilde{g}(k)}$ на V_n лишь переставляет блоки размера 2^m, не меняя их внутри, то есть

$$p_m(\Theta^{\widetilde{g}(k)}v, \Theta^{\widetilde{g}(k)}j) = p_m(v,j) \tag{40}$$

для любых $v \in V_n$, $j \in \{0,\dots,2^n-1\}$.

Пусть $x^1, x^2 \in Y_\kappa$. Пусть $v^i = \mathfrak{v}_n(x^i)$, $k^i = \mathfrak{o}_n(x^i)$. Тогда для всех $g \in G_{n-1}$ имеем $\Theta^g k^1 \equiv \Theta^g k^2 \pmod{2^m}$. Применяя последовательно равенства (39) и (40), получаем

$$\begin{aligned} T_{av}^{G_{n-1}}\rho_m(x^1,x^2) &= \frac{1}{|G_{n-1}|}\Big|\big\{g \in G_{n-1}\colon P_m(T^g x^1) \neq P_m(T^g x^2)\big\}\Big| \\ &= \frac{1}{|G_{n-1}|}\Big|\big\{g \in G_{n-1}\colon p_m(v^1, \Theta^g k^1) \neq p_m(v^2, \Theta^g k^2)\big\}\Big| \qquad (41) \\ &= \frac{1}{|G_{n-1}|}\Big|\big\{g \in G_{n-1}\colon p_m(\Theta^{\widetilde{g}(k_1)}v^1, \Theta^g\kappa) \neq p_m(\Theta^{\widetilde{g}(k_2)}v^2, \Theta^g\kappa)\big\}\Big|. \end{aligned}$$

Зададим отображение $\mathfrak{Pr}_\kappa\colon Y_\kappa \to (V_m)^{2^{n-m}}$ формулой

$$\mathfrak{Pr}_\kappa(x) = \Big(p_m\big(\Theta^{\widetilde{g}(\mathfrak{o}_n(x))}\mathfrak{v}_n(x), 2^m j\big)\Big)_{j=0}^{2^{n-m}-1}.$$

Отметим, что числа $\Theta^g\kappa$ пробегают в точности все множество $\{0,\dots,2^n-1\}$, когда g пробегает G_{n-1}, поэтому последнее выражение в равенстве (41) есть в точности нормированное расстояние по Хэммингу между словами $\mathfrak{Pr}_\kappa(x^1)$ и $\mathfrak{Pr}_\kappa(x^2)$ в пространстве $(V_m)^{2^{n-m}}$. Иными словами, равенство (41) означает, что отображение $\mathfrak{Pr}_\kappa$ есть изометрия полуметрического пространства $(Y_\kappa, T_{\mathrm{av}}^{G_{n-1}}\rho_m)$ в метрическое пространство $((V_m)^{2^{n-m}}, \rho^H)$. Осталось понять, куда при этом отображении переходит мера μ^σ.

Легко видеть, что если число $k \equiv \kappa \pmod{2^m}$ фиксировано, то, когда x выбирается случайно из Y_κ по мере μ^σ с условием $\mathfrak{o}_n(x) = k$, элемент $\mathfrak{v}_n(x)$ выбирается равномерно из множества V_n^σ, а значит, и

$\Theta^{\widetilde{g}(\mathfrak{o}_n(x))}\mathfrak{v}_n(x)$ тоже. Иными словами, образ меры μ^σ при отображении $\mathfrak{P}\mathfrak{r}_\kappa$ есть равномерная мера с полным зарядом 2^{-m} на множестве слов V_n^σ, рассматриваемых как слова длины 2^{n-m} над алфавитом V_m^σ. Так как эти слова инвариантны относительно действия $n-m-s(n)+s(m)$ образующих группы G_{n-1}, тройка $(Y_\kappa, \mu^\sigma, T_{\mathrm{av}}^{G_{n-1}}\rho_m)$ изоморфна кубу размерности $2^{s(n)-s(m)}$ над алфавитом V_m^σ с равномерной мерой полного заряда 2^{-m} и нормированной метрикой Хэмминга. Так как расстояние $T_{\mathrm{av}}^{G_{n-1}}\rho_m$ между различными множествами Y_j равно 1, отсюда легко следует, что при фиксированных $m \in \mathbb{N}$ и малых $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu^\sigma, T_{\mathrm{av}}^{G_{n-1}}\rho_m) \asymp 2^{s(n)}, \quad n \to +\infty.$$

Тем самым, предложение 2 доказано. □

Доказательство замечания 6 схоже с доказательством замечания 5, только существенно проще.

Доказательство замечания 6. Как и при доказательстве замечания 5, выберем конечные разбиения ξ_m, отождествляющие пути с одинаковыми началами длины m. Вычислим энтропию разбиения $\bigvee\limits_{g\in G_{n-1}} T^g\xi_m$. Пусть $x_1, x_2 \in X$. Отметим, что $P_m(T^g x_1) = P_m(T^g x_2)$ для всех $g \in G_{n-1}$ тогда и только тогда, когда найдется такой элемент $g \in G_{n-1}$, что $\mathfrak{v}_n(x_1) = \Theta^g\mathfrak{v}_n(x_2)$ и $\mathfrak{o}_n(x_1) = \Theta^g\mathfrak{o}_n(x_2)$. Отсюда следует, что каждый элемент положительной меры разбиения $\bigvee\limits_{g\in G_{n-1}} T^g\xi_m$ имеет меру ровно $\frac{|G_{n-1}|}{2^n|V_n^\sigma|} = \frac{1}{|V_n^\sigma|}$, поэтому энтропия этого разбиения равна $\log|V_n^\sigma|$. Остается поделить на $|G_{n-1}| = 2^n$ и перейти к пределу по n. □

Доказательство теоремы 4. Пусть последовательность $h = \{h_n\}$ неубывающая и субаддитивная. Как известно (см., например, [18]), ограниченные масштабирующие энтропийные последовательности имеют в точности системы с дискретным спектром (стоит отметить, что и они имеют реализацию на диаграммах Браттели–Вершика, хотя мы и не используем этот факт в данной работе). Поэтому можно считать последовательность h неограниченной. Можно считать также, что $h_1 = 1$ (если это не так, то поделим всю последовательность на h_1). Определим последовательность $\{\sigma_n\}$ соотношением $\sigma_n = [\log h_{2^n}] - [\log h_{2^{n-1}}]$, $n \geqslant 1$, и положим $\sigma_0 = 0$. Заметим, что $\sigma_i \in \{0, 1\}$ в силу

субаддитивности и монотонности последовательности h. Для любого числа k имеем $s^\sigma(k) = \sum\limits_{i=0}^{k} \sigma_i = [\log h_{2^k}]$, поэтому $\frac{h_{2^k}}{2} \leqslant 2^{s^\sigma(k)} \leqslant h_{2^k}$. Если же $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, то

$$2^{s^\sigma([\log n])} = 2^{s^\sigma(k)} \in \left(\frac{h_{2^k}}{2}, h_{2^k}\right) \subset \left(\frac{h_n}{4}, h_n\right).$$

Таким образом, $h_n \asymp 2^{s^\sigma([\log n])}$, поэтому по теореме 5 имеем включение $h \in \mathcal{H}(X, \mu^\sigma, T)$, а по теореме 6 – включение $h \in \mathcal{H}(X, \mu^\sigma, \oplus\mathbb{Z}_2)$. Эргодичность этих действий следует из леммы 4. □

Благодарности.

Автор выражает благодарность Анатолию Моисеевичу Вершику за постановку задач, помощь, массу полезных советов и обсуждений. Кроме того, автор благодарит Федора Владимировича Петрова за внимание к работе.

Литература

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
2. А. М. Вершик, *Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
3. А. М. Вершик. *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры.* — УМН **59**, вып. 334(4) (2000), 59–128.
4. А. М. Вершик, *Случайные метрические пространства и универсальное пространство Урысона.* В сб.: Фундаментальная математика сегодня. М.: МЦНМО, 2003, сс. 54–88; `arXiv:math/0205086`.
5. А. М. Вершик, *Информация, энтропия, динамика.* В сб.: Математика XX века. Взгляд из Петербурга. М.: МЦНМО, 2010, сс. 47–76.
6. А. М. Вершик, *Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром.* — Алгебра и анализ **23**, вып. 1 (2011), 111–135.
7. А. М. Вершик, *Оснащенные градуированные графы, проективные пределы симплексов и их границы.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2015), 83–104.
8. А. М. Вершик, А. Д. Горбульский, *Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр.* — Теор. вероятн. и прим. **52**, вып. 3 (2007), 446–467.
9. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0-функтор.* — В сб.: Итоги науки и техники. Серия “Современные проблемы математики. Новейшие достижения”, т. 26. М.: ВИНИТИ, 1985, сс. 3–56.
10. П. Б. Затицкий, *Масштабирующая энтропийная последовательность: инвариантность и примеры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2015), 128–161.
11. П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *Об исправлении метрик.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **390** (2011), 201–209.

12. П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *О субаддитивности масштабирующей энтропийной последовательности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ (2015).
13. А. Н. Колмогоров, *Теория передачи информации.* В кн.: А. Н. Колмогоров. *Теория информации и теория алгоритмов.* М.: Наука, 1987, сс. 29–58.
14. S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems.* — Israel J. Math. **100** (1997), 189–207.
15. S. Ferenczi, K. K. Park, *Entropy dimensions and a class of constructive examples.* — Discrete Contin. Dyn. Syst. **17**, No. 1 (2007), 133–141.
16. A. Katok, J.-P. Thouvenot, *Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **33**, No. 3 (1997), 323–338.
17. A. M. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants.* — Markov Process. Related Fields **16**, No. 1 (2010), 169–184.
18. A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov, *Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces.* — Cent. Eur. J. Math. **11**, No. 3 (2013), 379–400.

Zatitskiy P. B. On the possible growth rate of a scaling entropy sequence.

We define a scaling entropy sequence of a group action and give a family of examples that exhaust all possible growth rates of entropy scaling sequences for actions of the groups $\mathbb{Z}$ and $\oplus\mathbb{Z}_2$.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ,
14-я линия В.О., д. 29Б,
199178 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: paxa239@yandex.ru

Поступило 15 сентября 2015 г.