Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 436, 2015 г.

А. М. Вершик, М. И. Граев

КОГОМОЛОГИИ ПОДГРУППЫ ИВАСАВЫ ГРУППЫ $U(p,p)$ В НЕУНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

§1. Введение

Эта статья примыкает к нашей работе [1], в которой мы рассматривали ту же проблему, что и здесь, но для группы $U(2,2)$. Основная цель состоит в построении так называемого особого представления группы, т.е. представления, для которого 1-когомологии группы со значениями в нем нетривиальны. Мы рассматриваем максимальную разрешимую подгруппу группы $U(p,p)$ – подгруппу Ивасавы. У коммутативных и нильпотентных групп 1-когомологии со значениями в неприводимых унитарных представлениях, отличных от одномерных представлений, тривиальны. Теория когомологий разрешимых групп, насколько известно авторам, пока отсутствует. В частности, неясно, для каких разрешимых групп существуют неприводимые особые инъективные унитарные представления. Даже для нужного нам случая разрешимых групп Ли ситуация, по-видимому, непростая. Подгруппа Ивасавы группы $U(p,p)$ есть расширение коммутативной (аддитивной) группы эрмитовых матриц порядка p и группы нижнетреугольных комплексных матриц порядка p с положительными элементами на главной диагонали, действующей сопряжениями на нормальном делителе.

Результат работы (теорема 1) состоит в построении особого инъективного операторно-неприводимого *неунитарного ограниченного представления* подгруппы Ивасавы группы $U(p,p)$ для $p > 1$. Для $p = 1$ (т.е. для группы ранга 1) особое инъективное *унитарное представление* существует – это хорошо известно, поскольку $SU(1,1)$ – группа ранга 1 (изоморфная $SL(2,\mathbb{R})$). Существует ли такое представление для $p > 1$, неизвестно. Построенное неунитарное особое представление является ограниченным, т.е. ограничены все операторы представления, что позволяет изучать его методами, сходными с

Ключевые слова: подгруппа Ивасавы, коцикл, особое представление.

Работа первого автора поддержана грантом РНФ 14-11-00581, а второго – грантом РФФИ 13-01-00190-а.

теми, какими изучаются унитарные предсталения. Предположительно, это представление, как и в случае $p = 2$ (см. [1]), продолжается до уже неограниченного представления всей группы $U(p,p)$, но и эта неограниченность в известном смысле контролируется. Роль особых представлений (унитарных или нет) – в том, чтобы с их помощью построить, по образцу теории для групп ранга 1, представления групп токов со значениями в соответствующих полупростых группах $U(p,p)$. Об этом речь пойдет в другой статье.

§2. Исходные определения

2.1. Группа Ивасавы. Рассмотрим подгруппу Ивасавы (= максимальную разрешимую подгруппу) P простой группы Ли $U(p,p)$. Эта группа представима как полупрямое произведение

$$P = S \rtimes N,$$

где S – разрешимая группа нижнетреугольных матриц порядка p с элементами s_{ij}, где $s_{ii} > 0$ и $s_{ij} \in \mathbb{C}$ при $i > j$. С геометрической точки зрения, группа S есть произведение комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^{\frac{p(p-1)}{2}}$ на вещественный октант размерности p; группа S не унимодулярна, но, исходя из геометрии, легко описать левую и правую меры Хаара на ней. Коммутативная группа N есть аддитивная группа косоэрмитовых матриц порядка p. Вещественные размерности этих подгрупп равны p^2. Элементы группы P задаются как пары (s,n), $s \in S, n \in N$. В этих обозначениях произведение элементов группы P задается следующей формулой:

$$(s_1, n_1) \cdot (s_2, n_2) = (s_1 s_2, s_2^{-1} n_1 s_2^{*-1} + n_2).$$

Для $p = 1$ группа P есть двумерная подгруппа группы $GL(2,\mathbb{C})$ нижнетреугольных матриц второго порядка с равными положительными элементами на диагонали и мнимым элементом под диагональю.

Но мы будем пользоваться только данным выше определением группы P, и ее матричная реализация для нас несущественна. Наша цель – выделить точные представления группы с нетривиальными 1-когомологиями; иначе говоря, представления π в векторном пространстве H, обладающие некогомологичными нулю (т.е. не имеющими вида $T_g f - f$) 1-коциклами – такими отображениями $\beta : P \to H$, что

$$\beta(g_1 \cdot g_2) = \beta(g_1) + T(g_1)\beta(g_2). \tag{1}$$

В работе дается описание семейства таких неунитарных представлений.

2.2. Описание гильбертова пространства H. Обозначим через N^* группу, двойственную к N (группу аддитивных комплексных характеров), с элементами m и спариванием

$$\langle n, m\rangle = \mathrm{Tr}\,(nm) \in \mathbb{R}.$$

Фиксируя скалярное произведение, реализуем ее как группу, изоморфную N. Группа S действует на N^* автоморфизмами $m \mapsto s^*ms$.

Введем гильбертово пространство

$$H = L^2(N^*, d\nu(m)),$$

где $d\nu(m)$ – лебегова мера на N^*, которая лишь квазиинвариантна относительно действия группы S:

$$d(s^*ms) = \theta^{2p}(s)\,dm, \quad \theta(s) = s_{11}\cdot\ldots\cdot s_{pp}.$$

2.3. Пространство $\mathcal{H}$. На группе N^* имеется 2^p орбит группы S максимальной размерности $\dim(S) = p^2$, и их объединение полно в пространтсве N^*. Эти орбиты суть $N^*_\varepsilon = \{s^*\varepsilon s\}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Множество орбит N^*_ε полно по мере $d\nu(m)$ в пространстве N^*, а потому гильбертово пространство H представимо как прямая сумма H_ε подпространств функций $f(m)$, сосредоточенных на N^*_ε:

$$H = \bigoplus_\varepsilon H_\varepsilon.$$

Определение 1. *Обозначим через N^*_0 орбиту $\{is^*s \mid s \in S\}$ и через $\mathcal{H}$ гильбертово подпространство функций, сосредоточенных на этой орбите, с нормой $\|f\|^2 = \int\limits_{N^*_0} |f(m)|\,d\nu(m)$.*

Замечание 1. *Остальные S-орбиты максимальной размерности суть $N^*_\varepsilon = \{s^*\varepsilon s\}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$, $\varepsilon_i = \pm 1$.*

Существует (вообще говоря, не сохраняющий меру) изоморфизм пространств H_ε, перестановочный с действием группы S на этих пространствах.

Рассматриваемые далее представления (групп N, S, P), определенные на всем пространстве H, индуцируют соответствующие представления на пространстве $\mathcal{H}$, заданные теми же формулами, поэтому в

дальнейшем вместо представлений на всем пространстве H мы будем рассматривать представления только на пространстве $\mathcal{H}$.

Можно дать другую реализацию пространства $\mathcal{H}$ в терминах группы S. Для этого заметим, что отображение $S \longrightarrow N^*$ вида $s \mapsto is^*s = m \in N_0^*$ является биекцией пространств, перестановочной с правым умножением на группе S и действием группы S на группе N_0^*.[1] В силу этого изоморфизма пространство $\mathcal{H}$ реализуется как гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = L^2(S, \widetilde{d\nu(s)}),$$

где $\widetilde{d\nu(s)}$ – образ меры $d\nu(m)$ при биекции $N_0^* \longrightarrow S$, то есть как пространство функций на S с нормой $||f||^2 = \int\limits_S |f(s)|\widetilde{d\nu(s)}$. В этой новой реализации операторы представления задаются следующей формулой:

$$T(n)f(s) = \exp(i\mathrm{Tr}(sns^*)f(s);$$

таким образом, как и в первой реализации, эти операторы действуют послойно. Далее эта реализация не используется.

2.4. Описание представлений групп S и P в пространстве $\mathcal{H}$. Унитарное представление группы N в пространстве $\mathcal{H}$ определено формулой

$$T(n)f(m) = \exp(i\mathrm{Tr}\,(nm))f(m).$$

Определить представление группы S, которая действует на N_0^*, можно многими способами, а именно

$$(T(s)f)(m) = \gamma(s,m)f(sms^*),$$

где $\gamma(s,m)$ – произвольный *мультипликативный коцикл группы* S со значениями в пространстве обратимых функций на N_0^*. Стандартный выбор этого коцикла – плотность преобразованной под действием элемента s меры ν по исходной мере. Но мы выберем мультипликативный коцикл группы S позже, а пока пусть $a(s)$ – положительная функция

[1]Это следует из того факта, что положительно определенная эрмитова матрица единственным образом представлется в виде произведения нижнетреугольной матрицы с положительными элементами на главной диагонали на сопряженную с ней матрицу.

на S; зададим пока формально представление группы S следующими формулами:

$$T_a(s_0)f(m) = \frac{a(s_0^* m s_0)}{a(m)} f(s_0^* m s_0). \tag{2}$$

Легко убедиться, что эти операторы образуют формальное представление группы S и что вместе с операторами подгруппы N они порождают формальное представление всей группы P.

Имеет место равенство

$$||T_a(s_0)f||^2 = \int\limits_{N_0^*} |f(m)b(m,s_0)|^2 d\nu(m),$$

где

$$b(m,s_0) = \frac{a(s_0^* m s_0)}{a(m)} \left(\frac{d\nu(s_0^{*-1} m s_0^{-1})}{d\nu(m)} \right)^{1/2}.$$

Следствие 1. 1) *Если* $b(m,s_0) \equiv 1$, *то оператор* T_a *унитарен.*

2) *Если* $|b(m,s_0) < c|$, *то* $||T_a(s_0)f|| < \infty$.

3) *Если ни одно из этих условий не выполнено, то оператор* T_a *неограничен.*

Легко убедиться, что операторы $T(n)$ и $T_a(s_0)$ порождают при любом фиксированном a представление всей группы P. Такие же представления определены аналогичным образом на всех орбитах группы S.

Предложение 1. *Построенные представления в пространстве функций* H_ϵ *на орбитах группы* S *операторно неприводимы и попарно неэквивалентны.*

Действительно, оператор, коммутирующий с операторами представления группы N, должен быть мультипликатором, так как операторы $T(n)$ порождают максимальную коммутативную подалгебру (алгебру всех мультипликаторов), а мультипликатор, коммутирующий со всеми операторами $T_a(\cdot)$, должен быть константой, так как S действует на орбите транзитивно и, следовательно, эргодично в силу локальной компактности орбиты. Представления на разных орбитах, очевидно, неэквивалентны, поскольку орбиты дизъюнктны.

§3. Нетривиальные когомологии коммутативной группы со значениями в ее регулярном представлении

3.1. Общая конструкция. Как известно, у коммутативной локально компактной группы нет неединичных унитарных представлений с нетривиальными 1-когомологиями, однако в регулярном представлении в $L^2(G)$, в котором слабо содержится единичное представление, они есть. Примеры легко построить, и все они основаны на общей идее. Надо взять функцию, локально суммируемую с квадратом, но не принадлежащую $L^2(G)$ из-за неинтегрируемоти на бесконечности; при этом разность ее самой с любым ее сдвигом уже принадлежит $L^2(G)$. Двойственный и, разумеется, эквивалентный подход, который используется далее, состоит в том, чтобы реализовать регулярное представление в $L^2(\widehat{G})$, т.е. на группе характеров, мультипликаторами и искать функцию, имеющую квадратично неинтегрируемую особенность в нуле (единичном характере) и при этом такую, что умножение этой функии на $1-\langle\chi, g\rangle$ возвращает в $L^2(\widehat{G})$ для любого характера χ. Именно последняя идея реализуется ниже для группы N. Разумеется, выбор функции не единствен, более того, имеется континуум попарно не когомологичных между собой коциклов. Тем самым, группы $H^1(G;\mathbb{R})$ или $H^1(G;\mathbb{T})$ бесконечномерны. Что гораздо хуже, группа когомологичных нулю коциклов плотна в группе всех коциклов, поэтому группа когомологий не имеет разумной структуры. В противоположность этому заметим, что для полупростых групп ранга 1 группы $H^1(G;\mathbb{R})$ конечномерные и ненулевые.

3.2. Описание особого представления группы N. Рассмотрим пространство $H = L^2(N^*, dm)$ с действующим на нем унитарным представлением T, где dm – лебегова мера на N^*. Докажем, что существует функция $f_0(m)$, такая, что $f \notin H$, а функция $\beta(n) = T(n)f_0 - f_0$ принадлежит этому пространству, то есть $||b(n)|| < \infty$ для любого $n \in N$. Отсюда будет следовать, что функция $\beta(n)$ является нетривиальным 1-коциклом представления T, то есть представление T особое.

Обозначим $|m|^2 = \mathrm{Tr}\,(mm^*)$ и определим функцию $\beta(n)$ следующим равенством:

$$\beta(n) = T(n)f_0 - f_0, \qquad \text{где} \qquad f_0(m) = \frac{e^{-|m|}}{|m|^{p^2/2}}.$$

Убедимся, что функция f_0 удовлетворяет требуемым условиям. Для этого перейдём в описании функций f_0 и $\beta(n)$ к сферическим координатам на N^*. Примем в качестве сферических координат вектора m пару $r = |m|$ и $\omega = r^{-1}m$. Назовем множество элементов $\omega \in N^*$; таких, что $|\omega| = 1$, сферой на N^* и обозначим это множество через Ω. Таким образом, любой элемент $m \in N^*$ однозначно представим в виде

$$m = r\omega, \quad \text{где } r = |m| \quad \text{и} \quad \omega \in \Omega.$$

В выбранных сферических координатах имеем $dm = dr^{p^2-1}drd\omega$, где $d\omega$ – мера на сфере Ω, а потому

$$||f||^2 = \int |f(r\omega)|^2 r^{p^2-1} drd\omega.$$

В частности, имеем

$$||f_0||^2 = e^{-2r} r^{-1} drd\omega.$$

Отсюда очевидно, что $||f_0|| = \infty$, то есть $f_0 \notin H$. Убедимся, что $||\beta(n)|| < \infty$. В полярных координатах имеем

$$||\beta(n)||^2 = \int |\exp(-ri\mathrm{Tr}\,(n\omega)) - 1|^2 \exp(-2r) r^{-1} drd\omega;$$

поскольку подмодульное выражение равно 0 при $r = 0$, этот интеграл сходится по r, а значит, и по всему пространству. Таким образом, доказано, что $||\beta(n)|| < \infty$, то есть $\beta(n)$ – нетривиальный 1-коцикл. Формулу для нормы функции $\beta(n)$ можно упростить, выполнив интегрирование по r. Согласно известной формуле

$$\int\limits_0^\infty (e^{-ar} - e^{-br}) r^{-1} dr = \log \frac{b}{a}, \tag{3}$$

и мы получаем $||\beta(n)||^2 = \int \log\left(1 + \frac{1}{4}\left(\mathrm{Tr}\,(n\omega)\right)^2\right) d\omega$.

3.3. Особое представление группы $P = S \rtimes N$. Теперь мы выберем нужным образом функцию a, т.е. мультипликативный коцикл группы S. Очевидно, что определенные так представления T_a группы S порождают вместе с исходным представлением группы N представление всей группы Ивасавы P.

Теорема 1. *Операторы $T_a(s_0)$ на группе S вида*

$$T_a(s_0)f(m) = \frac{a(s_0^* m s_0)}{a(m)} f(s_0^* m s_0),$$

где $a(m) = \|m\|^{p^2/2}$, образуют ограниченное особое неунитарное представление группы P.

Доказательство. Как было уже доказано, $||f_0|| = \infty$, поэтому достаточно только убедиться, что для коцикла $\beta(s) = T_a(s)f_0 - f_0$ норма конечна: $||\beta(s)|| < \infty$ для любого $s \in S$. Воспользуемся выражением для элементов m в полярных координатах $m = r\omega$. Из явного выражения для a и T_a следует, что $\dfrac{a(s_0^* m s_0)}{a(m)} = ||s_0^* \omega s_0||^{p^2/2}$ и

$$||\beta(s_0)||^2 = \int \left| |s_0^* \omega s_0|^{p^2/2} \frac{e^{-r|s_0^* \omega s_0|}}{r^{p^2/2}|s_0^* \omega s_0|}^{p^2/2} - \frac{e^{-r}}{r^{p^2/2}} \right|^2 r^{p^2-1} dr d\omega.$$

Полученное выражение упрощается:

$$||\beta(s_0)||^2 = \int |e^{-r|s_0^* \omega s_0|} - e^{-r}|^2 r^{-1} dr d\omega.$$

Выполняя интегрирование по r, согласно формуле (3) получаем следующее выражение для нормы нетривиального 1-коцикла $\beta(s_0)$:

$$||\beta(s_0)||^2 = \int\limits_{\Omega} \log\left(\frac{(1 + |s_0^* \omega s_0|)^2}{4|s_0^* \omega s_0|} \right) d\omega.$$

Сходимость интеграла следует из ограниченности снизу функции $|s_0^* \omega s_0|$. Таким образом, коцикл $\beta(s_0)$ нетривиален, то есть представление T_a группы S особое.

Для доказательства неунитарности представления группы S воспользуемся следующим замечанием: представление T_a группы S является унитарным тогда и только тогда, когда

$$\frac{a(s^* m s)}{a(m)} = \theta^{p^2/2}(s).$$

В самом деле, согласно следствию 1 операторы T_a унитарны тогда и только тогда, когда $c(m, s_0) \equiv 1$. Отсюда непосредственно следует утверждение для случая $p > 1$.

В частном случае $p = 1$ мы имеем $S = \mathbb{R}_+^*$ и $c(m, s_0) \equiv 1$. Таким образом, операторы T_a образуют унитарное представление. Иными словами, при $p = 1$ продолжение особого представления подгруппы N

до унитарного представления всей группы Ивасавы также является особым.

Наконец, отметим, что операторы $T_a(s_0)$ ограничены. В самом деле, из общей формулы следует, что

$$\|T_a(s_0)f(m)\|^2 = \int |f(m)c(m,s_0)|^2\,dm, \tag{4}$$

где $c(m,s_0) = \dfrac{(a\,(m))}{a\left(s_0^{*-1}ms_0^{-1}\right)}\left(\dfrac{ds_0^{*-1}ms_0^{-1}}{dm}\right)^{1/2}$.

Поэтому ограниченность операторов представления при всех p следует из ограниченности функции $c(m,s_0)$. Теорема доказана. □

Следствие 2. *Если $a(m) \neq \|m\|^{p^2/2}$, то формула для $\beta(s_0)$ имеет вид*

$$\|\beta(s_0)\|^2 = \int |b(\omega)e^{-r|s_0^*\omega s_0|} - e^{-r}|^2 r^{-1} dr d\omega,$$

где $b(\omega) \not\equiv 1$. В этом случае подынтегральная функция отлична от нуля при $r = 0$, а потому интеграл по r расходится. Таким образом, $\beta(s_0)$ не является корректно определнным 1-коциклом в пространстве представления.

Вопрос о существовании особых представлений группы P сводится к оценке норм коциклов для подгрупп N и S. Выше было доказано, что при $p > 1$ нетривиальный 1-коцикл β на группе N, ассоциированный с функцией $f_0(m) = \frac{e^{-|m|}}{|m|^{p^2/2}}$, не продолжается до унитарного представления T^0 подгруппы S. Аналогичный результат верен для более широкого класса пленок вида $f_0\,(m) = \frac{u(m)}{|m|^{p^2/2}}$. Мы не останавливаемся на этом, поскольку неизвестно, верно ли это для любых функций. Заметим, что T^0 есть унитарное представление группы P, отвечающее правоинвариантной мере Хаара группы S. Таким образом, если наш вывод верен для любых функций a и f, то будет доказано, что у группы P нет унитарных точных особых представлений. Этот вопрос пока открыт.

Литература

1. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Когомологии в неунитарных представлениях полупростых групп Ли (группа $U(2,2)$).* — Функц. анал. и прил. **48**, вып. 3 (2014), 1–13.

Vershik A. M., Graev M. I. Cohomology of the Iwasawa subgroup of the group $U(p,p)$ in nonunitary representations.

We construct a special injective nonunitary bounded irreducible representation for the Iwasawa subgroup of the semisimple Lie group $U(p,p)$ with $p > 1$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: avershik@gmail.com

Поступило 14 сентября 2015 г.

Институт системных исследований РАН,
пр. Нахимова, д. 36, корп. 1,
117218 Москва, Россия
E-mail: mgraev_36@mtu-net.ru