Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 436, 2015 г.

Б. М. Гуревич

К ИСТОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ: СРАВНЕНИЕ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

§1. Введение

Хорошо известна та огомная роль, которую сыграло в эргодической теории введенное А. Н. Колмогоровым понятие энтропии динамической системы. Оно не только привело к появлению совершенно нового, энтропийного направления теории, но дало новый толчок развитию всех ее направлений, так как привлекло к ним внимание большого числа математиков. Рождение энтропии не обошлось без некоторого драматизма. Первый шаг был сделан А. Н. Колмогоровым в конце 1957 г., когда на одной из своих лекций, читавшихся на механико-математическом факультете МГУ, он ввел энтропию сдвига Бернулли, доказал ее инвариантность относительно метрического изоморфизма и тем самым решил старую проблему эргодической теории, продемонстрировав, что сдвиги Бернулли с разной энтропией неизоморфны. Лекции остались неопубликованными, и судить об их содержании можно лишь по воспоминаниям слушателей [10, 11]. В своей первой публикации [4] Колмогоров ввел важнейшее понятие "квазирегулярной" динамической системы и определил энтропию для таких систем (теперь называемых K-системами, среди которых содержатся и сдвиги Бернулли), но определил совершенно по-новому.

Вскоре, однако, выяснилось (благодаря В. А. Рохлину), что основная теорема в [4] неверна (в ее доказательстве использовалось принятое на веру, но, вообще говоря, неверное утверждение, что для невозрастающей последовательности σ-алгебр $\mathfrak{A}_n$ и фиксированной σ-алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место коммутативность: $\cap_n(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A} \vee \cap_n \mathfrak{A}_n$). Вследствие этого появилась работа [5], где автор представил контрпример Рохлина и дал другое определение энтропии, правда, уже только для систем с дискретным временем (автоморфизмов). Можно сказать, что здесь Колмогоров вернулся к подходу, примененному в его

Ключевые слова: метрическая энтропия, динамическая энтропия, разбиение пространства Лебега, образующее разбиение (образующая), бернуллиевский фактор-автоморфизм.

лекции и основанному на понятии образующей (образующего разбиения). Правда, тогда еще не было известно, у каких автоморфизмов существует конечная образующая или образующая с конечной энтропией или хотя бы счетная образующая. В том же номере журнала, где появилась заметка Колмогорова [5], была опубликована работа его аспиранта Я. Г. Синая [8], где понятие энтропии автоморфизма было определено в духе колмогоровской лекции и [5], но без каких-либо дополнительных ограничений на автоморфизм. Более того, в [8] были указаны технические средства, тут же позволившие вычислить энтропию для ряда содержательных примеров. Определение Синая вскоре стало общепринятым, и именно его имеют в виду, когда говорят о метрической энтропии, динамической энтропии, энтропии Колмогорова–Синая или даже энтропии Колмогорова.

В конце заметки [5] автор отмечает, что идея использовать понятия теории информации для изучения динамических систем содержится без каких-либо конкретных результатов в дипломной работе студента Одесского университета Д. З. Арова, защищенной весной 1957 г. Однако в работе Арова содержалась не только идея, но и определение энтропии (названной автором ε-энтропией). В течение многих лет это определение оставалось неопубликованным, но, даже и появившись в печати в [2], продолжало быть неизвестным специалистам по эргодической теории, так как это была публикация в специализированном журнале, относящемся к другой области математики. Мне оно стало известно от самого Д. З. Арова, которому я чрезвычайно признателен за эту информацию, равно как и А. М. Вершику, благодаря которому наш контакт состоялся; более того, сам вопрос, рассматриваемый в этой заметке, возник по инициативе А.М. при обсуждении с ним истории появления энтропии, и он же убедил меня написать развернутое изложение. Ниже проводится сравнение определений энтропии из [1] и [8]. Результаты оказались различными для эргодических и неэргодических автоморфизмов; первый случай изучен в §2, второй – в §3.

§2. Эргодические автоморфизмы

Обозначения. Будем пользоваться стандартными обозначениями энтропийной теории (см., например, [6, 7]). Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство Лебега с непрерывной мерой, α – его конечное или счетное разбиение на измеримые множества A_i (в дальнейшем – измеримое

разбиение),

$$H(\alpha) := -\sum_i \mu(A_i)\log\mu(A_i)$$

– энтропия этого разбиения, T – автоморфизм пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$,

$$h(T,\alpha) := \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha \vee T\alpha \vee \cdots \vee T^{n-1}\alpha)}{n}$$

– энтропия автоморфизма T относительно α и

$$h(T) := \sup_\alpha h(T,\alpha)$$

– метрическая энтропия автоморфизма T (супремум берется по всем конечным измеримым разбиениям или по всем разбиениям с конечной энтропией – результат будет один и тот же). Все логарифмы, встречающиеся в этом тексте, считаются взятыми по основанию 2. Ниже будет употребляться сокращенное обозначение пространства Лебега: (X, μ).

Определение 2.1. (Аров [1]). Для всякого $\varepsilon \in (0, 1/2]$ введем множество $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ конечных измеримых разбиений $\alpha = (A_1, \ldots, A_n)$ пространства (X, μ), для которых $\mu(A_i) \geqslant \varepsilon$ при всех i. Величина

$$h_\varepsilon(T) := \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}(\varepsilon)} h(T,\alpha)$$

называется *ε-энтропией* автоморфизма T.

Очевидно, $h_\varepsilon(T) \leqslant h(T)$ при всех ε, и, значит, $h_\varepsilon(T) = 0$, как только $h(T) = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть T – эргодический автоморфизм с $h(T) > 0$. Если $\varepsilon \leqslant ([2^{h(T)}] + 1)^{-1}$, то $h_\varepsilon(T) = h(T)$; если выполняется обратное неравенство, то $h_\varepsilon(T) = \log[\varepsilon^{-1}]$. Кроме того, супремум в определении $h_\varepsilon(T)$ можно брать по разбиениям α, все элементы которых имеют меру $[1/\varepsilon]^{-1}$.*

В доказательстве используются два известных утверждения, которые сейчас будут сформулированы.

Предложение 2.3. (Грилленбергер, Кренгель [3]). *Пусть T – эргодический автоморфизм с $h(T) < \infty$ и $p_1, \ldots, p_n$ – распределение вероятностей, для которого*

$$-\sum_{i=1}^n p_i \log p_i > h(T).$$

Тогда найдется такая образующая $\xi = (C_1, \dots, C_n)$, *что* $\mu(C_i) = p_i$ *при* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Замечание 2.4. В [3] содержится более общее утверждение; здесь оно сформулировано для частного случая, который только и будет использоваться в дальнейшем.

Предложение 2.5. (Синай [9]). *Если* $0 < h(T) < \infty$, *то для всякого распределения вероятностей* $p_1, \dots, p_n$, *удовлетворяющего условию* $-\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log p_i \leqslant h(T)$, *найдется измеримое разбиение* $\alpha = (A_1, \dots, A_n)$ *с* $\mu(A_i) = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *для которого* $\{T^m\alpha,\ m \in \mathbb{Z}\}$ – *независимые в совокупности разбиения (существование бернуллиевского фактора).*

Замечание 2.6. С помощью предложения 2.5 можно показать, что аналогичный факт имеет место и при $h(T) = \infty$, а именно: для любого распределения вероятностей $p_1, \dots, p_n$ найдется измеримое разбиение α с теми же свойствами, что и в предложении 2.5. В самом деле, поскольку (X, μ) – сепарабельное пространство, найдется возрастающая последовательность конечных измеримых разбиений α_n, предел которой, т.е. $\vee_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, есть разбиение на отдельные точки $\bmod 0$. Тогда (согласно [7, 9.5]) $\lim\limits_{n\to\infty} h(T, \alpha_n) = h(T) = \infty$. Найдем такое r, что $h(T, \alpha_r) \geqslant -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log p_i$. Так как $h(T, \alpha_r)$ есть энтропия фактор-автоморфизма автоморфизма T по вполне инвариантному разбиению $(\alpha_r)_T := \vee_{i\in\mathbb{Z}} T^i \alpha_r$ и $h(T, \alpha_r) < \infty$, к этому фактор-автоморфизму и распределению $p_1, \dots, p_n$ можно применить предложение 2.5. Это дает разбиение α, элементы которого имеют меры p_i, а образы $T^m\alpha$, $m \in \mathbb{Z}$, независимы; оно и будет искомым.

Введем обозначения

$$k := [1/\varepsilon], \quad \varepsilon_0(T) := ([2^{h(T)}] + 1)^{-1}, \tag{2.1}$$

считая, что $2^\infty = \infty$, $[\infty] = \infty$ и $\infty^{-1} = 0$.

Наряду с множеством $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ (см. определение 2.1) рассмотрим его подмножество $\mathfrak{A}_0(\varepsilon)$, состоящее из разбиений, все элементы которых имеют меру $1/k$ (см. (2.1)).

Возможны два случая: (а) $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(T)$ и (б) $\varepsilon_0(T) < \varepsilon \leqslant 1/2$ (при $h(T) = \infty$ – только случай (б)). Им посвящена следующая лемма, которая понадобится нам не только здесь, но и в §3.

Лемма 2.7. *Пусть T – эргодический автоморфизм пространства (X, μ) и $\varepsilon \in (0, 1/2]$. Тогда*

(а) *если*

$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(T), \tag{2.2}$$

то найдется такое разбиение $\xi \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon)$, $\xi = (C_1, \ldots, C_k)$, что $\mu(C_i) = 1/k$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ и $h(T, \xi) = h(T)$;

(б) *если*

$$\varepsilon_0(T) < \varepsilon \leqslant 1/2, \tag{2.3}$$

то найдется такое разбиение $\xi \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon)$, $\xi = (C_1, \ldots, C_k)$, что $\mu(C_i) = 1/k$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ и $h(T, \xi) = \log [1/\varepsilon]$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай (2.2). Очевидно, что в этом случае $1/\varepsilon \geqslant [2^{h(T)}] + 1$ и, значит,

$$k = [1/\varepsilon] \geqslant [2^{h(T)}] + 1, \quad \log k > h(T).$$

Поэтому к T и распределению вероятностей

$$p_1, \ldots, p_k, \quad p_i = 1/k, \ \ i = 1, \ldots, k, \tag{2.4}$$

применимо предложение 2.3, согласно которому существует такая образующая $\xi = (C_1, \ldots, C_k)$, что

$$\mu(C_i) = 1/k, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Но тогда $h(T, \xi) = h(T)$. При этом $\xi \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon)$, так как $1/k = [1/\varepsilon]^{-1} \geqslant \varepsilon$.

Пусть теперь выполняется (2.3). Тогда $[1/\varepsilon] \leqslant 1/\varepsilon < [2^{h(T)}] + 1$ и, значит,

$$k = [1/\varepsilon] \leqslant [2^{h(T)}] \leqslant 2^{h(T)}$$

(если $h(T) = \infty$, то $k < 2^{h(T)}$). Поэтому к T и распределению вероятностей (2.4) можно применить предложение 2.5, если $h(T) < \infty$, и замечание 2.6, если $h(T) = \infty$, в силу которых найдется такое разбиение $\xi := (C_1, \ldots, C_k)$, что $\mu(C_i) = 1/k$ при всех i и разбиения $T^m \xi$, $m \in \mathbb{Z}$, независимы (т.е. ξ порожает бернуллиевский фактор-автоморфизм). Значит,

$$h(T, \xi) = H(\xi) = \log k = \log [1/\varepsilon].$$

А так как мы уже видели, что $\xi \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon)$, разбиение с требуемыми свойствами существует и в этом случае. $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Существование разбиения ξ, описанного в п. (а) леммы 2.7, означает, что $h_\varepsilon(T) \geqslant h(T)$. Так как, очевидно, $h_\varepsilon(T) \leqslant h(T)$ при всех ε (см. определение 2.1), мы получаем $h_\varepsilon(T) = h(T)$, причем супремум в определении 2.1 можно брать по множеству $\mathfrak{A}_0(\varepsilon)$. Таким образом, для случая (а) утверждение теоремы доказано.

Аналогичным образом, существование разбиения ξ из п. (б) леммы 2.7 означает, что $h_\varepsilon(T) \geqslant \log k$. С другой стороны, если $\eta \in \mathfrak{A}(\varepsilon)$, то η не может иметь больше чем $1/\varepsilon$ элементов. Значит, число элементов этого разбиения, будучи целым, не превосходит $[1/\varepsilon] = k$, а потому $h(T,\eta) \leqslant H(\eta) \leqslant \log k = h(T,\xi)$ и на ξ достигается $\sup_{\eta\in\mathfrak{A}(\varepsilon)} h(T,\eta)$, т.е. $h_\varepsilon(T) = h(T,\xi) = \log[1/\varepsilon]$. Значит, теорема верна и в случае (б). $\square$

Следствие 2.8. *Если T_1, T_2 – эргодические автоморфизмы с $h(T_1) = h(T_2)$, то $h_\varepsilon(T_1) = h_\varepsilon(T_2)$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/2]$. Таким образом, в классе эргодических автоморфизмов энтропия однозначно определяет ε-энтропию при всех ε.*

§3. Неэргодические автоморфизмы

Отказавшись от предположения об эргодичности, покажем, что теперь следствие 2.8 перестает быть верным.

Теорема 3.1. *Существуют неэргодические автоморфизмы S и T, для которых $h(T) = h(S)$, но $h_\varepsilon(T) \neq h_\varepsilon(S)$ при некотором $\varepsilon \in (0, 1/2]$.*

Для доказательства этой теоремы разобьем вероятностное пространство (X, μ) на множества A и B равной меры. Пронормировав ограничение меры μ на каждое из этих множеств, получим вероятностные пространства (X_A, μ_A) и (X_B, μ_B) и определим автоморфизм T пространства (X, μ) условием, что T_A и T_B служат его эргодическими компонентами. Теперь докажем в рассматриваемой ситуации аффинность ε-энтропии.

Предложение 3.2. *При всяком $\varepsilon \in (0, 1/2]$*

$$h_\varepsilon(T) = \frac{h_\varepsilon(T_A) + h_\varepsilon(T_B)}{2}. \tag{3.1}$$

Замечание 3.3. Равенство энтропии автоморфизма среднему по эргодическим компонентам (аффинность) хорошо известно, см. [7]. Вероятно, этим свойством обладает и ε-энтропия, но нам понадобится лишь его частный случай, к которому относится предложение 3.2.

Доказательство. Положим по аналогии с (2.1)

$$\varepsilon_0(T_A) := ([2^{h(T_A)}] + 1)^{-1}, \quad \varepsilon_0(T_B) := ([2^{h(T_B)}] + 1)^{-1}$$

(заметим, что $h(T_A)$ и $h(T_B)$ вычисляются по отношению к мерам μ_A и μ_B соответственно). Не ограничивая общности, можно предположить, что $h(T_A) > h(T_B)$ и, значит, $\varepsilon_0(T_A) < \varepsilon_0(T_B)$ (случай равенства рассмотрим отдельно). Для $\varepsilon \in (0, 1/2]$ возможны три случая:

(i) $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(T_A)$; (ii) $\varepsilon_0(T_A) < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(T_B)$; (iii) $\varepsilon_0(\mathrm{T_B}) < \varepsilon \leqslant 1/2$.

В случае (i), применив п. (a) леммы 2.7 к (X_A, μ_A) и T_A вместо (X, μ) и T, построим образующее по отношению к автоморфизму T_A разбиение $\xi_A = (C_{1,A}, \ldots, C_{k,A})$ пространства X_A, такое, что

$$\mu_A(C_{i,A}) = 1/k, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{3.2}$$

где, как и прежде, $k = [1/\varepsilon]$.

Так как по предположению мы имеем также $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(T_B)$, можно тем же способом получить образующее для автоморфизма T_B разбиение $\xi_B = (C_{1,B}, \ldots, C_{k,B})$ пространства X_B, такое, что

$$\mu_B(C_{i,B}) = 1/k, \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{3.3}$$

Занумеруем произвольным образом элементы разбиений ξ_A, ξ_B и положим

$$\xi = (C_{1,A} \cup C_{1,B}, \ldots, C_{k,A} \cup C_{k,B}). \tag{3.4}$$

Очевидно, $\xi \in \mathfrak{A}(\varepsilon)$, а вследствие аффинности энтропии $h(T, \xi)$ (см. [7]) и того, что ξ_A и ξ_B – образующие для T_A и T_B соответственно, мы получаем

$$h(T, \xi) = \frac{h(T_A, \xi_A) + h(T_B, \xi_B)}{2} = \frac{h(T_A) + h(T_B)}{2} = h(T). \tag{3.5}$$

Следовательно, $h_\varepsilon(T) \geqslant h(T)$ и, значит, $h_\varepsilon(T) = h(T)$ (так как строгое обратное неравенство невозможно). Из теоремы 2.2, примененной к (X_A, μ_A) и T_A, а затем к (X_B, μ_B) и T_B, вытекает, что $h_\varepsilon(T_A) = h(T_A)$, $h_\varepsilon(T_B) = h(T_B)$. Поэтому (3.5) означает, что для случая (i) доказываемое равенство (3.1) справедливо.

Переходя к случаю (ii), определим семейства разбиений $\mathfrak{A}(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{A}_0(\varepsilon, A)$ и $\mathfrak{A}(\varepsilon, B)$, $\mathfrak{A}_0(\varepsilon, B)$ пространств (X_A, μ_A) и (X_B, μ_B) соответственно аналогично тому, как определялись семейства разбиений $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ и $\mathfrak{A}_0(\varepsilon)$ пространства (X, μ). В рассматриваемом случае к (X_A, μ_A) и T_A можно применить п. (б) леммы 2.7, а к (X_B, μ_B) и T_B – п. (а) той же леммы. В результате мы получим разбиения $\xi_A \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon, A)$ и $\xi_B \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon, B)$ пространств X_A и X_B соответственно, такие, что

$$\begin{gathered} \xi_A = (C_{1,A}, \dots, C_{k,A}), \quad \mu_A(C_{i,A}) = 1/k \ (1 \leqslant i \leqslant k), \\ h(T_A, \xi_A) = \log[1/\varepsilon], \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered} \xi_B = (C_{1,B}, \dots, C_{k,B}), \quad \mu_B(C_{i,B}) = 1/k \ (1 \leqslant i \leqslant k), \\ h(T_B, \xi_B) = h(T_B). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Точно так же, как в случае (i), определим разбиение ξ пространства X (см. (3.4)), и снова оно будет принадлежать семейству $\mathfrak{A}_0(\varepsilon)$. Аффинность энтропии $h(T, \xi)$, а также (3.6), (3.7) и теорема 2.2 приводят к соотношениям

$$h(T, \xi) = \frac{h(T_A, \xi_A) + h(T_B, \xi_B)}{2} = \frac{\log[1/\varepsilon] + h(T_B)}{2} = \frac{h_\varepsilon(T_A) + h_\varepsilon(T_B)}{2}.$$

Значит,

$$h_\varepsilon(T) \geqslant \frac{h_\varepsilon(T_A) + h_\varepsilon(T_B)}{2}. \tag{3.8}$$

С другой стороны, возьмем любое разбиение $\eta \in \mathfrak{A}(\varepsilon)$. Число его элементов не может быть больше чем k, а тогда и число элементов разбиений η_A и η_B, которые η индуцирует на A и B соответственно, не превосходит k. Вследствие этого и аффинности энтропии

$$h(T, \eta) = \frac{h(T_A, \eta_A) + h(T_B, \eta_B)}{2} \leqslant \frac{\log[1/\varepsilon] + h(T_B)}{2},$$

откуда, с учетом (3.8) и теоремы 2.2, получаем

$$h_\varepsilon(T) = \frac{\log[1/\varepsilon] + h(T_B)}{2} = \frac{h_\varepsilon(T_A) + h_\varepsilon(T_B)}{2}.$$

Следовательно, равенство (3.1) выполняется и в случае (ii).

В случае (iii) справедливы неравенства

$$\varepsilon_0(T_A) < \varepsilon \leqslant 1/2, \quad \varepsilon_0(T_B) < \varepsilon \leqslant 1/2.$$

Значит, мы находимся в условиях п. (б) леммы 2.7, в силу которой существуют разбиения

$$\xi_A = (C_{1,A}, \dots, C_{k,A}) \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon, A)$$

и

$$\xi_B = (C_{1,B}, \dots, C_{k,B}) \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon, B)$$

пространств (X_A, μ_A) и (X_B, μ_B) соответственно, такие, что

$$\mu_A(C_{i,A}) = \mu_B(C_{i,B}) = 1/k \ (1 \leqslant i \leqslant k), \quad h(T_A, \xi_A) = h(T_B, \xi_B) = \log k.$$

Как и раньше, рассмотрим разбиение $\xi = (C_{1,A} \cup C_{1,B}, \dots, C_{k,A} \cup C_{k,B})$ пространства (X, μ), принадлежащее семейству $\mathfrak{A}_0(\varepsilon)$. Очевидно,

$$h(T, \xi) = \frac{h(T_A, \xi_A) + h(T_B, \xi_B)}{2} = \log k,$$

откуда согласно теореме 2.2 следует, что

$$h_\varepsilon(T) \geqslant \frac{h_\varepsilon(T_A) + h_\varepsilon(T_B)}{2}.$$

Обратно, если $\eta \in \mathfrak{A}_0(\varepsilon)$, то η содержит не более k элементов, а тогда $h(T, \eta) \leqslant \log k$. Таким образом, $h_\varepsilon(T) = \log k = \frac{h_\varepsilon(T_A) + h_\varepsilon(T_B)}{2}$. Значит, соотношение (3.1) доказано и в случае (iii).

В самом начале доказательства мы предположили, что $h(T_A) > h(T_B)$. Пусть теперь $h(T_A) = h(T_B)$. Тогда при $\varepsilon < \varepsilon_0(T_A)$ (что возможно лишь при $h(T_A) < \infty$) как к (X_A, μ_A), T_A, так и к (X_B, μ_B), T_B применим п. (а) леммы 2.7, а при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(T_A)$ к тем же объектам применим п. (б) этой леммы, и проведенные выше рассуждения повторяются дословно. □

Доказательство теоремы 3.1. Подберем эргодические автоморфизмы S_A, T_A и S_B, T_B, первые два из которых действуют на X_A, а остальные два – на X_B.

Предположим, что

$$\begin{aligned} &0 < h(T_B) < h(S_B) < h(S_A) < h(T_A) < \infty, \\ &h(T_B) + h(T_A) = h(S_B) + h(S_A) \end{aligned} \tag{3.9}$$

(существование таких автоморфизмов очевидно), и определим автоморфизмы S и T пространства (X, μ) следующими условиями: S_A и S_B – эргодические компоненты автоморфизма S, а T_A и T_B – эргодические компоненты автоморфизма T.

В силу (3.9) и (2.1)

$$\varepsilon_0(T_A) < \varepsilon_0(S_B) < \varepsilon_0(S_A) < \varepsilon_0(T_B). \tag{3.10}$$

Пусть ε удовлетворяет неравенствам

$$\varepsilon_0(S_B) < \varepsilon < \varepsilon_0(S_A).$$

Тогда по теореме 2.2 и с учетом (3.10)

$$h_\varepsilon(T_A) = h_\varepsilon(S_B) = \log[1/\varepsilon], \quad h_\varepsilon(S_A) = h(S_A), \quad h_\varepsilon(T_B) = h(T_B),$$

откуда следует (см. предложение 3.2), что

$$h_\varepsilon(T) = \frac{\log[1/\varepsilon] + h(T_B)}{2}, \quad h_\varepsilon(S) = \frac{\log[1/\varepsilon] + h(S_A)}{2}.$$

Так как по предположению $h(T_B) < h(S_A)$ (см. (3.9)), мы заключаем, что $h_\varepsilon(T) \neq h_\varepsilon(S)$. Этим завершается доказательство теоремы.

Замечание 3.4. Рассуждая похожим образом, можно построить пример автоморфизмов T, S с $h(T) = h(S)$ и $h_\varepsilon(T) \neq h_\varepsilon(S)$ при некотором ε, из которых один эргодический, а другой неэргодический.

Литература

1. Д. З. Аров, *Теория информации и передачи ее по каналам связи.* Дипломная работа. Одесский государственный университет, 1957.
2. D. Z. Arov, *The influence of V. P. Potapov and M. G. Krein on my scientific work.* — Oper. Theory Adv. Appl. **72** (1994), 1–16.
3. C. Grillenberger and U. Krengel, *On marginal distributions and isomorphisms of stationary processes.* — Math. Z. **149**, No. 2 (1976), 131–154.
4. А. Н. Колмогоров, *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизм пространств Лебега.* — ДАН СССР **119**, No. 5 (1958), 861–864.
5. А. Н. Колмогоров, *Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов.* — ДАН СССР **124**, No. 4 (1959), 754–755.
6. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, М., Наука, 1980.
7. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* — УМН **30**, вып. 2 (1967), 57–128.
8. Я. Г. Синай, *О понятии энтропии динамической системы.* — ДАН СССР **124**, No. 4 (1959), 768–770.
9. Я. Г. Синай, *О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой.* — Мат. сб. **53**, вып. 1 (1964), 23–42.
10. Я. Г. Синай, *Письмо в редацкцию журнала "Успехи математических наук".* — УМН **20**, вып. 4 (1965), 232.
11. Ya. G. Sinai, *Author's comments to the paper "On the notion of entropy of a dynamical system."* — In: Ya. G. Sinai, Selecta, Vol. 1 (2014), pp. 9–10.

Gurevich B. M. Toward the history of dynamical entropy: comparing two definitions.

Two definitions are compared for the measure-theoretic entropy of an automorphism of a Lebesgue space: the commonly known definition suggested in 1959 by Ya. G. Sinai and the definition from the unpublished master thesis by D. Z. Arov (1957). The result is that the two definitions lead to essentially the same object in the class of ergodic automorphisms, while for the nonergodic case the situation is in general different.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи
информации им. А. А. Харкевича РАН,
Москва, Россия
E-mail: bmgbmg2@gmail.com

Поступило 22 сентября 2015 г.