Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 436, 2015 г.

**Д. З. Аров**

# К ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПОНЯТИЯ $\varepsilon$-ЭНТРОПИИ АВТОМОРФИЗМА ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА И ПОНЯТИЯ $(\varepsilon, T)$-ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

## Комментарий А. М. Вершика

Мы публикуем статью профессора Д. З. Арова об истории незаслуженно обойденного исследователями понятия эпсилон-энтропии, введенного им в дипломной работе 1957 года. Кроме того, публикуется статья профессора Б. М. Гуревича о соотношении понятия энтропии Арова и энтропии Колмогорова с современной точки зрения. В течение более чем пятидесятилетнего периода многочисленных успехов эргодической теории и, в частности, одного из центральных ее разделов — энтропийной теории, содержание работы Д. З. Арова, о которой упомянул А. Н. Колмогоров в своей работе, было известно практически только нескольким математикам. Настоящей публикацией мы хотим восполнить этот пробел в истории энтропии.

Открытие энтропии динамических систем А. Н. Колмогоровым — безусловно, одно из самых замечательных открытий математики XX века. Оно родилось благодаря продумыванию им содержания пионерских и основополагающих работ Клода Шеннона по теории информации. В своем неопубликованном курсе лекций, читавшихся в МГУ в середине 1957 года, А.Н., по свидетельству слушателей курса, доказывал неизоморфность схем Бернулли с различной энтропией множества состояний, тем самым решая известную трудную проблему. А в знаменитой работе 1958 года, опубликованной в ДАН, он ввел энтропию как инвариант преобразований с инвариантной мерой в традиционных теоретико-вероятностных терминах, привлекая теорию измеримых разбиений В. А. Рохлина. Последующий гигантский поток работ на эту тему начался с важной статьи Я. Г. Синая, в которой было дано комбинаторное определение энтропии, и с нескольких работ В.

*Ключевые слова*: динамическая система, энтропия автоморфизма и динамической системы, пространство Лебега, шенноновская информация.

А. Рохлина, А. М. Абрамова; все это привело к созданию энтропийной теории динамических систем, оказавшей огромное влияние на многие разделы математики. Об истории энтропии и о новом понятии энтропии (т.н. масштабированной энтропии) упоминается в моей статье в сборнике “Математика XX века. Взгляд из Петербурга” (2010).

Однако за всем этим содержание работы Д. З. Арова, кратко упомянутой во второй заметке А. Н. Колмогорова в ДАН в 1959 г., оставалось неизвестным. Я знал (от автора), что он использовал комбинаторику разбиений, которая стала впоследствии основным инструментом при работе с энтропией. Но дело даже не в соотношении определений Колмогорова, Синая, Арова — я считал, что этот нечастый феномен, когда никому не известный дипломант провинциального университета предвосхищает фундаментальную научную идею, сам по себе заслуживает внимания научной общественности.

В начале 1960-х гг. Д. З. Аров приехал в Ленинград на стажировку к В. А. Рохлину, написал ряд работ по динамическим системам и в конце концов стал хорошо известным специалистом по теории операторов и теории рассеяния, успешно продолжающим исследования своего учителя М. Г. Крейна и его школы. А его пионерская работа по энтропии так никогда и не была опубликована и упоминалась в считанном числе работ (например, в моем предисловии к русскому переводу книги Н. Мартина и Дж. Ингланда “Математическая теория энтропии” (М.: Мир, 1988). Исходя из всего этого, я предложил автору опубликовать в настоящем томе главу из его дипломной работы, посвященную энтропии.

И, конечно, неудивительно, что соотношение между инвариантом Арова и энтропией Колмогорова вплоть до наших дней оставалось невыясненным. В разговорах со мной Д. З. Аров неоднократно поднимал этот вопрос. В публикуемой далее работе Б. М. Гуревича, заинтересовавшегося этим вопросом, дано его исчерпывающее решение. Если отвлечься от деталей, то итог состоит в том, что содержательная часть энтропии Арова совпадает с энтропией Колмогорова. Любопытно, что этот результат Б. М. Гуревича использует серьезные факты из эргодической теории, полученные значительно позже описываемых событий.

А. М. Вершик

## Предисловие

Хотя со времени выполнения дипломной работы автора, выдержки из которой предлагаются читателю, прошло около 60 лет, публикация этих материалов может представить интерес как для изучения истории возникновения понятия энтропии в метрической теории динамических систем, так и для дальнейшего развития этой теории.

Что касается истории, то тема дипломной работы по теории информации была предложена А. А. Бобровым (учеником А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова) после появления работ Хинчина в УМН по теории информации. По счастливому случайному стечению обстоятельств в это время автор прослушал курс лекций Н. И. Гаврилова (ученика И. Г. Петровского) по качественной теории дифференциальных уравнений, включающий, в частности, формулировку теоремы Биркгофа в эргодической теории динамических систем. Знакомство с теорией информации и с понятием эргодической динамической системы привело автора к решению применить шенноновскую энтропию потока к изучению эргодической динамической системы $f(p,t)$, $p \in R$, $t \in (-\infty, \infty)$, в сепарабельном компактном метрическом пространстве $R$ с инвариантной мерой $\mu$, где $\mu(R) = 1$. (В то время я не был знаком с понятием пространства Лебега и другими связанными с ним понятиями, такими как измеримые разбиения $\xi$, их сравнение ($\xi \prec \eta$), произведение $\bigvee \xi_\alpha$ и пересечение $\bigwedge \xi_\alpha$ разбиений $\xi_\alpha$, проблема метрических инвариантов автоморфизмов в метрической теории динамических систем, изложенными, например, во впоследствии ставшей у меня "настольной" работе В. А. Рохлина [6], с которыми следует ознакомиться для понимания связи публикуемой работы с работами по теории автоморфизмов пространства Лебега.) На этом пути в дипломной работе возникло понятие $(\varepsilon, T)$-энтропии $H_{\varepsilon,T}(f,\mu)$ рассматриваемой системы, где $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, $T > 0$, как количественной характеристики степени перемешивания динамической системы. Ей посвящена публикуемая пятая глава дипломной работы.

Так как А. А. Бобров не был специалистом по рассматриваемым вопросам, по его предложению я был командирован в МГУ для консультации с А. Н. Колмогоровым. К сожалению, он в то время был деканом факультета и в связи с этим был занят, так что смог уделить на беседу со мной минут 20–30, после чего представил меня своим ученикам Р. Л. Добрушину и В. М. Алексееву. Через год в Одессе состоялась Всесоюзная конференция по функциональному анализу,

на которой С. В. Фомин представил работу Колмогорова об энтропии, новом метрическом инварианте для динамических систем и автоморфизмов в пространстве Лебега, позднее опубликованную в [4]. После моего заявления, что идея применения понятия энтропии в эргодической теории имеется в моей дипломной работе, С. В. попросил показать её и после знакомства с ней взял её для передачи А. Н. После этого состоялась моя вторая встреча с А. Н. В его квартире мы уже в течение более длительного времени пытались понять, могут ли быть полезными моя $\varepsilon$-энтропия автоморфизма пространства Лебега и $(\varepsilon, T)$-энтропия динамической системы в метрической теории динамических систем. Не придя к позитивному результату, А. Н. сказал, что эта работа для науки уже не представляет интереса, но, если я хочу, он может рекомендовать её как представляющую интерес для тех, кто будет интересоваться историей возникновения понятия энтропии в метрической теории динамических систем. Я тогда отказался от этого предложения. А. Н. сказал, что у него подготовлена новая статья по энтропии, в которой он сошлётся на мою работу, что он и сделал в [5].

Об этой истории возникновения понятия энтропии по Колмогорову, а затем и по Я. Г. Синаю [8] и о связи этих понятий с понятием $\varepsilon$-энтропии $h_\varepsilon(S)$ автоморфизма $S$ пространства Лебега $X$, по существу введённым в неявном виде в предлагаемой пятой главе дипломной работы, несколько более подробно рассказано в статьях автора [1, 2].

На самом деле в дипломной работе вместо пространства Лебега $X$ рассматривается сепарабельное компактное метрическое пространство $R$ с мерой $\mu$, где $\mu(R) = 1$. Рассматриваются множества $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ конечных измеримых разбиений $\xi = \{A_i\}$ пространства $R$ с $\mu(A_i) \geqslant \varepsilon$ при всех $i$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$. В качестве $S$ рассматривается, в частности, $S = f(\cdot, T)$, что соответствует разбиению интервала $(-\infty, \infty)$ на отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ точками $t_i = t_0 + iT$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$, $T > 0$ при $t_0 = 0$. В работе при определении $(\varepsilon, T)$-энтропии, по существу, рассматриваются автоморфизмы, порождённые произвольными $T$-разбиениями интервала $(-\infty, \infty)$ (т. е. разбиениями указанного вида с произвольным выбором $t_0$) и $\xi \in \mathfrak{A}(\varepsilon)$, без учёта свойства стационарности системы. Кроме того, в конце работы высказана ошибочная гипотеза, что эта энтропия не зависит от выбора $T$.

Для сравнения понятия $(\varepsilon, T)$-энтропии $H_{\varepsilon,T}(f,\mu)$, рассматриваемого в публикуемой главе для динамической системы, с понятием $\varepsilon$-энтропии автоморфизма $S$ пространства Лебега $X$, приведём определение последнего. Энтропия $H(\xi)$ конечного измеримого разбиения $\xi = \{A_i\}$ пространства $X$ и энтропия $h(S,\xi)$ автоморфизма $S$ по разбиению $\xi$ определяются формулами

$$H(\xi) = -\sum_i \mu\left(A_i\right) \log_2 \mu(A_i), \quad h(S,\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee\nolimits_0^{n-1} S^k \xi\right),$$

после чего $\varepsilon$-энтропия автоморфизма $S$ определяется по формуле

$$h_\varepsilon\left(S\right) = \sup\left\{h\left(S,\xi\right) : \xi \in \mathfrak{A}(\varepsilon)\right\}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}.$$

Напомним, что энтропия автоморфизма по Синаю определяется на этом же пути, но без рассматриваемого выше $\varepsilon$-ограничения на рассматриваемые разбиения, т. е. по формуле

$$h(S) = \sup\big\{h(S,\xi) \ : \ \xi - \text{произвольные измеримые конечные разбиения пространства } X\big\},$$

так что $h(S) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} h_\varepsilon(S)$. Определение энтропии автоморфизма у Синая возникло в [8] после работы Колмогорова [4], где энтропия определялась лишь для автоморфизмов $S$, для которых существует измеримое разбиение $\zeta$, такое, что $S^{-1}\zeta \prec \zeta$, произведение $\bigvee_0^\infty S^k\zeta$ есть разбиение пространства на точки, а пересечение $\bigwedge_0^\infty S^{-k}\zeta$ есть тривиальное разбиение пространства. Такие разбиения после этой работы стали называть $K$-разбиениями, а автоморфизмы, имеющие $K$-разбиение, стали называть $K$-автоморфизмами. Колмогоров, пользуясь понятием условной энтропии, определил энтропию такого автоморфизма $S$ как условную энтропию $H(\zeta/S^{-1}\zeta)$, ошибочно считая, что доказал независимость последней от выбора $\zeta$. В работе [5] он уточнил своё определение.

В работе [8] Синай показал, в частности, что $h(S) = h(S,\xi)$ для произвольного измеримого конечного образующего разбиения $\xi$, т. е. такого разбиения, что $\bigvee_{-\infty}^\infty S^k\xi$ есть разбиение на точки. Как оказалось, вообще говоря, $H(\zeta/S^{-1}\zeta) \leqslant h(S)$, но если $\zeta = \bigvee_0^\infty S^{-k}\xi$, где $\xi$ – образующее разбиение с конечной энтропией, то $H(\zeta/S^{-1}\zeta) = h(S)$ (эти и другие свойства энтропии см., например, в [7]).

Следует отметить, что в последнее время Б. М. Гуревич [3] получил новые результаты по $\varepsilon$-энтропии автоморфизма пространства Лебега, которые показывают, в частности, что для двух эргодических автоморфизмов с равными конечными энтропиями их $\varepsilon$-энтропии тоже равны при всех рассматриваемых $\varepsilon$ и в то же время существуют два неэргодических автоморфизма с конечными равными энтропиями, но различными $\varepsilon$-энтропиями при некоторых $\varepsilon$. Это доказывает значимость понятия $\varepsilon$-энтропии автоморфизма в метрической теории динамических систем, что окончательно привело автора к решению опубликовать предлагаемую главу дипломной работы (вместе с оглавлением, введением и списком цитированной литературы), причём без изменений, учитывающих указанные выше "проколы" в определении $(\varepsilon, T)$-энтропии $H_{\varepsilon,T}(f,\mu)$ и высказанной ошибочной гипотезы о её независимости от $T$.

Упомянутые выше результаты Б. М. Гуревича были сообщены автору в личной переписке, за что автор ему благодарен, как и А. М. Вершику, инициировавшему эту переписку. Также автор благодарен А. М. Вершику и Б. М. Гуревичу за полезные замечания к предварительному варианту предисловия, которые учтены в окончательном его варианте.

## Литература

1. D. Z. Arov, *The influence of V. P. Potapov and M. G. Krein on my scientific work.* — Oper. Theory Adv. Appl. **72** (1994), 1–16.
2. D. Z. Arov, *My Way in Mathematics: From Ergodic Theory Through Scattering to J-Inner Matrix Function and Passive Linear Systems Theory*, in: Operator Theory, Function Spaces and Applications, IWOTA (2014), Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser, Basel.
3. Б. М. Гуревич, *К истории динамической энтропии: сравнение двух определений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ (2015).
4. А. Н. Колмогоров, *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега.* — ДАН СССР **119**, вып. 5 (1958), 861–863.
5. А. Н. Колмогоров, *Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов.* — ДАН СССР **124**, вып. 4 (1959), 754–755.
6. В. А. Рохлин, *Избранные вопросы метрической теории динамических систем.* — УМН **4**, вып. 2 (1949), 57–128.
7. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* — УМН **22**, вып. 5 (1967), 3–36.
8. Я. Г. Синай, *О понятии энтропии динамической системы.* — ДАН СССР **124**, вып. 4 (1959), 268–271.

Министерство высшего образования СССР
Одесский государственный университет имени И. И. Мечникова
Физико-математический факультет

# Тема: “Теория информации и передачи её по каналам связи”

Дипломная работа
студента V курса
математического отделения
Арова Д. З.

Руководитель кандидат
физико-математических наук
доцент А. А. Бобров

город Одесса
1957 год

## Оглавление


Введение 1
Глава I. Энтропия поля вероятностей и её свойства 7
§1. Определение энтропии поля вероятностей 7
§2. Элементарные свойства энтропии конечных полей вероятностей 10
§3. Энтропия и количество информации 15
§4. Теорема единственности 19
Глава II. Источник информации 28
§1. Передача сообщений по каналам связи 28
§2. Источники с конечным алфавитом и дискретным временем 32
§3. Свойство $E$. Теорема Макмиллана 41
§4. Оценка числа стандартных цепочек 46
Глава III. Каналы и питающие их источники 51
§1. Канал и его свойства 51
§2. Соединение канала с питающим источником 55
§3. Пропускная способность канала. Фундаментальная лемма Фейнстейна 60
Глава IV. Основные теоремы Шеннона 67
§1. Кодирование. Теоремы об оптимальном коде 67
§2. Фундаментальные теоремы Шеннона 81
§3. Обобщение основных теорем Шеннона на случай $T' = T'' \neq T$ 87
Глава V. Применение к эргодической теории динамических систем некоторых результатов, полученных в теории информации 105
§1. Постановка задачи 105
§2. Источник, порождённый динамической системой, которая задана в пространстве с мерой 110
§3. Оценка роста числа стандартных классов различимых дуг. $(\varepsilon, T)$-энтропия динамической системы 117
Цитируемая литература 123


## Введение

Настоящая дипломная работа посвящена одной из самых молодых глав теории вероятностей – теории передачи информации, или статистической теории связи.

Теорию информации считают прикладной главой, ибо её результаты находят применение в общей теории связи [19], радиолокации [17], машинной математике, кибернетике [16, 20] и в других прикладных вопросах.

Однако, как показывают работы последнего времени [10, 11], результаты этой только начавшей развиваться теории могут быть с успехом применены и в чистой математике.

Датой рождения теории информации считают появление ставших классическими работ Клода Шеннона 1947–1948 гг., хотя существенные элементы этой теории возникли раньше (см. [24], гл. 32, 33, [25]).

В работах Шеннона [1, 2]

– вводится понятие энтропии как меры неопределённости, создаваемой конечным полем вероятностей;

– определяется энтропия простого стационарного марковского процесса с конечным числом состояний и доказывается её существование;

– формулируется теорема $E$ для вышеупомянутого процесса в случае его эргодичности;

– даётся оценка числа высоковероятностных последовательностей;

– формулируются две основные теоремы относительно передачи информации в предположении, что источник имеет структуру вышеупомянутого процесса и для передачи употребляется канал с независимыми шумами;

– формулируются теоремы относительно передачи непрерывных сигналов.

После работ К. Шеннона появилось много статей, посвящённых теории информации. Однако Шеннон и его первые последователи, имея целью получение законченных, практически действенных результатов, на первых порах не могли уделить внимание математическим трудностям, возникшим в процессе развития теории информации.

Исследования, имеющие своей целью поставить эту теорию на прочную математическую базу, в настоящее время насчитываются единицами. Здесь прежде всего надо упомянуть работы Макмиллана, Фейнстейна, Хинчина, Розенблат-Рота.

Первой математической работой, посвящённой разработке вопросов теории информации, была работа А. Я. Хинчина, появившаяся в 1953 году [6]. В ней даётся строгая математическая аксиоматика для

введённой Шенноном энтропии конечного поля вероятностей; доказывается теорема Шеннона $E$ и теорема об оценке числа высоковероятностных цепочек; доказывается теорема относительно возможностей сжатия кодированием некоторого текста, имеющего статистическую структуру простой стационарной эргодической цепи Маркова с конечным числом состояний, в текст с тем же числом букв алфавита.

В том же году была опубликована работа Макмиллана [4], в которой определяется энтропия для стационарного стохастического процесса с дискретным временем и конечным числом состояний и доказывается её существование; делается попытка доказательства двух основных теорем Шеннона в довольно широких предположениях.

В 1954 году вышла работа Фейнстейна [5]. В ней предлагается новый подход к доказательству основных теорем Шеннона с помощью леммы, которая играет фундаментальную роль в доказательстве этих теорем. Лемма доказана в предположении независимости источника и канала с независимыми шумами.

В 1956 году была опубликована вторая работа А. Я. Хинчина [7], в которой даётся строгое математическое доказательство теоремы Макмиллана и фундаментальной леммы Фейнстейна. Последняя доказывается в предположении, что источник имеет статистическую структуру стационарного процесса и для передачи употребляется стационарный канал без предвосхищения и с конечной памятью. В этой же работе даётся доказательство двух основных теорем Шеннона в вышеупомянутых предположениях.

В том же году была защищена кандидатская диссертация Розенблат-Ротом [8], в которой показано, что возможно обосновать теорию информации в более общих предположениях, если подчинить источники и каналы условиям: источники $A$ обладают конечной энтропией $H_t(A)$ и свойством высоко- и маловероятностных последовательностей $E_t(A)$; каналы, питаемые источниками $A$, обладают конечной энтропией $H_t(A/B)$ и свойством $E_t(A/B)$.

Дипломная работа написана, в основном, под влиянием работ А. Я. Хинчина [6, 7].

Она состоит из пяти глав. В первой главе определяется энтропия поля вероятностей, рассматриваются элементарные свойства этой величины для конечного поля вероятностей, доказывается теорема единственности (аксиоматическое определение энтропии).

Во второй и третьей главах даётся определение источников с конечным алфавитом и дискретным временем и каналов, которые эти источники питают; формулируются теорема Макмиллана и фундаментальная лемма Фейнстейна; доказывается теорема об оценке роста числа стандартных цепочек источника, обладающего свойством $E$; формулируются некоторые другие теоремы и понятия, характеризующие источники и каналы.

В первых трёх главах сообщаются результаты, имеющиеся в ранее опубликованных работах по теории информации (см. [7, 14, 8, 1]).

Результаты, полученные автором дипломной работы, содержатся в последних двух главах.

В четвёртой главе рассматривается проблема кодирования продукции источника, доказывается теорема относительно оптимальной возможности сжатия текста при его кодировании в текст с другим числом букв алфавита, которая является обобщением аналогичных теорем К. Шеннона и А. Я. Хинчина; формулируются две основные теоремы Шеннона относительно возможности передачи информации через канал с помехами и даётся доказательство аналогичных теорем в более общей формулировке.

В пятой главе ставится определённого рода задача в эргодической теории динамических систем и указывается на принципиальную возможность её решения на основе результатов, полученных в теории информации; вводится понятие $(\varepsilon, T)$-энтропии динамической системы, даётся оценка её роста сверху и ставится задача дать более точную оценку роста $(\varepsilon, T)$-энтропии и доказать её независимость от числа $T$.

## Глава V. Применение к эргодической теории динамических систем некоторых результатов, полученных в теории информации

**§1. Постановка задачи.** Пусть в сепарабельном компактном метрическом пространстве $R$ с конечной инвариантной мерой $\mu$ $(\mu R = 1)$ задана эргодическая динамическая система

$$f(p,t), \quad \text{где} \quad p \in R, \quad -\infty < t < +\infty \quad \text{или} \quad t \in I. \tag{79}$$

Пусть для любого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать конечную совокупность попарно непересекающихся измеримых множеств $A_i \subset R$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ такую, что $\mu A_i \geqslant \varepsilon$ и $R = \sum\limits_{i=1}^{r} A_i$ (предполагается, что $\varepsilon > 0$ такое, что $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – целое $\geqslant 2$).

Совокупность $\{A_i\}_1^r$ назовём конечным $\varepsilon$-разбиением пространства $R$.

**Определение 1.** Точки $p$ и $q$ пространства $R$ назовём неразличимыми относительно его $\varepsilon$-разбиения $\{A_i\}_1^r$, если они принадлежат одному и тому же множеству $A_j \in \{A_i\}_1^r$.

В противном случае будем говорить, что точки $p$ и $q$ различимы.

Дискретную область изменения времени $t$

$$\ldots, t_{-i}, \ldots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots,$$

где $t_{i+1} - t_i = T$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, назовём $T$-разбиением бесконечного интервала $I$.

**Определение 2.** Дуги траекторий $f(p,t)$ и $f(q,t)$, где $p \in R$, $q \in R$, $t_k \leqslant t \leqslant t_l$, $k < l$, будем называть неразличимыми относительно данного $\varepsilon$-разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ и данного $T$-разбиения $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$ интервала изменения времени $I$, если точки этих дуг $f(p,t_i)$ и $f(q,t_i)$ неразличимы при любом $i$, $k \leqslant i \leqslant l$.

В противном случае будем говорить, что дуги различимы.

Аналогично вводятся понятия различимых и неразличимых траекторий.

О ходе неразличимых дуг (траекторий) можно каким-то образом судить, зная поведение лишь одной из них.

О поведении дуги (траектории) можно кое-что сказать, зная поведение её точек в моменты времени $t_j \in \{t_i\}_k^l$ $\left(t_j \in \{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}\right)$.

Чем меньшими будут взяты числа $\varepsilon > 0$ и $T > 0$, которые определяют разбиения пространства $R$ и времени $I$, тем, очевидно, у нас будет лучшее представление о поведении дуг (траекторий) данной динамической системы.

В силу транзитивности понятия различимых дуг (траекторий) множество дуг $f(p,t)$, $p \in R$, $t_k \leqslant t \leqslant t_l$, $k < l$ временной длины $(l-k)T$ (траекторий $f(p,t)$, $p \in R$, $t \in I$) распадается на классы различимых дуг (траекторий) так, что любые две различимые дуги временной длины $(l-k)T$ (траектории) принадлежат различным классам, а любые

две неразличимые дуги временной длины $(l-k)T$ (траектории) принадлежат одному и тому же классу.

Ясно, что с ростом временной длины рассматриваемых дуг число различимых классов будет, вообще говоря, также расти. Но как быстро?

На этот вопрос можно дать ответ, используя результаты теории информации, а именно: теорему Макмиллана и теорему об оценке роста числа стандартных цепочек.

Как именно это можно сделать, будет показано в дальнейшем.

Пусть даны $\varepsilon$-разбиение $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ и $T$-разбиение $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$ интервала $I$.

В связи с построением классов различимых дуг (траекторий) нас будет интересовать не точное расположение точек $f(p,t), p \in R, -\infty < t < +\infty$ в пространстве $R$, а лишь то, какому из множеств $A_i$ разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ эти точки принадлежат.

Пусть дуга $f(p,t)$, где $p \in R$, $t_k \leqslant t \leqslant t_l$, такова, что $f\,(p,t_k) \in A^{(k)}$, $f\,(p,t_{k+1}) \in A^{(k+1)}, \ldots f\,(p,t_l) \in A^{(l)}$, где каждое $A^{(j)}$, $k \leqslant j \leqslant l$ – одно из множеств разбиения $\{A_i\}_1^r$. Ясно, что класс различимых дуг временной длины $(l-k)T$, которому принадлежит рассматриваемая дуга, полностью характеризуется цепочкой $A^{(k)}$, $A^{(k+1)}$, $\ldots$, $A^{(l)}$ множеств разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$.

При фиксированной длине цепочек $(l-k)$ и числа $k$ число различимых цепочек равно $r^{l-k}$, где $r$ – число множеств разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$, то есть с ростом временной длины $(l-k)T$ рассматриваемых дуг $f(p,t)$, где $p \in R$, $t_k \leqslant t \leqslant t_l$, число всевозможных классов различимых дуг растёт как $r^{l-k}$.

Но дело в том, что не каждый из этих классов является действительно возможным и одинаково возможным (по мере $\mu$) для данной динамической системы $f(p,t)$, определённой в данном пространстве $R$ с мерой $\mu$.

Поясним сказанное на примере. Рассмотрим динамическую систему, заданную на торе системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 \tag{80}$$

при иррациональном $\alpha$.

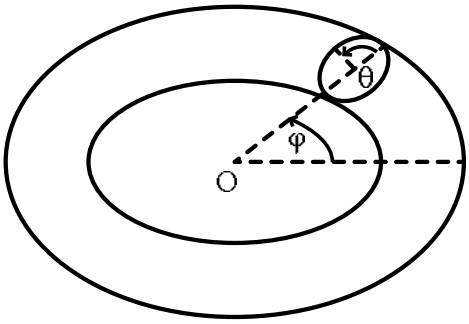


Рис. 1

Здесь пространство $R$ (множество всех точек на поверхности тора) является компактным, сепарабельным и таким, что для любого $\varepsilon > 0$[1] можно указать совокупность непересекающихся множеств $\{A_i\}_1^r$ такую, что $R = \sum\limits_{i=1}^{r} A_i$ и $\mu A_i \geqslant \varepsilon$ (инвариантной мерой $\mu$ может служить "обобщённая площадь" – мера Лебега).

Динамическая система (80), как известно, при иррациональном $\alpha$, является эргодической.

Разбиение пространства $R$ для данного $\varepsilon > 0$ можно производить по-разному.

Рассмотрим два из них: разбиение параллелями и разбиение меридианами и параллелями тора.

Для наглядности произведём разрез поверхности тора по одной из меридиан и параллелей и развернём её (поверхность).

При этом поверхность тора принимает вид прямоугольника (квадрата со сторонами $2\pi \times 2\pi$ или $1 \times 1$), а разбиения поверхности тора параллелями и меридианами и параллелями на четыре равные части ($\varepsilon = \frac{1}{4}$) принимают вид, изображённый на рисунках 2 и 3. Пусть $T$-разбиение $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$ интервала времени $I$ выбрано так, что $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, где $T = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Тогда в случае разбиения $\{A_i\}_1^4$ поверхности тора параллелями на четыре равные части (см. рис. 2) точки $f(p, t_j)$ и $f(q, t_j)$, где $t_j \in$

[1]Здесь опущено условие $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$.

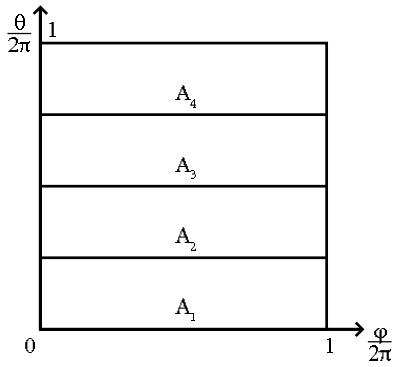


Рис. 2

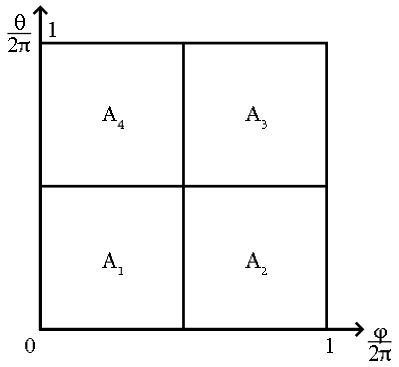


Рис. 3

$\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$, будут неразличимыми, если точки $p$ и $q$ неразличимы, и наоборот. Следовательно, число действительно возможных классов различимых дуг произвольной временной длины $(l-k)\cdot\frac{\pi}{2}$ в рассматриваемом случае равно числу классов различимых точек, то есть четырём, в то время как число всевозможных классов различимых дуг временной длины $(l-k)\cdot\frac{\pi}{2}$ равно $4^{l-k}$.

Значительно сложнее обстоит дело в случае разбиения поверхности тора параллелями и меридианами на четыре равные части (см. рис. 3). Здесь мы ничего определённого о числе классов различимых дуг сказать не можем.

**§2. Источник, порождённый динамической системой, которая задана в пространстве с мерой.** Как было выше показано, класс различимых дуг относительно данных $\varepsilon$-разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ и $T$-разбиения интервала времени $I$ полностью характеризуется цепочкой $A^{(k)}$, $A^{(k+1)}$, …, $A^{(l)}$ множеств разбиения $\{A_i\}_1^r$.

Аналогично, класс различимых траекторий полностью характеризуется двусторонней последовательностью

$$x=\Big(\ldots,A^{(-2)},A^{(-1)},A^{(0)},A^{(1)},A^{(2)},\ldots\Big)$$

множеств $A^{(k)}$ разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ (здесь индекс $k$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$) означает, что точки траекторий, принадлежащие множеству $A^{(k)}$ фиксируются в момент времени $t_k\in\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$).

Совокупность всевозможных таких последовательностей $x$ будем рассматривать как новое пространство $A^I$.

Будем считать, что каждая последовательность $x \in A^I$ является продукцией некоторого источника.

Совокупность множеств $A_i$ разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ составляет алфавит $A$ источника; множества $A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ – буквы алфавита $A$.

Согласно общей концепции определения источника (см. гл. II, §2) нам необходимо задать распределение вероятностей на борелевском замыкании $F_A$ совокупности всевозможных цилиндров пространства $A^I$, для чего достаточно задать вероятности всех цилиндров $Z_A$ пространства $A^I$.

Зафиксируем последовательность целых чисел $i_1, i_2, \ldots, i_m$ и последовательность $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ букв алфавита $A$.

Множество всех последовательностей $x \in A^I$, у которых $A^{(i_1)} = A_{i_1}, A^{(i_2)} = A_{i_2}, \ldots, A^{(i_m)} = A_{i_m}$, называется цилиндрическим множеством, или цилиндром, пространства $A^I$ (см. гл. II, §2).

Рассмотрим множество всех точек $p$ пространства $R$ таких, что одновременно

$$f(p, t_{i_1}) = A_{i_1}, \quad f(p, t_{i_2}) = A_{i_2}, \ldots, f(p, t_{i_m}) = A_{i_m},$$

где $A_{i_k} \in \{A_i\}_1^r$, $t_{i_k} \in \{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Очевидно, это множество точек $p \in R$ есть просто пересечение множеств

$$f\left(A_{i_1}, -t_{i_1}\right) \cdot f\left(A_{i_2}, -t_{i_2}\right) \ldots f\left(A_{i_m}, -t_{i_m}\right),$$

где $f\left(A_{i_k}, -t_{i_k}\right)$ – множество точек $f\left(q, -t_{i_k}\right)$ таких, что $q \in A_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Назовём такое множество точек $p \in R$ цилиндрическим множеством, или цилиндром, пространства $R$.

Множества $f\left(A_{i_k}, -t_{i_k}\right)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ измеримы относительно инвариантной меры $\mu$ (так как множества $A_{i_k} \in \{A_i\}_1^r$ предполагаются измеримыми и $\mu\left(A_{i_k}, -t_{i_k}\right) = \mu\left(A_{i_k}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant m$) и, следовательно, любой цилиндр $Z_R$ пространства $R$, являющийся пересечением конечного числа измеримых множеств, является измеримым множеством, то есть существует мера $0 \leqslant \mu Z_R \leqslant 1$ (предполагается, что $\mu R = 1$).

Таким образом, каждому цилиндру $Z_A$ пространства $A^I$ соответствует цилиндр $Z_R$ пространства $R$ и наоборот.

Создаётся возможность задать вероятность $\mu$ произвольного цилиндра $Z_A$ пространства $A^I$ равенством

$$\mu Z_A = \mu Z_R,$$

где $Z_R$ – цилиндр пространства $R$, соответствующий цилиндру $Z_A$.

Определённая таким образом вероятность удовлетворяет всем аксиомам поля вероятностей, ибо им удовлетворяет мера $\mu$.

Рассмотрим борелевское замыкание $F_A$ совокупности цилиндров пространства $A^I$.

Заданием распределения вероятностей $\mu(Z)$ всевозможных цилиндров $Z$ пространства $A^I$ однозначно определяется распределение вероятностей $\mu(S)$ для всех $S \in F_A$ (см. [12, стр. 25]).

Итак, произведена полная математическая характеризация источника, порождённого данной динамической системой

$$f(p,t), \quad p \in R, \quad , -\infty < t < +\infty$$

$\varepsilon$-разбиением $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ с инвариантной мерой $\mu$ и $T$-разбиением интервала изменения времени $I$, а именно: нам известен алфавит $A$ источника и распределение вероятностей $\mu(S)$ для всех $S \in F_A$. При этом, очевидно, $\mu\left(A^I\right) = \mu R = 1$.

Обозначим рассматриваемый источник через $[A, \mu]$.

**Теорема 1.** *Источник $[A, \mu]$ является стационарным.*

**Доказательство.** Пусть $T^*$ – оператор "сдвига" на время $T$, так что, если

$$x = \left(\ldots, A^{(-2)}, A^{(-1)}, A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots\right),$$

где $A^{(k)} \in \{A_i\}_1^r$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, индекс $k$ означает, что буква $A^{(k)}$ фиксируется в момент времени $t_k \in \{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$, $t_{i+1} - t_i = T$, то

$$T^*x = \left(\ldots, A^{1(-2)}, A^{1(-1)}, A^{1(0)}, A^{1(1)}, A^{1(2)}, \ldots\right),$$

где $A^{1(k)} = A^{(k-1)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $T^*S$ есть множество всех последовательностей $T^*x$ таких, что $x \in S$, где $S \in F_A$.

Напомним, что источник $[A, \mu]$ называется стационарным, если для любого $S \in F_A$

$$\mu\left(T^*S\right) = \mu(S).$$

Для доказательства стационарности источника $[A, \mu]$ достаточно доказать, что для любого цилиндра $Z \subset A^I$ будем иметь

$$\mu\left(T^*Z\right) = \mu(Z)$$

(так как если $S \in F_A$, то $S$ – соединение конечного либо счётного числа цилиндров $Z \subset A^I$).

Последнее равенство имеет место, если $\mu$ – инвариантная мера относительно данной динамической системы $f(p,t)$, $p \in R$, $t \in I$.

Действительно, пусть $Z$ – произвольный цилиндр пространства $A^I$, определяемый условием

$$A^{(i_1)} = A_{i_1}, A^{(i_2)} = A_{i_2}, \ldots, A^{(i_m)} = A_{i_m}.$$

Как было ранее установлено, вероятность этого цилиндра равна мере

$$\mu\left\{f\left(A_{i_1}, -t_{i_1}\right) \cdot f\left(A_{i_2}, -t_{i_2}\right) \ldots f\left(A_{i_m}, -t_{i_m}\right)\right\},$$

последняя же в силу инвариантности меры $\mu$ относительно данной динамической системы равна мере

$$\begin{aligned}\mu\left\{f\left(A_{i_1}, -t_{i_1} - T\right) \cdot f\left(A_{i_2}, -t_{i_2} - T\right) \ldots f\left(A_{i_m}, -t_{i_m} - T\right)\right\} \\ = \mu\left\{f\left(A_{i_1}, -t_{i_1+1}\right) \cdot f\left(A_{i_2}, -t_{i_2+1}\right) \ldots f\left(A_{i_m}, -t_{i_m+1}\right)\right\},\end{aligned}$$

а это не что иное, как вероятность цилиндра $T^*Z$, определяемого условием

$$A^{1(i_1+1)} = A_{i_1}, A^{1(i_2+1)} = A_{i_2}, \ldots, A^{1(i_m+1)} = A_{i_m}.$$

Таким образом, для любого цилиндра $Z \in A^I$ имеет место равенство $\mu\left(T^*Z\right) = \mu(Z)$, а значит $\mu\left(T^*S\right) = \mu(S)$ для любого $S \in F_A$, то есть показано, что источник $[A, \mu]$ является стационарным, что и требовалось доказать. □

**Теорема 2.** *Источник $[A, \mu]$ является эргодическим.*

*Предполагается, что данная динамическая система $f(p,t)$, $p \in R$, $t \in I$ является эргодической.*

**Доказательство.** Для доказательства теоремы достаточно показать, что источник $[A, \mu]$ отражает цилиндры $Z_A \subset A^I$, то есть для произвольного цилиндра $Z_A \subset A^I$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_{Z_A}\left(T^{*k}x\right) = \mu Z_A$$

почти для всех $x \in A^I$ (здесь $g_{Z_A}(x)$ – характеристическая функция цилиндра $Z_A$) (см. гл. II, §2, стр. 40-41).

Пусть $Z_A = \left\{A^{(i_1)} = A_{i_1}, A^{(i_2)} = A_{i_2}, \ldots, A^{(i_m)} = A_{i_m}\right\}$ – произвольный цилиндр пространства $A^I$.

Ему соответствует цилиндр

$$Z_R = f\left(A_{i_1}, -t_{i_1}\right) \cdot f\left(A_{i_2}, -t_{i_2}\right) \ldots f\left(A_{i_m}, -t_{i_m}\right)$$

пространства $R$ такой, что $\mu Z_A = \mu Z_R$.

Множество всех последовательностей $x = \left(\ldots, A^{(-1)}, A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots\right)$, для которых не существует точки $p_x \in R$ такой, что

$$\ldots, f\left(p_x, t_{-1}\right) \in A^{(-1)}, f\left(p_x, t_0\right) \in A^{(0)}, f\left(p_x, t_1\right) \in A^{(1)}, \ldots,$$

имеет вероятность, равную нулю (согласно заданию распределения вероятностей на $F_A$), так что почти для всех $x \in A^I$ (по вероятности) существуют соответствующие точки $p_x \in R$.

Ясно, что если $x \in Z_A$, то $p_x \in Z_R$ и наоборот (здесь $Z_R$ – цилиндр пространства $R$, соответствующий цилиндру $Z_A \subset A^I$).

Для последовательности $T^{*k}x \in A^I$ соответствующей точкой $p_{T^{*k}x} \in R$ может служить точка $f(p_x, kT) \in R$, так что, если $T^{*k}x \in Z_A$, то $f(p_x, kT) \in Z_R$ и наоборот, то есть

$$g_{Z_A}\left(T^{*k}x\right) = g_{Z_R}\left(f(p_x, kT)\right), \tag{81}$$

где $g_{Z_R}$ – характеристическая функция цилиндра $Z_R \subset R$.

По эргодической теореме Биркхоффа (см. [23, стр. 162–167] почти для всех точек $p_x \in R$ (в смысле меры $\mu$) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_{Z_R}\left(f(p, kT)\right) = \mu Z_R. \tag{82}$$

Учитывая равенства (81) и (82) и то, что $\mu Z_A = \mu Z_R$ почти для всех $x \in A^I$ (по вероятности), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_{Z_A}\left(T^{*k}x\right) = \mu Z_A, \tag{83}$$

где $Z_A$ – произвольный цилиндр пространства $A^I$. Следовательно, источник $[A, \mu]$ отражает любой цилиндр $Z_A \subset A^I$, что и требовалось показать. Теорема доказана. □

Таким образом, источник $[A, \mu]$, порождённый эргодической динамической системой $f(p, t)$, $p \in R$, $t \in I$ $\varepsilon$-разбиением $\{A_i\}_1^r$ компактного сепарабельного пространства $R$ с инвариантной мерой $\mu$, $\mu R = 1$ и $T$-разбиением $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$ интервала изменения времени $I$, является стационарным и эргодическим.

**§3. Оценка роста числа стандартных классов различимых дуг. $(\varepsilon, T)$-энтропия динамической системы.** Так как рассматриваемый источник $[A, \mu]$ стационарный, то он обладает конечной энтропией

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{n},$$

где $H_n = \sum\limits_C \mu(C) \log_2 \mu(C)$, суммирование ведётся по всевозможным цепочкам (цилиндрам)

$$(C) \quad A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n-1)}$$

букв алфавита $A$,

$$\mu(C) = \mu\left\{f\left(A^{(0)}, -t_0\right) \cdot f\left(A^{(1)}, -t_1\right) \ldots f\left(A^{(n-1)}, -t_{n-1}\right)\right\}.$$

Назовём величину $H$ энтропией динамической системы $f(p,t)$, $p \in R$, $t \in I$ при данной инвариантной мере $\mu$, данных $\varepsilon$-разбиении $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ и $T$-разбиении $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$ интервала изменения времени $I$.

Она, очевидно, зависит не только от чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$, но и от выбора разбиений $\{A_i\}_1^r$ и $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$.

Стационарный источник $[A, \mu]$ является эргодическим, а потому по теореме Макмиллана (см. гл. II, §3, стр. 45) он обладает свойством $E$, то есть для наперёд заданных как угодно малых чисел $\eta > 0$ и $\delta > 0$ можно указать такое число $N_{\eta,\delta} > 0$, что при $n > N_{\eta,\delta}$ все $n$-членные цепочки $(C)$ разбиваются на две группы:

1) высоковероятностную группу цепочек $(C)$, для которых

$$\left|\frac{\log_2 \mu(C)}{n} + H\right| < \eta;$$

2) маловероятностную группу цепочек, сумма вероятностей которых меньше $\delta$.

Если теперь учесть, что

$$\mu(C) = \mu\left\{f\left(A^{(0)}, -t_0\right) \cdot f\left(A^{(1)}, -t_1\right) \ldots f\left(A^{(n-1)}, -t_{n-1}\right)\right\}$$

и что класс различимых дуг $f(p,t)$, $p \in R$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{n-1}$ полностью характеризуется цепочкой $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n-1)}$, то в результате можно сформулировать следующую теорему:

Для любых как угодно малых наперёд заданных чисел $\eta > 0$ и $\delta > 0$ существует такое число $N_{\eta,\delta} > 0$, зависящее от $\eta > 0$ и $\delta > 0$, что при

$n > N_{\eta,\delta}$ все классы $K$ различимых дуг $f(p,t)$, $p \in R$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{n-1}$ можно разбить на две группы:

1) "высокомерную" группу, для классов $K$ которой справедливо неравенство

$$\left|\frac{\log_2 \mu K}{n} + H\right| < \eta;$$

2) "маломерную" группу классов, сумма мер которых меньше $\delta$.

Под мерой класса мы здесь понимаем меру множества начальных точек $p \in R$, образующих этот класс, то есть

$$\mu K = \mu\left\{f\left(A^{(0)}, -t_0\right) \cdot f\left(A^{(1)}, -t_1\right) \dots f\left(A^{(n-1)}, -t_{n-1}\right)\right\}.$$

Стационарный источник $[A, \mu]$ обладает свойством $E$ и потому для него справедлива теорема, дающая оценку роста числа стандартных цепочек (см. гл. II, §4, стр. 47):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 N_n(\lambda)}{n} = H. \tag{84}$$

Для нас она означает следующее.

Рассмотрим совокупность всевозможных классов $K$ различимых дуг $f(p,t)$, $p \in R$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{n-1}$. Расположим эти классы в порядке убывания их мер. Будем теперь отбирать классы $K$ в порядке их расположения до тех пор, пока сумма мер отобранных классов впервые не превзойдёт числа $\lambda$, где $(1-\lambda)$ – наперёд заданное как угодно малое число такое, что $0 < \lambda < 1$.

Назовём таким образом отобранные классы стандартными и обозначим их число через $N_n(\lambda)$. Тогда имеет место равенство (84). Именно этот результат представляет наибольший интерес в исследованиях настоящей главы.

Взяв $\lambda$ достаточно близким к 1, мы в числе $N_n(\lambda)$ стандартных классов будем иметь почти все (в смысле меры) классы различимых дуг $f(p,t)$, $p \in R$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{n-1}$. При этом $N_n(\lambda) = 2^{n(H+\varepsilon_n)}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Таким образом, если не учитывать классы, сумма мер которых достаточно мала, то число действительно возможных классов растёт как $2^{nH}$ с ростом временной длины $t_{n-1} - t_0 = (n-1)T$ рассматриваемых дуг. Если теперь учесть, что в большинстве встречающихся случаев $H < \log_2 r$, где $r$ – число множеств в разбиении $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$

(вообще $H \leqslant \log_2 r$, см. гл. II, §3, стр. 44), то мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n - 2^{nH}}{2^{nH}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n\log_2 r} - 2^{nH}}{2^{nH}} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{n(\log_2 r - H)} - 1\right) = +\infty,$$

то есть число действительно возможных классов различимых дуг при достаточно большой временной длине дуг составляет лишь ничтожную часть числа $r^n$ всевозможных классов.

Это подтверждается примером, рассмотренным в §1 настоящей главы и изображённым на рисунке 2, где с ростом $n$ число всевозможных классов различимых дуг было равно $4^n$, в то время как число действительно возможных классов не зависело от $n$ и равнялось 4. В этом примере, очевидно, $H = 0$.

Зная, к какому классу различимых дуг принадлежит та или иная дуга, мы тем самым кое-что узнаём о поведении этой дуги, причём узнаём, очевидно, тем больше, чем больше число действительно возможных классов. Последнее же при достаточно большой временной длине $(n-1)T$ рассматриваемых дуг зависит от $H$ (растёт как $2^{nH}$) и тем больше, чем больше величина $H$.

Таким образом, в наших интересах рассматривать такие $\varepsilon$-разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ и $T$-разбиения $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$ интервала изменения времени $I$, чтобы энтропия $H$ была как можно больше близка к величине

$$H_{\varepsilon,T}\left[f(p,t),\mu\right] = \sup H, \tag{85}$$

где верхняя грань берётся по всевозможным $\varepsilon$-разбиениям $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ и $T$-разбиениям $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$ интервала $I$ при фиксированных числах $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ и определённой инвариантной мере $\mu$.

Назовём величину $H_{\varepsilon,T}\left[f(p,t),\mu\right]$ $(\varepsilon, T)$-энтропией динамической системы $f(p,t)$, заданной в пространстве $R$ с конечной инвариантной мерой $\mu$ такой, что $\mu R = 1$.

Так как для произвольных $\varepsilon$-разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ и $T$-разбиения интервала $I$ имеем: $\mu A_i \geqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $A_i \cdot A_j = 0$ при $i \neq j$, $\sum\limits_{i=1}^{r} A_i = R$, $\mu R = 1$ и $H \leqslant \log_2 r$, то

$$1 = \mu R = \mu \sum_{i=1}^{r} A_i = \sum_{i=1}^{r} \mu A_i \geqslant \varepsilon \cdot r,$$

то есть $r \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ и, следовательно, $H \leqslant \log_2 r \leqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, а потому

$$H_{\varepsilon,T}\left[f(p,t),\mu\right] \leqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \tag{86}$$

то есть при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon, T)$-энтропия динамической системы растёт не быстрее, чем $\log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Желательно дать более точную оценку её роста при $\varepsilon \to 0$, подобно тому, как это сделано А. Н. Колмогоровым для $\varepsilon$-энтропии некоторых пространств (см. [11]).

Характерно, что оценка (86) для $H_{\varepsilon,T}$ не зависит от величины числа $T$.

Так как энтропия $H$ источника $[A,\mu]$ измеряет количество информации, которое мы в среднем получаем при посылке источником одного символа, то $H_{\varepsilon,T}\left[f(p,t),\mu\right]$ измеряет максимальное количество информации о траектории динамической системы $f(p,t)$, $p \in R$, $t \in I$, которое мы в среднем можем получить, когда узнаём, в каком из множеств некоторого $\varepsilon$-разбиения $\{A_i\}_1^r$ пространства $R$ находится точка траектории в один из моментов времени, взятый из некоторого $T$-разбиения $\{t_i\}_{i>-\infty}^{i<+\infty}$ интервала $I$.

В связи с этим я предполагаю, что $H_{\varepsilon,T}\left[f(p,t),\mu\right]$ не зависит от величины числа $T > 0$. Однако это надо доказать.

## Цитируемая литература


1. C. E. Shannon. A mathematical theory of communications. Univ. of Illinois Press, 1949, 3–89.
2. C. E. Shannon. Some topics in information theory. Congress of Math. Cambridge, 1950.
3. C. E. Shannon. General treatment of the problems of coding. Proc. Sump. London, 102 (1950).
4. B. McMillan. The basic theorem of information theory. Ann. Math. Statistics 24, 2 (1953), 196–219.
5. A. Feinstein. A new basic theorem of information theory. Trans. I. R. E. PGIT (1954), 2–22.
6. А. Я. Хинчин. Понятие энтропии в теории вероятностей. УМН, VIII, вып. 3 (55), 1953, 3–20.
7. А. Я. Хинчин. Об основных теоремах теории информации. УМН, XI, вып. 1 (67), 1956, 17–75.
8. Р. М. Розенблат. Понятие энтропии в теории вероятностей и его применение в теории передачи информации по каналам связи. (Кандидатская диссертация. Кабинет математики МГУ)
9. А. Н. Колмогоров. Теория передачи информации. Изд. АН СССР, Москва, 1956.

10. А. Н. Колмогоров. Оценки минимального числа элементов $\varepsilon$-сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных. УМН, X, вып. 1 (63), 1955, 192.
11. А. Н. Колмогоров. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств. ДАН СССР, 1956, 108, 3, 385–388.
12. А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. СНТИ НКТП, СССР, 1936.
13. И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. М. Яглом. К общему определению количества информации. ДАН СССР, 111, 4, 745–748.
14. Д. К. Фаддеев. К понятию энтропии конечной вероятностной схемы. УМН, XI, вып. 1 (67), 1956, 227–231.
15. А. А. Юшкевич. О предельных теоремах, связанных с понятием энтропии цепей Маркова. УМН, VIII, вып. 5 (57), 1953, 177–180.
16. М. В. Келдыш, А. А. Ляпунов, М. Р. Шура-Бура. Математические вопросы теории счётных машин. Вестник АН СССР, 11, 1956, 16–37.
17. Ф. М. Вудворд. Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации. Советское радио, Москва, 1955.
18. А. А. Харкевич. Очерки общей теории связи. Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, Москва, 1955.
19. М. П. Долуханов. Введение в теорию передачи информации по электрическим каналам связи. Связьиздат, Москва, 1955.
20. Автоматы. Сборник статей под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, Москва, 1956.
21. П. Халмош. Теория меры. Москва, ИЛ, 1953.
22. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. Москва, ИЛ, 1948.
23. Э. Хопф. Эргодическая теория. УМН, IV, вып. 1 (29), 1949, 113–181.
24. Г. Крамер. Математические методы статистики. Москва, 1948.
25. R. V. Hartley. Bell Syst. Techn. Journ., 1928, 7, 535.

Arov D. Z. To the history of the appearance of the notion of $\epsilon$-entropy of an authomorphism of a Lebesque space and $(\epsilon, T)$-entropy of a dynamical system with continuous time.

The article is devoted to the master thesis on "information theory" written by the author in 1956–57. The topic was suggested by his advisor A. A. Bobrov (a student of A. Ya. Khinchin and A. N. Kolmogorov), and the thesis was written under the influence of lectures by N. I. Gavrilov (a student of I. G. Petrovskii) on the qualitative theory of differential equations, which included the statement of Birkhoff's theorem for ergodic dynamical systems. In the thesis, the author used the concept of Shannon entropy in the study of ergodic dynamical systems $(f(p,t), p)$ in a separable compact metric space $R$ with an invariant measure $\mu$ (where $\mu(R) = 1$) and introduced the concept of the $(\epsilon, T)$-entropy of a system as a quantitative

characteristics of the degree of mixing. In the work, not only partitions of $R$ were considered, but also partitions of the interval $(-\infty, \infty)$ into subintervals of length $T > 0$. In particular, $f(p, T)$ was considered as an automorphism $S$ of $X = R$, and the $(\epsilon, T)$-entropy is essentially the $\epsilon$-entropy of $S$.

But, despite some "oversights" in the definition of the $(\epsilon, T)$-entropy and many years that have passed, the author decided to publish the corresponding chapter of the thesis in connection with the following: 1) There is a number of papers that refer to this work in the explanation of the history of the concept of Kolmogorov's entropy. 2) Recently, B. M. Gurevich obtained new results on the $\epsilon$-entropy $h_\epsilon(S)$, which show that for two ergodic automorphisms with equal finite entropies their $\epsilon$-entropies also coincide for all $\epsilon$, but, on the other hand, there are unexpected nonergodic automorphisms with equal finite entropies, but different $\epsilon$-entropies for some $\epsilon$. This shows that the concept of $\epsilon$-entropy is of scientific value.

Южно-украинский
национальный педагогический университет,
Одесса, Украина
*E-mail*: arov_damir@mail.ru

Поступило 14 сентября 2015 г.