

В. Е. Аксенов, К. П. Кохась

УДАЛЕНИЕ ЧИПОВ ПРИ ПОДСЧЕТЕ ПФАФФИАНОВ

1. Введение. Пусть G – произвольный связный (неориентированный) граф. Зададим произвольную ориентацию его ребер. В этой заметке мы предлагаем комбинаторную технику для вычисления пфаффиана $\text{Pf}(G)$, которая обобщает трюк “Urban Renewal” Куперберга и Проппа, применяемый при подсчете паросочетаний графа, и технику вырезания чипа при подсчете определителей, развитую авторами в [1]. И то, и другое – вариации на тему приведения матрицы к блочно-диагональному виду, правда, имеющие прозрачные комбинаторные истолкования.

Для вычисления пфаффиана $\text{Pf}(G)$ мы вводим специальную операцию – *вырезание чипа*. Под *чипом* H мы подразумеваем практически произвольный индуцированный подграф графа G с четным числом вершин. Вершины чипа, из которых ведет ребро наружу (в остальную часть графа G), и сами эти ребра будем называть *наружными*, а вторые концы этих ребер назовем *контактами* (на которые крепится чип). Удалив из графа G чип H и все его наружные ребра, мы сразу же выполняем “ремонт” оставшегося графа, добавляя перемычки (т.е. ребра с весами) между контактами. Расположение и вес перемычек зависят от чипа. Обозначим через G' граф, полученный удалением из графа G чипа H с последующим ремонтом. Основное свойство операции удаления чипа, ради которого она применяется, состоит в том, что

$$\text{Pf}(G) = \text{Pf}(H) \text{Pf}(G').$$

Во втором параграфе мы приводим необходимые сведения о пфаффианах и описываем общую схему удаления чипа в терминах матрицы смежности графа, В третьем параграфе мы описываем удаление чипа в терминах пфаффианов. В четвертом приводим примеры подсчета числа паросочетаний графов вида $G \times P_n$ с помощью техники удаления чипа. Как следствие мы получаем утверждение о разложении на

Ключевые слова: пфаффиан, число паросочетаний, графическая конденсация.

множители числа паросочетаний прямоугольника. В пятом параграфе мы применяем эту технику для графов на шестиугольной решетке и описываем замечательный граф – “змею Арнольда”, количество паросочетаний которого задается числами Эйлера и Бернулли.

2. Общая схема удаления чипа. Нам потребуется перейти на уровень технического определения пфаффиана. Приведем сводку известных фактов и определений; подробное изложение можно прочесть в статье Фулмека [6].

1) Пусть дан треугольный набор чисел $W = (w_{ij})_{1 \leq i < j \leq 2n}$. Пусть $\mu = \{(i_1, i_2), \dots, (i_{2n-1}, i_{2n})\}$ – произвольное разбиение множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ на пары (в каждой паре мы сначала пишем меньшее число, а потом большее). Тогда по определению знак $\text{sgn}(\mu)$ – это знак перестановки $(i_1 i_2 i_3 i_4 \dots i_{2n-1} i_{2n})$, вес $w(\mu)$ задается формулой $w_{i_1, i_2} w_{i_3, i_4} \dots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}$, а пфаффиан $\text{Pf } W$ равен $\sum \text{sgn}(\mu) w(\mu)$, где суммирование идет по всем разбиениям μ множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ на пары.

2) В предыдущем определении вместо множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$, очевидно, можно взять любое другое упорядоченное множество с четным числом элементов. Пусть $\mu = \{(i_1, i_2), \dots, (i_{2n-1}, i_{2n})\}$ – произвольное разбиение множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ на пары, а разбиение μ' получается из μ удалением одной пары (i_k, i_{k+1}) и сдвигом нумерации. Тогда $\text{sgn } \mu = (-1)^{i_k + i_{k+1} + 1} \text{sgn } \mu'$.

3) Пусть теперь G – произвольный граф с четным числом вершин, вершины пронумерованы числами от 1 до $2n$. Пусть для каждого ребра (v_i, v_j) задан вес w'_{ij} . Можно считать, что G – это полный граф на $2n$ вершинах, а “ненужные” ребра имеют вес 0. Зададим на ребрах графа G произвольную ориентацию и построим по ней кососимметрическую матрицу смежности $\tilde{A}(G) = (w_{ij})$. Таким образом, $w_{ij} = \pm w'_{ij}$ в зависимости от ориентации ребра $v_i v_j$. В качестве набора W возьмем верхнетреугольную часть матрицы $\tilde{A}(G)$. Положим по определению $\text{Pf}(G) = \text{Pf } \tilde{A}(G) = \text{Pf } W$.

4) Имеет место соотношение (теорема Кэли)

$$\det \tilde{A}(G) = (\text{Pf } \tilde{A}(G))^2. \quad (1)$$

Доказательство состоит в построении биекции между слагаемыми вида $\text{sgn}(\sigma) \cdot \alpha_{1, \sigma(1)} \alpha_{2, \sigma(2)} \dots \alpha_{2n, \sigma(2n)}$, составляющими определитель, и парами паросочетаний $\text{sgn}(\mu) w(\mu) \text{sgn}(\nu) w(\nu)$, возникающими при перемножении сумм, составляющих пфаффианы в правой части. При

построении этой биекции мы всегда можем считать, что множитель $\alpha_{i,\sigma(i)}$ относится к первому из пфаффианов.

В силу формулы Кэли (1) вычисление пфаффиана графа сводится к вычислению определителя кососимметрической матрицы смежности. Мы приспособим технику вырезания чипа для подсчета определителей, развитую в статье авторов [1], к задачам о вычислении пфаффианов.

Пусть дан граф G . Чип H – это произвольный индуцированный подграф графа G с четным числом вершин. Вершины чипа, из которых ведет ребро наружу (в остальную часть графа G), будем называть *наружными* вершинами, а вторые концы этих ребер назовем *контактами* (на которые крепится чип).

Пусть теперь на графе G (и на чипе) задана некоторая ориентация ребер. Типичной ситуацией является задание на графе пфаффиановой ориентации. Кососимметрическую матрицу смежности графа G будем обозначать через $\tilde{A}(G)$. Пусть чип H содержит h вершин и k контактов; рассмотрим матрицу смежности $\tilde{A}(G)$ в блочном виде:

$$\tilde{A}(G) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(H) & K & 0 \\ -K^\top & L & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где K – блок $h \times k$, отвечающий за присоединение чипа к оставшемуся графу, L – блок $k \times k$, задающий ребра графа G , соединяющие контакты (он может быть нулевым), а звездочками обозначены элементы, отвечающие за остальные ребра вне чипа. Домножение слева на матрицу $D = \begin{pmatrix} \tilde{A}(H) & 0 & 0 \\ K^\top \tilde{A}(H)^{-1} & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$ не меняет определитель, следовательно,

$$\det \tilde{A}(G) = \det D \cdot \det \tilde{A}(G) = \det \begin{pmatrix} \tilde{A}(H) & K & 0 \\ 0 & \tilde{L} & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = \det \tilde{A}(H) \cdot \det \begin{pmatrix} \tilde{L} & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{L} = L + K^\top \tilde{A}(H)^{-1} K. \quad (3)$$

Изменения, которые произошли с блоком L , мы истолковываем как “ремонт” или “установку заплаток”, т.е. проведение дополнительных ребер между контактами. Веса этих ребер указаны в матрице

$$K^\top \tilde{A}(H)^{-1} K.$$

Граф, полученный в результате ремонта, обозначим G' . Матрица $\begin{pmatrix} \tilde{L} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ – это в точности кососимметрическая матрица смежности отремонтированного графа $\tilde{A}(G')$. Таким образом,

$$\det \tilde{A}(G) = \det \tilde{A}(H) \cdot \det \tilde{A}(G'),$$

и по теореме Кэли

$$\text{Pf } \tilde{A}(G) = \pm \text{Pf } \tilde{A}(H) \cdot \text{Pf } \tilde{A}(G').$$

3. Применение к пфаффианам и паросочетаниям. В этом параграфе мы опишем в комбинаторных терминах веса заплаток, появляющихся при вырезании чипов (теорема 3.3).

Пусть G – произвольный граф с четным числом вершин; в частности, мы не предполагаем, что граф G двудольный. Пусть в графе G задана ориентация ребер, и пусть $\tilde{A}(G)$ – кососимметрическая матрица смежности графа G , соответствующая этой ориентации. Будем считать, что вершины графа G пронумерованы, и пусть $\alpha_{k\ell}$ – матричные элементы матрицы $\tilde{A}(G)$, заданные в соответствии с этой нумерацией. Обозначим через G_{ij} ориентированный граф, полученный из G удалением вершин v_i и v_j , а через \tilde{G}_{ij} граф, который получается из графа G удалением исходящих ребер i -й вершины и входящих ребер j -й вершины. Пусть \tilde{A}_{ij} – матрица, получающаяся из матрицы $\tilde{A}(G)$ вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Лемма 3.1. $|\det \tilde{A}_{ij}| = |\text{Pf } \tilde{A}(G) \text{Pf } \tilde{A}(G_{ij})|$.

Доказательство. Обозначим через \tilde{A}_{ijji} матрицу, получающуюся из матрицы $\tilde{A}(G)$ вычеркиванием i -го и j -го столбца, а также i -й и j -й строки. Воспользуемся тождеством конденсации Доджсона:

$$\det \tilde{A}(G) \det \tilde{A}_{ijji} = \det \tilde{A}_{ii} \det \tilde{A}_{jj} - \det \tilde{A}_{ij} \det \tilde{A}_{ji}.$$

В этом равенстве $\det \tilde{A}_{ij} = -\det \tilde{A}_{ji}$ в силу кососимметричности матрицы $\tilde{A}(G)$, а $\det \tilde{A}_{ii} = \det \tilde{A}_{jj} = 0$, поскольку это кососимметрические матрицы нечетного порядка. Выражая определители в левой части через пфаффианы по формуле (1), получаем требуемое. \square

В следующей теореме мы уберем модули в утверждении леммы 3.1.

Теорема 3.2. При $i < j$ выполняется равенство

$$\det \tilde{A}_{ij} = -\text{Pf } \tilde{A}(G) \text{Pf } \tilde{A}(G_{ij}).$$

Доказательство. Запишем определитель $\det \tilde{A}_{ij}$ в виде

$$(-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det \tilde{A}_{ij} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{1,\sigma(1)} \alpha_{2,\sigma(2)} \cdots \alpha_{2n,\sigma(2n)},$$

где суммирование ведется по всем элементам симметрической группы S_{2n} , для которых $\sigma(i) = j$ (и таким образом каждое слагаемое в правой части содержит множитель α_{ij}). Пользуясь биекцией из доказательства теоремы Кэли, мы можем переписать эту сумму в виде

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{1,\sigma(1)} \alpha_{2,\sigma(2)} \cdots \alpha_{2n,\sigma(2n)} = \sum_{\mu, \nu} (\operatorname{sgn}(\mu) \cdot w(\mu)) \cdot (\operatorname{sgn}(\nu) \cdot w(\nu)),$$

причем можно считать, что в каждом слагаемом правой части множитель α_{ij} , соответствующий ребру $v_i v_j$, содержится в паросочетании μ . Пусть μ' – паросочетание графа G_{ij} , получающееся удалением ребра $v_i v_j$ из μ . Очевидно, любое паросочетание графа G_{ij} получается этим способом из подходящего (и однозначно определенного) паросочетания μ , и $\operatorname{sgn} \mu = (-1)^{i+j+1} \operatorname{sgn} \mu'$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu, \nu} (\operatorname{sgn}(\mu) \cdot w(\mu)) \cdot (\operatorname{sgn}(\nu) \cdot w(\nu)) \\ &= \sum_{\mu', \nu} (-1)^{j+i+1} \alpha_{ij} (\operatorname{sgn}(\mu') w(\mu')) \cdot (\operatorname{sgn}(\nu) \cdot w(\nu)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det \tilde{A}_{ij} = (-1)^{j+i+1} \alpha_{ij} \sum_{\mu', \nu} (\operatorname{sgn}(\mu') w(\mu')) \cdot (\operatorname{sgn}(\nu) \cdot w(\nu)).$$

Сокращая на $(-1)^{i+j} \alpha_{ij}$, получаем требуемое. \square

Теорема 3.3. Пусть $B = (b_{ij}) = \tilde{A}(G)^{-1}$. Тогда матрица B кососимметрическая и при $i < j$

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\operatorname{Pf} \tilde{A}(G_{ij})}{\operatorname{Pf} \tilde{A}(G)}.$$

Доказательство. В силу кососимметричности $\det \tilde{A}_{ij} = -\det \tilde{A}_{ji}$. Тогда по формулам Крамера и по теореме 3.2

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{\det \tilde{A}_{ji}}{\det \tilde{A}(G)} \\ &= (-1)^{i+j} \frac{\text{Pf } \tilde{A}(G_{ij}) \text{ Pf } \tilde{A}(G)}{(\text{Pf } \tilde{A}(G))^2} = (-1)^{i+j} \frac{\text{Pf } \tilde{A}(G_{ij})}{\text{Pf } \tilde{A}(G)}. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Для плоских двудольных графов известно, что если v_i и v_j – соседние вершины, то элемент b_{ij} матрицы, обратной к матрице Кастелейна, по модулю равен вероятности того, что случайное замощение содержит доминошку $v_i v_j$ (см. [7]). Это утверждение является частным случаем доказанной теоремы.

Теперь мы можем описать технику вырезания чипа в терминах пфаффианов. Для простоты будем считать, что каждая наружная вершина чипа присоединена лишь к одному контакту. Кроме того, будем считать, что нумерация вершин графа G такова, что *все вершины чипа имеют меньшие номера, чем остальные вершины графа*.

Теорема 3.4. Пусть имеется чип H с наружными вершинами $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$, которые крепятся соответственно к контактам $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}$. Пусть $i_r < i_s$, и пусть вес заплатки между вершинами v_{j_r} и v_{j_s} задается формулой

$$w(v_{j_r} v_{j_s}) = (-1)^{i_r+i_s} w_{i_r j_r} w_{i_s j_s} \frac{\text{Pf } \tilde{A}(H \setminus \{v_{i_r}, v_{i_s}\})}{\text{Pf } \tilde{A}(H)}. \quad (4)$$

Тогда имеют место тождества

$$\det(\tilde{A}(G)) = \det(\tilde{A}(H)) \cdot \det(\tilde{A}(G')) \quad \text{и} \quad \text{Pf}(\tilde{A}(G)) = \text{Pf}(\tilde{A}(H)) \cdot \text{Pf}(\tilde{A}(G')).$$

Отметим, что формула (4) фактически задает матричный элемент $\tilde{A}(G')_{j_r, j_s}$ кососимметрической матрицы смежности $\tilde{A}(G')$. Таким образом, эта формула описывает также и ориентацию, которую следует приписать ребрам-заплаткам (эта ориентация, впрочем, зависит от того, хотим ли мы считать вес положительным или отрицательным).

Доказательство. Утверждение сразу следует из общей схемы вырезания чипа (3). Запишем матрицу $\tilde{A}(G)$ в блочной форме (2), и пусть $(b_{ij}) = \tilde{A}(H)^{-1}$. Так как $i_r < j_r$, элемент α_{j_r, i_r} , находящийся в блоке K^T , равен $-w_{i_r j_r}$. А поправка, рассчитанная по формуле (3), равна

$w_{i_r j_r} w_{i_r j_s} b_{i_r i_s}$. Вычисляя $b_{i_r i_s}$ по теореме 3.3 и пользуясь формулой (1), получаем формулу с определителями.

Извлекая корень с помощью формулы Кэли (1), получаем

$$\text{Pf}(\tilde{A}(G)) = \pm \text{Pf}(\tilde{A}(H)) \cdot \text{Pf}(\tilde{A}(G')).$$

Проверим, что в равенстве имеет место знак плюс. Зафиксируем паросочетание графа G , представляющее собой объединение паросочетаний чипа H и остального графа $G \setminus H$. Припишем каждому ребру этого паросочетания большой положительный вес W (бóльший, чем количество паросочетаний графа G), а остальным ребрам единичные веса. Тогда достаточно проверить, что во взвешенной сумме паросочетаний знаки слагаемых левой и правой части, соответствующих выбранному паросочетанию, совпадают.

Пусть паросочетание содержит ребра $(i_1, i_2), \dots, (i_{2k-1}, i_{2k})$, принадлежащие чипу H , и ребра $(j_1, j_2), \dots, (j_{2m-1}, j_{2m})$, принадлежащие его дополнению; в силу условия на нумерацию вершин чипа $i_p < j_q$ для всех p и q . По определению знак слагаемых пфаффиана $\text{Pf} \tilde{A}(H)$ равен произведению знака перестановки $\text{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_{2k-1}, i_{2k})$ и знаков весов, навязанных нам выбором ориентации графа; этот знак равен $(-1)^{s(H)}$, где $s(H)$ – это количество ребер среди $(i_1, i_2), \dots, (i_{2k-1}, i_{2k})$, которые направлены от вершины с большим номером к вершине с меньшим номером; аналогично вычисляются знаки для других обсуждаемых графов. Но очевидно, что

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_{2k-1}, i_{2k}) \cdot (-1)^{s(H)} \cdot \text{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_{2m-1}, j_{2m}) \cdot (-1)^{s(G \setminus H)} \\ &= \text{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_{2k-1}, i_{2k}, j_1, j_2, \dots, j_{2m-1}, j_{2m}) \cdot (-1)^{s(G)}, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое утверждение. \square

Замечание. В случае, когда граф имеет пфаффову ориентацию (эта ориентация является также пфаффовой и для чипа), мы получаем, что

$$M(G) = \pm M(H) \text{Pf}(G').$$

Это равенство обобщает результат Чуку [4] об общей форме графической конденсации для пфаффианов.

Приведем пример применения этой техники. Кроме использования обычного обозначения $M(G)$ будем обозначать количество паросочетаний графа символом $\#$, за которым следует схематическое изображение этого графа.

Теорема 3.5. Пусть прямоугольный чип $2n \times 2m$ присоединен к графу с помощью лишь четырех контактов, которые соединены с угловыми вершинами чипа. Обозначим через G' граф, получающийся из G в результате удаления этого чипа и соединения контактов по циклу (см. рис. 1), с весами ребер

$$x' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad y' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad w' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad z' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}.$$

Тогда

$$M(G) = \# \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot M(G').$$

Эта теорема доказана авторами в [1] с помощью построения биективного соответствия между паросочетаниями. Поскольку конструкция опирается на метод графической конденсации Куо, существенным обстоятельством является то, что чип представляет собой плоский двудольный граф, в котором диагонально противоположные контакты относятся к разным долям. Это ограничение приводит к тому, что количество паросочетаний фигуры $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ равно нулю. На языке теоремы 3.4 это означает, что при удалении такого чипа не возникнет диагональных заплаток A_1C_1 и B_1D_1 . Что же касается остальной части графа G , никаких ограничений нет – этот граф может не быть двудольным и не иметь пфаффово ориентации. Но если граф G все же имеет пфаффову ориентацию, то указанная теорема является прямым следствием теоремы 3.4 и веса заплаток фактически задаются формулой (4).

4. Примеры вида $G \times P_m$. Мы будем постоянно использовать в примерах числа Фибоначчи f_n , где $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, а



Рис. 1. Удаление четырехконтактного чипа $2n \times 2m$ при подсчете паросочетаний.

также числа Пелля (последовательность A000129 в OEIS):

$$p_1=1, p_2=2, p_{n+1}=2p_n+p_{n-1}, p_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \right). \quad (5)$$

Лемма 4.1. 1) Пусть последовательность x_n задана начальным значением x_0 и рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0.$$

Тогда $x_n = \frac{U_{n+1}(x_0/2)}{U_n(x_0/2)}$.

2) Имеют место равенства

$$f_m = (-i)^{m-1} U_{m-1}(i/2), \quad p_m = (-i)^{m-1} U_{m-1}(i).$$

3) Последовательности, заданные начальными условиями

$$x_1 = y_1 = 1$$

и рекуррентными соотношениями

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad y_{n+1} = 2 + \frac{1}{y_n}, \quad n \geq 0,$$

могут быть заданы явными формулами $x_n = f_{n+1}/f_n$, $y_n = p_{n+1}/p_n$.

Доказательство. 1) Полиномы Чебышева второго рода U_m удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению

$$U_{m+1}(x) = 2xU_m - U_{m-1}(x), \quad U_0 = 1, \quad U_1 = 2x. \quad (6)$$

Записав x_0 в виде $x_0 = \frac{U_1(x_0/2)}{U_0(x_0/2)}$, благодаря этому соотношению мы сразу получаем нужную формулу.

2) Благодаря соотношениям (6) нетрудно видеть, что последовательности $(-i)^{m-1} U_{m-1}(i/2)$, $(-i)^{m-1} U_{m-1}(i)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям и начальным условиям для чисел Фибоначчи и чисел Пелля.

3) Очевидно. \square

Пример 4.1. Найдем количество паросочетаний графов $W_4 \times P_{m-1}$ и $K_4 \times P_{m-1}$, где граф W_4 – это 4-цикл с одной диагональю, а K_4 – полный граф на 4 вершинах. Оба графа не двудольные и не плоские, но допускают пфаффову ориентацию (рис. 2; тот же рисунок задает пфаффову ориентацию графа $W_4 \times P_{m-1}$, если рассматривать его как подграф в $K_4 \times P_{m-1}$).

Теорема 4.2. 1) *Количество паросочетаний графа $W_4 \times P_{m-1}$ равно $M(W_4 \times P_{m-1}) = f_m p_m$.*

2) *Количество паросочетаний графа $K_4 \times P_{m-1}$ равно*

$$M(K_4 \times P_{m-1}) = U_m\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)U_m\left(\frac{-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Первое утверждение теоремы доказано в [9]. Последовательности, описанные в теореме, – это A001582 и A005386 из OEIS. При четном m выражение $|U_m(\frac{i\sqrt{3}}{2})|$ является целым, а при нечетном m выражение $|\sqrt{3}U_m(\frac{i\sqrt{3}}{2})|$ является целым. Таким образом, число $M(K_4 \times P_{m-1})$ имеет вид n^2 или $3n^2$ в зависимости от четности числа m . Мы докажем теорему с помощью техники вырезания чипов.

Доказательство. Будем последовательно удалять чипы

$$H_1 = A_1 B_1 C_1 D_1, \quad H_2 = A_2 B_2 C_2 D_2 \quad \text{и т. д.}$$

Каждый очередной чип H_n , $n \geq 2$ (вместе с заплатками от удаления предыдущего чипа), представляет собой полный граф K_4 . Рассмотрим одну операцию удаления чипа. Пусть веса ребер чипа и следующего

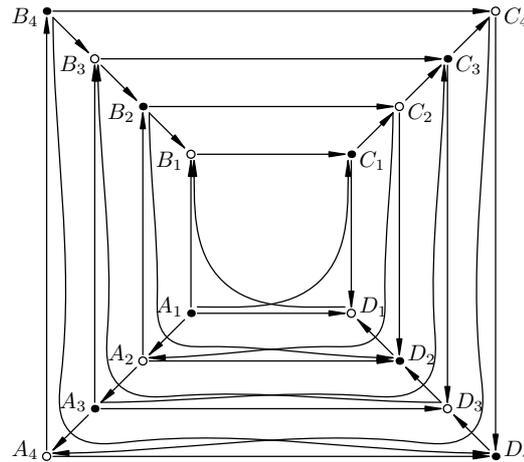
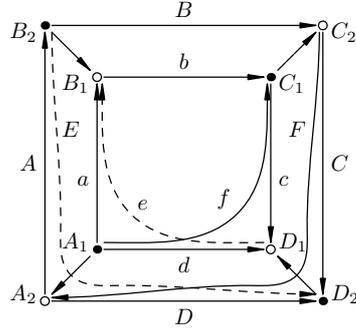


Рис. 2. Пфаффовая ориентация графа $K_4 \times P_n$.

Рис. 3. Удаление чипа из графа $K_4 \times P_2$.

“слоя” в графе заданы как на рис. 3 (веса немеченных ребер считаем равными 1). Тогда после удаления чипа веса изменяются по правилу

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + \frac{c}{\Delta}, & \tilde{B} &= B + \frac{d}{\Delta}, & \tilde{C} &= C + \frac{a}{\Delta}, \\ \tilde{D} &= D + \frac{b}{\Delta}, & \tilde{E} &= E + \frac{f}{\Delta}, & \tilde{F} &= F + \frac{e}{\Delta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Delta = ac + bd + ef = M(H)$. Кстати, то, что в этих формулах присутствуют только знаки “плюс”, является косвенным доказательством того, что рассматриваемая ориентация пфаффа.

Рассмотрим матрицы

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & a & f & d \\ -a & 0 & b & -e \\ -f & -b & 0 & c \\ -d & e & -c & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & -c & -e & -b \\ c & 0 & -d & f \\ e & d & 0 & -a \\ b & -f & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь K — это матрица, отвечающая за присоединение контактов чипа H_1 на рис. 3, $S_0 = \tilde{A}(H_1)$. В соответствии с общей схемой удаления чипа правило пересчета весов (7) кодируется матричными элементами

матрицы S_0^{-1} ; но, поскольку “схема подключения контактов” – матрица K – является диагональной и при этом не зависит от S_0 , эти матричные элементы расположены на “правильных” местах, но с неправильными знаками. Положим

$$S_n = S_0 - S_{n-1}^{-1}, \quad n \geq 1; \quad B_n = \begin{cases} S_n, & \text{если } n \text{ четно,} \\ -K^\top(S_n)K, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Мы утверждаем, что $B_n = \tilde{A}(S_{n+1})$ при $n \geq 0$. При $n = 0$ это утверждение тривиально, при $n = 1$ имеем

$$B_1 = -K^\top(S_1)K = -K^\top(S_0 - S_0^{-1})K = -K^\top(S_0)K + K^\top(S_0^{-1})K.$$

Здесь матрица $-K^\top(S_0)K$ есть в точности кососимметрическая матрица весов слоя $A_2B_2C_2D_2$, а матрица $K^\top(S_0^{-1})K$ – это матрица заплаток, описывающая слагаемые-дроби в (7) (знаки матричных элементов теперь согласованы с ориентацией ребер слоя $A_2B_2C_2D_2$). Таким образом, $B_1 = \tilde{S}(H_2)$.

На следующем слое $A_3B_3C_3D_3$ кососимметрическая матрица слоя опять равна S_0 . По общей схеме удаления чипа получаем

$$\tilde{A}(H_3) = S_0 + K^\top(B_1^{-1})K = S_0 - (-K^\top B_1 K)^{-1} = S_0 - S_1^{-1} = S_2 = B_2.$$

Таким образом, при $n = 2$ получаем, что $B_2 = \tilde{A}(H_3)$.

Последующие удаления чипов при нечетном n происходят аналогично случаю $n = 1$, а при четном – аналогично случаю $n = 2$.

Возвращаясь к вычислению числа паросочетаний $M(W_4 \times P_{m-1})$, возьмем веса ребер $a = b = c = d = f = 1$, $e = 0$. Матрица S_0 , заданная этими весами, имеет собственные числа $\pm i$, $\pm 2i$. Заметим, что $S_n = U_{n+1}(S_0/2)U_n(S_0/2)^{-1}$ по лемме 4.1. Тогда $\det B_n = \det S_n = \frac{\det U_{n+1}(S_0/2)}{\det U_n(S_0/2)}$ и

$$\begin{aligned} M(W_4 \times P_{m-1}) &= \text{Pf}(W_4 \times P_{m-1}) = \sqrt{\det B_0 \cdot \det B_1 \cdot \dots \cdot \det B_{m-2}} \\ &= \sqrt{\det U_{m-1}(S_0/2)}. \\ &= \sqrt{U_{m-1}(i/2)U_{m-1}(-i/2)U_{m-1}(i)U_{m-1}(-i)} = f_m p_m. \end{aligned}$$

Для графа $K_4 \times P_{m-1}$ возьмем веса ребер $a = b = c = d = f = e = 1$. Матрица S_0 , заданная этими весами, имеет собственные числа $\pm i\sqrt{3}$ кратности 2. Аналогично получаем

$$M(K_4 \times P_{m-1}) = \sqrt{\det U_{m-1}(S_0/2)} = U_m\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)U_m\left(\frac{-i\sqrt{3}}{2}\right). \quad \square$$

Пример 4.2. Найдем количество паросочетаний цилиндров $C_N \times P_m$, где N четно, и прямоугольников $P_{2k} \times P_{m-1}$. Как обычно, через $T_m(x)$ и $U_m(x)$ будем обозначать полиномы Чебышева первого и второго рода, а через p_m число Пелля (5). Нам понадобится пара лемм.

Лемма 4.3. Пусть $N = 2k$ – четное число; рассмотрим матрицы

$$R_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Тогда 1) спектр матрицы R_N – это числа $2 \cos \frac{\pi \ell}{N+1}$, $\ell = 1, \dots, N$;

2) спектр матрицы B_N при $N = 4k + 2$ – это числа $2i \cos \frac{2\pi \ell}{4k+2}$, $\ell = 0, 1, \dots, 4k + 1$, $i = \sqrt{-1}$;

3) спектр матрицы B_N при $N = 4k$ – это числа $2i \cos \frac{(2\ell+1)\pi}{4k}$, $\ell = 0, 1, \dots, 4k - 1$.

Доказательство. Эти факты хорошо известны и легко проверяются. Характеристический полином матрицы B_N равен $(-1)^{N/2} \cdot 2T_N(\frac{i\pi}{2}) + 2$, этим объясняются различия в случаях 2) и 3). \square

Пусть

$$K_{k,m} = \left| \prod_{\ell=1}^k U_{m-1} \left(i \cos \frac{\pi \ell}{2k+1} \right) \right|.$$

Ниже мы покажем (см. теорему 4.7), что $K_{k,m}$ – натуральное число.

Теорема 4.4. 1) Количество паросочетаний цилиндра $C_{4k+2} \times P_{m-1}$ представимо в виде

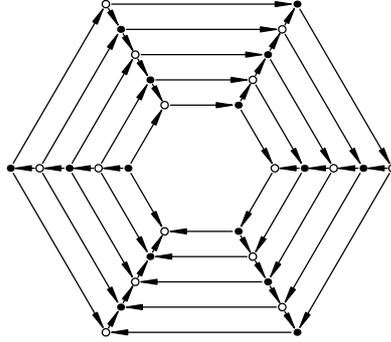
$$M(C_{4k+2} \times P_{m-1}) = p_m K_{k,m}^2.$$

2) Количество паросочетаний цилиндра $C_{4k} \times P_{m-1}$ представимо в виде

$$M(C_{4k} \times P_{m-1}) = \left(\prod_{\ell=0}^{k-1} U_{m-1} \left(i \cos \frac{(2\ell+1)\pi}{4k} \right) \right)^2.$$

3) Количество паросочетаний цилиндра $P_{2k} \times P_{m-1}$ представимо в виде

$$M(P_{2k} \times P_{m-1}) = K_{k,m}.$$

Рис. 4. Пфаффовая ориентация цилиндра $C_{2k} \times P_n$.

Доказательство. 1), 2) Граф $C_N \times P_m$ двудольный; раскрасим его вершины в два цвета. Воспользуемся пфаффовой ориентацией, изображенной на рис. 4. Как и в предыдущем примере, будем последовательно вырезать из графа чипы H_n , каждый из которых – это цикл C_N вместе с заплатками, возникшими из-за предыдущего вырезания. В качестве первого вырезаемого чипа H_0 возьмем крайний цикл C_N . Кососимметрическая матрица смежности N -цикла в обозначениях формулы (8) имеет вид

$$A_0 = \tilde{A}(C_N) = B_N;$$

пусть $A_n = \tilde{A}(H_n)$ – кососимметрическая матрица смежности очередного чипа, т. е. N -вершинного графа, который находится на краю цилиндра после выполнения n шагов.

Рассмотрим подробнее чип H_n . Веса его ребер складываются из единичных весов цикла C_N и заплаток, полученных при удалении предыдущего чипа (для единообразия будем считать, что при $n = 0$ заплатки тоже присутствуют и имеют нулевой вес). Запатки – это диагональные ребра чипа, соединяющие вершины противоположного цвета (индукция по номеру чипа на основе формулы (4): если контакты v_{j_r}, v_{j_s} одинакового цвета, то числитель правой части равен нулю).

Специфика рассматриваемого графа состоит в том, что он, во-первых, двудольный, а во-вторых, все контактные ребра, выходящие из черных вершин чипа, ориентированы одинаково, а все контактные

ребра, выходящие из белых вершин, тоже ориентированы одинаково, причем в “противоположную” сторону. В силу этого поправочная матрица $K^T \tilde{A}(H_n)^{-1} K$, вычисляемая по формуле (3), на самом деле равна $-\tilde{A}(H_n)^{-1}$. Действительно, пронумеруем по отдельности черные и белые вершины очередного чипа и аналогично пронумеруем контакты. Для введенной нумерации сначала черных, а потом белых вершин матрица $\tilde{A}(H_n)$ имеет блочный вид $\begin{pmatrix} 0 & X_n \\ -X_n & 0 \end{pmatrix}$, а матрица K имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \pm E \\ \mp E & 0 \end{pmatrix}$. В результате при вычислении матрицы $K^T \tilde{A}(H_n)^{-1} K$ в точности все ненулевые элементы матрицы $\tilde{A}(H_n)^{-1}$ меняют знак.

Таким образом, по формуле (3)

$$A_{n+1} = A_0 - A_n^{-1}. \quad (9)$$

По лемме 4.1 получаем, что

$$A_n = U_n(A_0/2)U_{n-1}(A_0/2)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\det \tilde{A}(C_N \times P_{m-1}) = \det A_0 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_{m-1} = \det U_{m-1}(A_0/2).$$

Преобразуем это выражение, используя лемму 4.3; результат зависит от четности числа $N/2$.

При $N = 4k + 2$ собственные числа матрицы A_0 равны $2i \cos \frac{2\pi\ell}{4k+2}$, $\ell = 0, 1, \dots, 4k + 1$. В этом списке каждый косинус присутствует два раза, кроме $\cos \frac{2\pi \cdot 0}{4k+2} = 1$ и $\cos \frac{2\pi(2k+1)}{4k+2} = -1$; последние два значения можно считать парой в силу четности (или нечетности) полиномов Чебышева. Записывая определитель как произведение собственных чисел, получаем

$$\begin{aligned} M(C_{4k+2} \times P_{m-1}) &= \sqrt{\det \tilde{A}(C_{4k+2} \times P_{m-1})} \\ &= (-i)^{m-1} \prod_{\ell=0}^{2k} U_{m-1} \left(i \cos \frac{\pi\ell}{2k+1} \right) \\ &= (-i)^{m-1} U_{m-1}(i) \left(\prod_{\ell=1}^{2k} U_{m-1} \left(i \cos \frac{\pi\ell}{2k+1} \right) \right) = p_m K_{k,m}^2. \end{aligned}$$

При $N = 4k$ собственные числа матрицы A_0 равны $2i \cos \frac{(2\ell+1)\pi}{4k}$, $\ell = 0, 1, \dots, 4k-1$, и мы получаем аналогичное разложение

$$\begin{aligned} M(C_{4k} \times P_{m-1}) &= \sqrt{\det \tilde{A}(C_{4k} \times P_{m-1})} = \prod_{\ell=0}^{2k-1} U_{m-1} \left(i \cos \frac{(2\ell+1)\pi}{4k} \right) \\ &= \left(\prod_{\ell=0}^{k-1} U_{m-1} \left(i \cos \frac{(2\ell+1)\pi}{4k} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Ниже мы покажем, что при четном m это число есть точный квадрат, а при нечетном m – удвоенный точный квадрат.

3) Заметим, что рекуррентное соотношение (9) имеет место и для прямоугольника, если рассмотреть его стандартную пфаффову ориентацию, а под чипом каждый раз понимать сторону P_{2k} (плюс заплатки). Спектр матрицы $A_0 = \tilde{A}(P_{2k})$ состоит из чисел $2i \cos \frac{\pi\ell}{2k+1}$, $\ell = 1, 2, \dots, 2k$. Таким образом, с учетом четности/нечетности полиномов Чебышева

$$M(P_{2k} \times P_{m-1}) = \sqrt{\det \tilde{A}(P_{2k} \times P_{m-1})} = \left| \prod_{\ell=1}^k U_{m-1} \left(i \cos \frac{\pi\ell}{2k+1} \right) \right| = K_{k,m}.$$

□

Сопоставляя утверждения 1) и 3) теоремы 4.4, получаем следствие.

Следствие 4.4.1. $M(C_{4k+2} \times P_{m-1}) = p_m M(P_{2k} \times P_{m-1})^2$.

В частности, при $k = 1$ с учетом утверждения 2) леммы 4.1 получаем, что $M(C_6 \times P_{m-1}) = f_m^2 p_m$. Это последовательность A028477 из OEIS, в [8] вычислена ее производящая функция.

Пользуясь формулами из теоремы 4.4, мы теперь получим разложения чисел $M(P_{2k} \times P_{m-1})$ и $M(C_{4k} \times P_{m-1})$ на множители. Впрочем, эти множители не простые и даже не взаимно простые.

Напомним, что *круговой многочлен* Φ_k – это многочлен, корни которого суть первообразные корни степени k из 1. Известно, что все многочлены Φ_k имеют целые коэффициенты. Следующая лемма содержит несколько технических результатов; все они известны, ключевым словом здесь является “минимальный многочлен для $\cos \frac{\pi}{k}$ ”. Мы не нашли удобной ссылки, поэтому приводим доказательства.

Лемма 4.5. Пусть k – произвольное натуральное число. Тогда

1) при всех натуральных a сумма $\sum_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \\ (j,k)=1}} 2^{2a} \cos^{2a} \left(\frac{j\pi}{k} \right)$ является

целым числом;

$$2) \left| \prod_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ (j,2k+1)=1}} 2 \cos \frac{j\pi}{2k+1} \right| = 1;$$

$$3) \prod_{j=0}^{k-1} 2 \cos \frac{(2j+1)\pi}{4k} = \sqrt{2}.$$

Доказательство. 1) Преобразуем сумму, выразив косинусы через экспоненты по формулам Эйлера:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \\ (j,k)=1}} 2^{2a} \cos^{2a} \left(\frac{j\pi}{k} \right) &= \sum_j (e^{i\frac{j\pi}{k}} + e^{-i\frac{j\pi}{k}})^{2a} = \sum_j \sum_{m=0}^{2a} \binom{2a}{m} e^{i\frac{(2a-2m)j\pi}{k}} \\ &= \sum_m \binom{2a}{m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \\ (j,k)=1}} e^{i\frac{(a-m)2j\pi}{k}}. \end{aligned}$$

В последнем выражении сумма по j есть целое число: если $(a-m, k) = 1$, то это сумма первообразных корней степени k из 1, т. е. коэффициент кругового многочлена Φ_k , а если $(a-m, k) = d > 1$, то в сумму входят с кратностью d все первообразные корни степени k/d .

2) Заметим, что $\left| \prod_{j=1}^{2k} 2 \cos \frac{j\pi}{2k+1} \right| = 1$, поскольку это произведение есть произведение корней многочлена Чебышева $U_{2k}(x/2)$, т. е. свободный член этого многочлена. Все косинусы в этом произведении разбиваются на пары косинусов, отличающихся лишь знаком, следовательно, $\prod_{j=1}^k 2 \cos \frac{j\pi}{2k+1} = 1$. Обозначим это произведение через $Q(2k+1)$, а через $P(2k+1)$ обозначим произведение из условия леммы. Тогда при всех k

$$\begin{aligned} 1 = Q(2k+1) &= \prod_{j=1}^k 2 \cos \frac{j\pi}{2k+1} \\ &= \prod_{d|(2k+1)} \prod_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ (j,2k+1)=d}} 2 \cos \frac{j\pi}{2k+1} = \prod_{d|(2k+1)} P\left(\frac{2k+1}{d}\right). \end{aligned}$$

Интересующее нас произведение $P(2k+1)$ можно найти из этого соотношения с помощью принципа включения-исключения: $P(2k+1) = \prod_{d|(2k+1)} Q\left(\frac{2k+1}{d}\right)^{\mu(d)} = 1$, где $\mu(d) = 0, \pm 1$ – функция Мебиуса.

3) Заметим, что произведение $\prod_{j=1}^{k-1} \cos \frac{j\pi}{2k} \cdot \prod_{j=k+1}^{2k-1} \cos \frac{j\pi}{2k}$ содержит все корни многочлена U_{2k-1} кроме 0, поэтому по теореме Виета оно равно $\pm k$ – коэффициенту многочлена U_{2k-1} при x . Тогда

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^{k-1} 2 \cos \frac{(2j+1)\pi}{4k} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{2k-1} 2 \cos \frac{j\pi}{4k}}{\prod_{j=1}^{k-1} 2 \cos \frac{j\pi}{2k}} = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{2k-1} \cos \frac{j\pi}{4k} \cdot \prod_{j=2k+1}^{4k-1} \cos \frac{j\pi}{4k}}{\prod_{j=1}^{k-1} \cos \frac{j\pi}{2k} \cdot \prod_{j=k+1}^{2k-1} \cos \frac{j\pi}{2k}}} = \sqrt{\frac{2k}{k}} = \sqrt{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 4.6. 1) Пусть x_1, \dots, x_n – вещественные числа, такие, что сумма $\sum_{j=1}^n x_j^k$ является целым числом для всех натуральных k . Тогда для любого натурального t и любого набора натуральных чисел (a_1, \dots, a_m) сумма $\sum_{(j_1, \dots, j_m)} \prod_{k=1}^m x_{j_k}^{a_k}$ является целым числом (суммирование ведется по всевозможным наборам из t различных чисел $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, t\}$).

2) Пусть x_1, \dots, x_n – вещественные числа, такие, что сумма $\sum_{i=1}^n x_i^{2k}$ является целым числом для всех натуральных k , а P – многочлен с целыми коэффициентами. Тогда если многочлен P четный, то произведение $\prod_{i=1}^n P(x_i)$ является целым числом; если же P – нечетный многочлен, то произведение $\prod_{i=1}^n \frac{P(x_i)}{x_i}$ является целым числом.

Первое утверждение леммы доказывается индукцией по t . Второе сразу следует из первого.

Теорема 4.7. *Имеют место следующие разложения, в каждом из которых множитель, отвечающий каждому h , является натуральным числом:*

$$\begin{aligned}
M(P_{2k} \times P_{m-1}) &= \prod_{h|2k+1} \left| \prod_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ (j, 2k+1)=h}} U_{m-1} \left(i \cos \frac{j\pi}{2k+1} \right) \right|, \quad (10) \\
M(C_{4k} \times P_{2m}) &= \left(\prod_{h|k} \left| \prod_{\substack{0 \leq j \leq k-1, \\ (2j+1, k)=h}} U_{2m} \left(i \cos \frac{(2j+1)\pi}{4k} \right) \right| \right)^2, \\
M(C_{4k} \times P_{2m-1}) &= 2 \left(\prod_{h|k} \left| \prod_{\substack{0 \leq j \leq k-1, \\ (2j+1, k)=h}} \frac{U_{2m-1} \left(i \cos \frac{(2j+1)\pi}{4k} \right)}{2i \cos \frac{(2j+1)\pi}{4k}} \right| \right)^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем формулу (10).

При нечетном m многочлен $U_{m-1}(x/2)$ имеет целые коэффициенты и является четным. Для произвольного натурального a и любого делителя $h|(2k+1)$ выполняется равенство

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ (j, 2k+1)=h}} \left(2i \cos \frac{j\pi}{2k+1} \right)^{2a} = \pm \sum_{\substack{1 \leq j \leq \lfloor \frac{\tilde{k}}{2} \rfloor, \\ (j, \tilde{k})=1}} 2^{2a} \left(\cos \frac{j\pi}{\tilde{k}} \right)^{2a},$$

где в правой части $\tilde{k} = \frac{2k+1}{h}$. По лемме 4.5 (1) сумма в правой части является целым числом. Тогда по лемме 4.6 (2) каждое произведение по j в формуле (10) является целым числом.

При четном m многочлен $U_{m-1}(x/2)$ имеет целые коэффициенты и является нечетным. Как и в предыдущем абзаце, по леммам 4.5 (1) и 4.6 (2) получаем, что произведение

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ (j, 2k+1)=h}} \frac{U_{m-1} \left(i \cos \frac{j\pi}{2k+1} \right)}{2i \cos \frac{j\pi}{2k+1}}$$

является целым числом. Осталось заметить, что по лемме 4.5 (2) произведение чисел в знаменателях по модулю равно 1.

Остальные две формулы доказываются аналогично, множитель 2 появляется в силу утверждения леммы 4.5 (3) для нечетных многочленов. \square

Из доказанной теоремы сразу следует наблюдение Селлера [9] о том, что $M(P_8 \times P_{m-1})$ делится на f_m . Действительно, при $k \equiv 1 \pmod{3}$ множитель в формуле (10), соответствующий значению $h = (2k+1)/3$, — это число Фибоначчи $f_m = |U_{m-1}(i/2)|$.

Полученные разложения далеки от разложений на простые или хотя бы взаимно простые множители. Например, как показано в [10], $M(P_8 \times P_8) = 12988816 = 2^4 \cdot 17^2 \cdot 53^2$. Применяя утверждение 1) теоремы для $k = 4$, $m = 9$, находим при $h = 1$

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ (j, 2k+1)=h}} U_{m-1}\left(i \cos\left(\frac{j\pi}{2k+1}\right)\right) = U_8\left(i \cos\frac{\pi}{9}\right) \cdot U_8\left(i \cos\frac{2\pi}{9}\right) \cdot U_8\left(i \cos\frac{4\pi}{9}\right) \\ = 382024 = 2^3 \cdot 17 \cdot 53^2,$$

а при $h = 3$

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ (j, 2k+1)=h}} U_{m-1}\left(i \cos\frac{j\pi}{2k+1}\right) = U_8\left(i \cos\frac{\pi}{3}\right) = 34 = 2 \cdot 17.$$

5. Примеры на шестиугольной решетке.

Определение. Шестиугольным параллелограммом $a \times b$ будем называть фигуру на шестиугольной решетке, состоящую из b рядов по a шестиугольников, где каждый следующий ряд сдвинут на половину шестиугольника вправо относительно предыдущего ряда, см. рис. 5. Обозначим через $B_{a,b}$ граф, вершины которого — это узлы параллелограмма, а ребра — линии шестиугольной решетки.

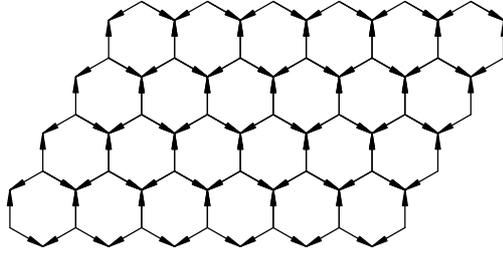


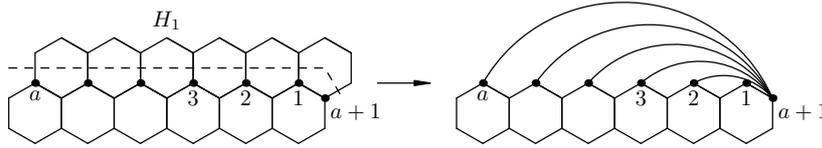
Рис. 5. Шестиугольный параллелограмм $B_{6,4}$.

Следующая теорема доказана в [5].

Теорема 5.1. *Количество паросочетаний шестиугольного параллелограмма $B_{a,b}$ равно $\binom{a+b}{a}$.*

Доказательство. Зафиксируем пфаффову ориентацию графа $B_{a,b}$ как на рис. 5. Будем последовательно вырезать чипы из графа $B_{a,b}$.

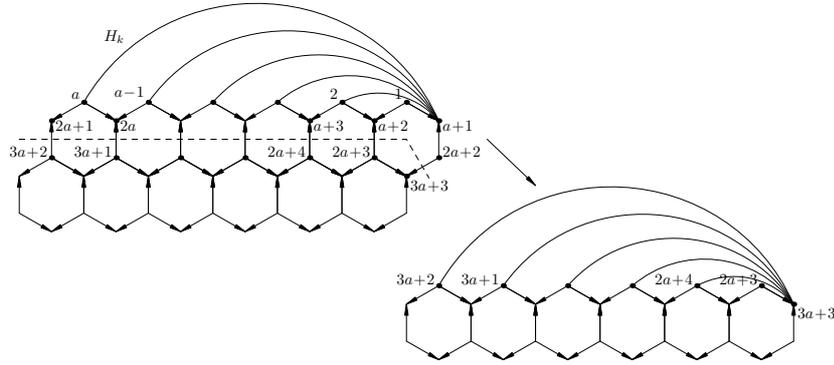
Пусть чип H_1 – это верхний “горизонтальный” слой из $2a + 2$ вершин (на рисунке ниже проведена пунктирная линия, отрезающая чип, и пронумерованы контакты). Нетрудно видеть, что после удаления чипа все появившиеся заплатки будут выходить из вершины $a + 1$. Действительно, при удалении из чипа вершин, примыкающих к i -му и j -му контактам (при $i, j < a + 1$), чип распадается на две компоненты, состоящие из нечетного числа вершин, и поэтому не имеет совершенных паросочетаний. Тогда по формуле (4) вес заплатки между i -м и j -м контактами равен нулю. Отметим еще, что на картинках мы не проводим дуговую заплатку из $a + 1$ в 1, полагая, что она объединяется с уже существующим ребром графа.



При удалении каждого следующего чипа H_k имеет место аналогичная картина: в роли заплаток опять выступают только ребра, выходящие из самой правой вершины (рис. 6). Вычислим веса заплаток, получающиеся при вырезании чипа H_k . Пронумеруем вершины двух соседних слоев как на рис. 6. Будем считать, что веса ребер-заплаток предыдущего чипа равны $w_{1,a+1}, w_{2,a+1}, \dots, w_{a,a+1}$, причем информация об ориентации этих ребер хранится в знаке этих весов. Все веса ребер исходного графа считаем равными 1.

Так как чип H_k имеет единственное паросочетание,

$$\begin{aligned} \text{Pf}(H_k) &= \text{sgn}(1, a + 2, 2, a + 3, \dots, a, 2a + 1, a + 1, 2a + 2) \\ &\quad \times w_{1,a+2} w_{2,a+3} \cdots w_{a,2a+1} w_{a+1,2a+2} \\ &= (-1)^{\frac{a(a+1)}{2}} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot (-1) = (-1)^{\frac{a(a+1)}{2} + 1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Рис. 6. Вырезание чипа H_k из графа $B_{a,b}$.

Вес заплатаки, соединяющей контакты $2a + 2 + i$ и $3a + 3$, обозначим через $W_{2a+2+i,3a+3}$. Отметим, что при $i = 1$ эта заплатака накладывается на уже существующее ребро с весом 1; в этом случае будем использовать в формулах символ Кронекера δ_{i1} . Для вычисления веса $W_{2a+2+i,3a+3}$ по формуле (4) мы должны удалить из чипа вторые концы контактных ребер, т. е. вершины $a + 1 + i$ и $2a + 2$, и подсчитать пфаффиан оставшейся части:

$$\begin{aligned} W_{2a+2+i,3a+3} &= \delta_{i1} + (-1)^{(a+1+i)+(2a+2)} \cdot w_{a+1+i,2a+2+i} \cdot w_{2a+2,3a+3} \\ &\quad \times \frac{\text{Pf}(H_k \setminus \{a+1+i, 2a+2\})}{\text{Pf}(H_k)} \\ &= \delta_{i1} + (-1)^{a+1+\frac{a(a+1)}{2}+i} \cdot \text{Pf}(H_k \setminus \{a+1+i, 2a+2\}). \end{aligned}$$

Осталось найти величину пфаффиана чипа без двух вершин $H_k \setminus \{a+1+i, 2a+2\}$. Паросочетания этого графа однозначно задаются “дуговым” ребром $(j, a+1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \text{Pf}(H_k \setminus \{a+1+i, 2a+2\}) \\
&= \sum_{j=1}^i \text{sgn}(1, a+2, \dots, j-1, a+j, \underline{j, a+1}, j+1, a+j+1, \\
&\quad \dots, i, a+i, i+1, a+i+2, \dots, a, 2a+1) \cdot w_{1, a+2} \cdots w_{a, 2a+1} \\
&= \sum_{j=1}^i (-1)^{\frac{a(a-1)}{2} - (j-1)} w_{j, a+1}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Объединяя предыдущие два результата, получаем

$$W_{2a+2+i, 3a+3} = \delta_{i1} + (-1)^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} w_{j, a+1}.$$

Введем переобозначение: положим $A_{k-1, j} = (-1)^{j-1} w_{j, a+1}$, где $j = 1, 2, \dots, a$. В частности, $A_{0,1} = 1$, $A_{0,2} = A_{0,3} = \dots = A_{0,a} = 0$ (эти равенства выражают тот факт, что в чипе H_1 заплатки отсутствуют). В этих же обозначениях $W_{2a+2+i, 3a+3} = (-1)^{i-1} A_{k, i}$ и полученное соотношение можно записать в виде

$$A_{k, i} = \delta_{i1} + \sum_{j=1}^i A_{k-1, j}.$$

Несложно заметить, что этому рекуррентному соотношению удовлетворяет последовательность

$$A_{k, j} = \binom{k+j-1}{j} \quad \text{при } j > 1; \quad A_{k, 1} = \binom{k}{1} + 1.$$

После выполнения b шагов останется граф H_{fin} (рис. 7), пфаффиан $\text{Pf}(H_{\text{fin}})$ которого вычисляется аналогично формуле (12):

$$\begin{aligned}
\text{Pf}(H_{\text{fin}}) &= (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} \sum_{i=1}^a (-1)^{i-1} w_{i, a+1} = (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} \sum_{i=1}^a A_{b, i} \\
&= (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} \sum_{i=1}^a \binom{b+i-1}{i} = (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} \binom{b+a}{a}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Итого $M(B_{a, b}) = |\text{Pf}(H_1) \cdot \text{Pf}(H_2) \cdots \text{Pf}(H_b) \cdot \text{Pf}(H_{\text{fin}})| = \binom{b+a}{a}$. \square

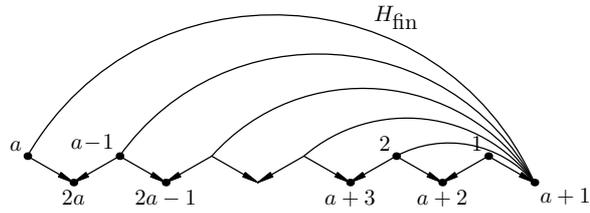


Рис. 7. Результат вырезания последнего чипа H_b из графа $B_{a,b}$.

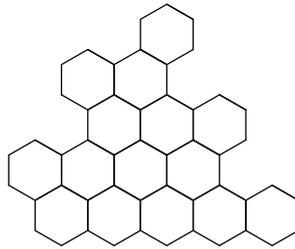


Рис. 8. Змея Арнольда порядка 5.

Определение. Рассмотрим фигуру, состоящую из $\frac{n(n+1)}{2}$ шестиугольников, расположенных в n рядах так, что в i -м ряду находится i шестиугольников, а ряды сдвинуты как показано на рис. 8. Эту фигуру и граф S_n , образованный узлами решетки и отрезками, принадлежащими фигуре, будем называть *змеей Арнольда порядка n* .

Напомним конструкцию числового треугольника Эйлера–Бернулли ([2]). В вершине треугольника стоит единица (это нулевой ряд). Элемент в ряду с нечетным номером равен сумме элементов, стоящих в предыдущем ряду левее этого элемента; элемент в ряду с четным номером равен сумме элементов, стоящих в предыдущем ряду правее.

т.д. (см. рис 9). Рассмотрим операцию удаления чипа H_k ; можно считать, что нумерация вершин чипа начинается с 1. Пусть веса ребер-заплаток, образовавшихся после удаления предыдущего чипа, равны $w_{1,k+1}, w_{2,k+1}, \dots, w_{k-1,k+1}$, причем информация об ориентации этих ребер хранится в знаке этих весов. Для единообразия будем также считать, что присутствует ребро $k \rightarrow (k+1)$ и $w_{1,k+1} = 0$. Все веса ребер исходного графа считаем равными 1. Вычислим веса новых заплаток $W_{2k+2+i,3k+4}$.

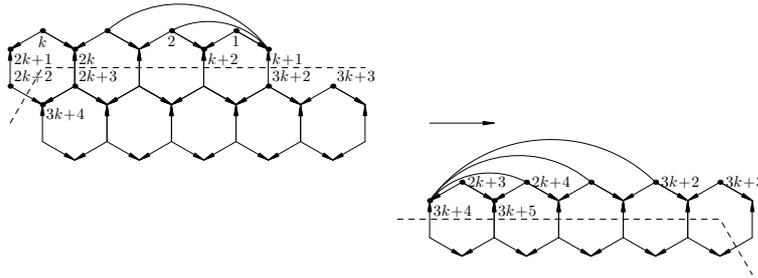


Рис. 9. Удаляем чип H_k из змеи Арнольда.

Начнем с подсчета пфаффиана чипа H_k . Паросочетания графа H_k однозначно задаются положением ребра $j \rightarrow (k+1)$:

$$\begin{aligned} \text{Pf}(H_k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \text{sgn}(1, k+2, 2, k+3, \dots, i-1, k+i, \underline{i, k+1}, i+1, k+i+1, \\ &\quad \dots, k, 2k, 2k+1, 2k+2) \\ &\quad \times w_{1,k+2} \cdot \dots \cdot w_{i-1,k+i} \cdot w_{i,k+1} \cdot w_{i+1,k+i+1} \cdot \dots \cdot w_{2k+1,2k+2} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}-i} \cdot w_{i,k+1}. \end{aligned}$$

Далее вычислим пфаффиан чипа, из которого удалены вершины контактных ребер $(2k+2) \rightarrow (3k+4)$ и $(2k+2+i) \rightarrow (2k+1-i)$. Для $i < k$ паросочетание графа $H_k \setminus \{2k+1-i, 2k+2\}$ однозначно задается ребром $j \rightarrow (k+1)$, где $i \leq j \leq k$, а при $i = k$ паросочетание определено однозначно. Аналогично формулам (11), (12) получаем при $i < k$

$$\text{Pf}(H_k \setminus \{2k+1-i, 2k+2\}) = \sum_{j=i}^{k-1} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2} - (j-1)} \cdot w_{j,k+1},$$

а при $i = k$

$$\text{Pf}(H_k \setminus \{k+1, 2k+2\}) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

Теперь вычислим по формуле (4) веса заплаток $W_{2a+2+i, 3a+3}$, соответствующих контактам $(2k+1-i) \rightarrow (2k+2+i)$ и $(2k+2) \rightarrow (3k+4)$. При $i < k$ имеем

$$\begin{aligned} W_{2k+2+i, 3k+4} &= \delta_{i1} + (-1)^{(2k+1-i)+(2k+2)} \cdot w_{2k+1-i, 2k+2+i} \cdot w_{2k+2, 3k+4} \\ &\quad \times \frac{\text{Pf}(H_k \setminus \{2k+1-i, 2k+2\})}{\text{Pf}(H_k)} \\ &= \delta_{i1} + (-1)^{i+1} \cdot \frac{\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^{j+1} w_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} w_{j,k+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично при } i=k \text{ имеем } W_{3k+2, 3k+4} = (-1)^{k+1} \frac{1}{\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \cdot w_{j,k+1}}.$$

Осталось подсчитать пфаффиан графа, полученного после вырезания последнего чипа H_n . Как и в предыдущей теореме, этот шаг описывается формулой (13) (см. рис. 7):

$$\text{Pf}(H_{n+1}) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot w_{i,k+1}.$$

Введем переобозначение: положим $A_{k-1,j} = (-1)^{j+1} w_{j,k+1}$, где $j = 1, 2, \dots, k$. В частности, $A_{0,1} = 1 = \delta_{11}$ (это равенство выражает тот факт, что в чипе H_1 заплатки отсутствуют). В этих обозначениях $W_{2k+2+i, 3k+4} = (-1)^{i+1} A_{k,i}$ и полученные соотношения можно записать в виде

$$A_{k,i} = \delta_{i1} + \frac{\sum_{j=i}^{k-1} A_{k-1,j}}{\sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1,j}}, \quad i < k; \quad A_{k,k} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1,j}}.$$

Как нетрудно убедиться, этому соотношению и его начальным условиям удовлетворяет набор весов

$$A_{k-1,i} = \frac{t_{k,k-i}}{t_{k,k}} \quad \text{при } i > 1, \quad A_{k-1,1} = 2 = \frac{2t_{k,k-1}}{t_{k,k}} = \frac{t_{k,k-1} + t_{k,k}}{t_{k,k}}.$$

Следовательно, $\text{Pf}(H_k) = \frac{t_{k+1,k+1}}{t_{k,k}}$ при $n \geq k > 1$, $\text{Pf}(H_1) = 1 = \frac{t_{2,2}}{t_{1,1}}$, и $\text{Pf}(H_{n+1}) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t_{n+2,n+2}}{t_{n+1,n+1}}$. Тогда число паросочетаний змеи Арнольда порядка n равно

$$\begin{aligned} & |\text{Pf}(H_1) \cdot \text{Pf}(H_2) \cdot \dots \cdot \text{Pf}(H_n) \cdot \text{Pf}(H_{n+1})| \\ &= \frac{t_{2,2}}{t_{1,1}} \cdot \frac{t_{3,3}}{t_{2,2}} \cdot \dots \cdot \frac{t_{n+1,n+1}}{t_{n,n}} \cdot \frac{t_{n+2,n+2}}{t_{n+1,n+1}} = \frac{t_{n+2,n+2}}{t_{1,1}} = t_{n+2,n+2}. \quad \square \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Аксенов, К. Кохась, *Удаление чипов. Urban Renewal revisited.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2015), 5–29.
2. В. И. Арнольд, *Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера.* — УМН **47**, вып. 1 (1992), 3–45.
3. Л. Ловас, М. Пламмер, *Прикладные задачи теории графов.* М.: Мир, 1998.
4. M. Ciucu, *A generalization of Kuo condensation.* — J. Combin. Theory Ser. A **134** (2015), 221–241.
5. T. Došlić, *Perfect matchings in lattice animals and lattice paths with constraints.* — Croatia Chemica Acta **78**, No. 2 (2005), 251–259.
6. M. Fulmek, *Graphical condensation, overlapping Pfaffians and superpositions of matchings.* — Electron. J. Combin. **17**, No. 1 (2010), Research Paper 83.
7. R. Kenyon, *Local statistics of lattice dimers.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **33**, No. 5 (1997), 591–618.
8. P. H. Lundow, *Enumeration of matchings in polygraphs,* Research report, Umea University, 1988.
9. J. A. Sellers, *Domino tilings and products of Fibonacci and Pell numbers.* — J. Integer Seq. **5** (2002), Article 02.1.2.
10. V. Strehl, *Counting domino tilings of rectangles via resultants.* — Adv. Appl. Math. **27**, No. 2–3 (2001), 597–626.

Aksenov V. E., Kokhas K. P. Calculation of Pfaffians by a chip removal.

We define an operation of chip removal that generalizes the Urban Renewal trick of Kuperberg and Propp. This operation replaces a subgraph H of a graph G with a small collection of weighted edges so that the equality $\text{Pf}(G) = \text{Pf}(H) \text{Pf}(G')$ holds (here G' is the graph obtained after the replacement). We explain how to calculate the weights of the new edges in terms of the Pfaffians of the chip. We give several applications of

this construction. One of these applications is to "Arnold's snakes," which are graphs with the number of perfect matchings equal to Euler–Bernoulli numbers.

НИУ ИТМО,
Кронверкский пр., д. 49,
197101 С.-Петербург; Россия

Поступило 12 сентября 2015 г.

С.-Петербургский
государственный университет;
НИУ ИТМО,
С.-Петербург, Россия
E-mail: kpk@arbita1.ru