Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 435, 2015 г.

И. М. Певзнер

ШИРИНА ЭКСТРАСПЕЦИАЛЬНОГО УНИПОТЕНТНОГО РАДИКАЛА ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение

Пусть $G = G(\Phi, K)$ – группа Шевалле типа Φ над произвольным полем K, δ – максимальный корень системы Φ. Экстраспециальным унипотентным радикалом называется подгруппа $U_\delta = \langle X_\alpha; \angle(\alpha, \delta) < \pi/2\rangle$. В настоящей работе всюду Φ – система корней с простыми связями (иначе говоря, все корни Φ имеют одинаковую длину). Таким образом, $\Phi = A_l$, D_l, E_6, E_7 или E_8. Детальную информацию относительно систем корней групп Шевалле и экстраспециальных унипотентных радикалов можно найти в [1–3, 6, 13–16, 19].

Напомним, что ширина группы G относительно множества образующих S – это либо минимальное натуральное число n, такое, что любой элемент группы G представляется в виде произведения не более чем n элементов из S, либо ∞, если такого n не существует. Это определение иногда обобщают, говоря про ширину группы G относительно произвольного множества $S \subset G$. В этом случае шириной G относительно S называется ширина группы $\langle S\rangle$ относительно S.

Основной результат настоящей работы – это следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $G = G(\Phi, K)$ – группа Шевалле типа Φ, где Φ – система корней с простыми связями, над полем K. Тогда любой элемент из экстраспециального унипотентного радикала группы G есть произведение не более 3 корневых элементов.*

Кроме того, в работе доказывается, что любой элемент из U_δ можно, при необходимости сопрягая его корневыми элементами вида $x_\beta(b)$

Ключевые слова: группы Шевалле, экстраспециальный унипотентный радикал, ширина группы, корневые элементы.

Настоящая работа выполнена при содействии проектов РФФИ 14-01-00820-а и 12-01-00947-а.

при $\beta \perp \delta$, представить в виде произведения шести элементарных корневых элементов.

Представленные результаты являются обобщением теоремы 2 работы [10]; в ней доказывался аналогичный результат для $\Phi = E_6$. В планы автора входит обобщение всей работы [10].

В настоящей работе два параграфа. В первом перечисляются и доказываются несложные леммы про системы корней и корневые элементы; для удобства он разбит на 6 небольших пунктов. Второй параграф посвящен формулировке и доказательству теорем.

§1. Вспомогательные леммы

1. Отметим, что в системах с одинаковыми длинами корней углы между корнями могут быть равны $0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ и π. Сумма двух корней является корнем тогда и только тогда, когда угол между ними равен $2\pi/3$; соответственно, разность двух корней является корнем тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\pi/3$. При этом коммутационная формула Шевалле утверждает, что $[x_\alpha(a), x_\beta(b)] = x_{\alpha+\beta}(\pm ab)$ при $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi, a, b \in K$ и $[x_\alpha(a), x_\beta(b)] = e$ при $\alpha, \beta \in \Phi, \alpha+\beta \notin \Phi, \alpha+\beta \neq 0$. Иначе говоря,

$$x_\alpha(a)x_\beta(b)(x_\alpha(a))^{-1} = x_{\alpha+\beta}(\pm ab)x_\beta(b)$$

при $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$ и

$$x_\alpha(a)x_\beta(b)(x_\alpha(a))^{-1} = x_\beta(b)$$

при $\alpha, \beta \in \Phi, \alpha+\beta \notin \Phi, \alpha+\beta \neq 0$.

2. Будем, для определенности, считать, что длина всех корней из Φ равна 1. Пусть $\alpha \in \Phi$ – некоторый корень. Разобьем все корни из Φ на пять классов в зависимости от их расположения относительно корня α: $\Phi_2(\alpha) = \{\alpha\}$, $\Phi_1(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta, \alpha) = \pi/3\}$, $\Phi_0(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta, \alpha) = \pi/2\}$, $\Phi_{-1}(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta, \alpha) = 2\pi/3\}$, $\Phi_{-2}(\alpha) = \{-\alpha\}$. Другими словами, β принадлежит $\Phi_i(\alpha)$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение β и α равно $i/2$. Из этого легко вывести следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\alpha \in \Phi$, $\beta \in \Phi_i(\alpha)$ и $\gamma \in \Phi_j(\alpha)$. Тогда верны следующие утверждения.*

1. $-\beta \in \Phi_{-i}(\alpha)$.
2. *Если $\beta + \gamma \in \Phi$, то $\beta + \gamma \in \Phi_{i+j}(\alpha)$.*
3. *Если $\beta - \gamma \in \Phi$, то $\beta - \gamma \in \Phi_{i-j}(\alpha)$.*

Доказательство. Сразу следует из линейности скалярного произведения. □

Часто нас будет интересовать случай $\alpha = \delta$; для краткости, аргумент у $\Phi_i(\delta)$ будем опускать. Как уже упоминалось, экстраспециальный радикал $U_\delta = \langle X_\alpha; \alpha \in \Phi_2 \cup \Phi_1 \rangle$. Из леммы и формулы Шевалле следует, что $x_\beta(b) U_\delta x_\beta(-b) = U_\delta$ при $\beta \in \Phi_0$. В дальнейшем мы будем сопрягать элемент из U_δ именно такими корневыми элементами, пытаясь привести его к более простому виду. Отметим еще, что угол между корнями $\alpha \in \Phi_2 \cup \Phi_1$ и $\beta \in \Phi_0$ может быть равен $\pi/3$, $\pi/2$ или $2\pi/3$.

3. Несложно видеть также, что $x_\delta(d)$ коммутирует со всеми $x_\alpha(a)$ при $\alpha \in \Phi_1$, а $x_\alpha(a)$ и $x_\beta(b)$ при $\alpha, \beta \in \Phi_1$ "почти коммутируют" – или коммутируют, или их коммутатор равен $x_\delta(d)$. Из этого следует, что любой элемент $g \in U_\delta$ может быть представлен в виде

$$g = x_\delta(d) \cdot \prod_{\alpha \in \Phi_1} x_\alpha(a),$$

причем в произведении каждый из корней встречается ровно по одному разу. При этом число a, то есть коэффициент, с которым в это разложение входит x_α при корне $\alpha \in \Phi_1$, не зависит от порядка сомножителей. В дальнейшем этот коэффициент будет обозначаться через $(\alpha)_g$, или просто (α), если элемент g ясен из контекста.

4. Объединяя пункты 1 и 3, получаем, что при сопряжении элемента $g \in U_\delta$ корневым элементом $x_\alpha(a)$, $\alpha \in \Phi_0$, коэффициенты $(\beta)_g$ при $\angle(\beta, \alpha) > \pi/3$ не меняются, а при $\angle(\beta, \alpha) = \pi/3$ к коэффициенту $(\beta)_g$ прибавляется $\pm a(\beta - \alpha)_g$.

5. Посмотрим на взаимное расположение корней в Φ_1. Для удобства введем новое обозначение: $\Psi_i(\alpha) = \Phi_i(\alpha) \cap \Phi_1$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha, \beta \in \Phi_1$. *Тогда*

1. $\beta = \alpha$, $\beta \in \Phi_1(\alpha)$, $\beta \in \Phi_0(\alpha)$ *или* $\beta = \delta - \alpha$*;*
2. $\beta \in \Phi_1(\alpha) \Leftrightarrow \beta \in \Phi_0(\delta - \alpha)$ *и* $\beta \in \Phi_0(\alpha) \Leftrightarrow \beta \in \Phi_1(\delta - \alpha)$*;*
3. $|\Psi_1(\alpha)| = |\Psi_0(\alpha)|$.

Доказательство. Для любых двух корней $\alpha, \beta \in \Phi$, как уже говорилось, $\beta \in \Phi_2(\alpha) = \{\alpha\}$, $\beta \in \Phi_1(\alpha)$, $\beta \in \Phi_0(\alpha)$, $\beta \in \Phi_{-1}(\alpha)$ или $\beta \in \Phi_{-2}(\alpha) = \{-\alpha\}$. По лемме 1, последний случай невозможен. Далее, если $\beta \in \Phi_{-1}(\alpha)$, то $\alpha + \beta \in \Phi \Rightarrow \alpha + \beta \in \Phi_2 \Rightarrow \alpha + \beta = \delta$. Отсюда следует пункт 1.

Пункт 2 сразу следует из леммы 1. Из той же самой леммы 1 следует, что если $\beta \in \Psi_1(\alpha)$, то $\delta - \beta \in \Psi_0(\alpha)$, и наоборот. Из этого следует пункт 3. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \in \Phi_1$, $\beta \in \Psi_1(\alpha)$. *Тогда* $\beta - \alpha \in \Phi_0$ *и* $\Phi_1(\alpha) \cap \Phi_1(\beta - \alpha) = \{\beta\}$.

Доказательство. Поскольку $\beta \in \Phi_1(\alpha)$, то $\beta - \alpha \in \Phi$. При этом $\alpha, \beta \in \Phi_1$, поэтому $\beta - \alpha \in \Phi_0$. Угол между α и $\beta - \alpha$ равен $2\pi/3$, поэтому единственный корень, образующий углы в $\pi/3$ с ними обоими – это β. $\square$

6. Отметим также следующее полезное утверждение.

Лемма 4. 1. *Предположим, что* $\alpha, \beta \in \Phi$ *и* $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$. *Тогда произведение корневых элементов* $x_\alpha(a)$ *и* $x_\beta(b)$ *также является корневым элементом.*

2. *Предположим, что* $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ *и* $\angle(\alpha, \beta) = \angle(\alpha, \gamma) = \angle(\beta, \gamma) = \pi/3$. *Тогда произведение корневых элементов* $x_\alpha(a)$, $x_\beta(b)$, $x_\gamma(z)$ *также является корневым элементом.*

Доказательство. Докажем пункт 1. Если $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$, то $\beta - \alpha$ также является корнем. Тогда по формуле Шевалле

$$[x_\alpha(c), x_{\beta-\alpha}(d)] = x_\beta(\pm cd),$$

откуда следует

$$x_{\beta-\alpha}(d) x_\alpha(-c) x_{\beta-\alpha}(-d) = x_\alpha(-c) x_\beta(\pm cd).$$

Левая часть этого равенства – всегда корневой элемент, поскольку получена сопряжением элементарного корневого элемента. Подбирая подходящие c и d, можно в правой части получить требуемое произведение.

Для доказательства второго пункта умножим последнее равенство на $x_\gamma(z)$ справа. Получим

$$x_{\beta-\alpha}(d) x_\alpha(-c) x_{\beta-\alpha}(-d) x_\gamma(z) = x_\alpha(-c) x_\beta(\pm cd) x_\gamma(z).$$

Поскольку $\alpha, \beta \in \Phi_1(\gamma)$, то $\beta - \alpha \in \Phi_0(\gamma)$. Поэтому $x_{\beta-\alpha}(-d)$ и $x_\gamma(z)$ коммутируют, следовательно

$$x_{\beta-\alpha}(d) x_\alpha(-c) x_\gamma(z) x_{\beta-\alpha}(-d) = x_\alpha(-c) x_\beta(\pm cd) x_\gamma(z).$$

По пункту 1 произведение $x_\alpha(-c)x_\gamma(z)$ является корневым элементом, значит и вся левая часть тоже. Опять подбирая подходящие c и d, можно в правой части получить требуемое произведение. $\square$

§2. Основные результаты

Утверждение 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Phi_1$ – попарно ортогональные корни. Тогда $k \leqslant 4$. Более того, если $k = 4$, то*

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4).$$

Доказательство. Дополним систему корней $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ до ортонормированного базиса всего пространства (как уже говорилось, мы считаем длину всех корней равной 1). Пусть этот базис

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_n\}.$$

Далее, пусть координаты корня δ в этом базисе равны

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n).$$

Поскольку $\alpha_i \in \Phi_1$, то $a_i = (\delta, \alpha_i) = \frac{1}{2}$. Таким образом, получаем:

$$1 = |\delta|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + b_{k+1}^2 + \cdots + b_n^2 = \frac{1}{4} \cdot k + b_{k+1}^2 + \cdots + b_n^2 \geqslant \frac{k}{4},$$

откуда $k \leqslant 4$. Если $k = 4$, то все b_i должны быть равны 0. Поэтому $\delta = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)$, откуда следует $\delta = \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$, как и утверждалось. $\square$

Лемма 5. *Пусть $g \in U_\delta$, $\alpha \in \Phi_1$, $\beta \in \Psi_1(\alpha)$ и $(\alpha)_g \neq 0$. Сопрягая, при необходимости, элемент g корневым элементом $x_{\beta-\alpha}(b)$, можно добиться, чтобы коэффициент $(\beta)_g$ стал равен 0. При этом коэффициенты $(\gamma)_g$ при $\gamma \in \Psi_1(\alpha), \gamma \neq \beta$, не изменятся.*

Доказательство. По пункту 4 предыдущего параграфа, при сопряжении g элементом $x_{\beta-\alpha}(b)$ к коэффициенту (β) прибавляется $\pm b(\alpha)$. Поскольку $(\alpha) \neq 0$, то коэффициент (β) можно сделать равным 0. Снова по 4 пункту предыдущего параграфа, при сопряжении g элементом $x_{\beta-\alpha}(b)$ меняются только коэффициенты (γ) при $\gamma \in \Phi_1(\beta - \alpha)$. По лемме 3, $\Phi_1(\alpha) \cap \Phi_1(\beta - \alpha) = \{\beta\}$, поэтому из всех коэффициентов (γ) при $\gamma \in \Psi_1(\alpha)$ при таком сопряжении меняется только (β). $\square$

Лемма 6. *Пусть* $g \in U_\delta$, $\alpha \in \Phi_1$, $\gamma \in \Phi_0 \cap \Phi_0(\alpha)$ *и* $(\beta)_g = 0$ *для всех* $\beta \in \Psi_1(\alpha)$. *Тогда при сопряжении* g *корневым элементом* $x_\gamma(a)$ *коэффициенты* $(\alpha)_g$ *и* $(\beta)_g$ *для всех* $\beta \in \Psi_1(\alpha)$ *не меняются.*

Доказательство. Поскольку $\gamma \in \Phi_0(\alpha)$, то по 4 пункту предыдущего раздела коэффициент (α) при таком сопряжении не меняется. Далее, по тому же самому 4 пункту, коэффициент (β) при $\beta \in \Psi_1(\alpha)$ меняется тогда и только тогда, когда $\angle(\beta, \gamma) = \pi/3$; при этом к (β) прибавляется $\pm a(\beta - \gamma)$. Так как $\beta \in \Psi_1(\alpha)$ и $\gamma \in \Phi_0 \cap \Phi_0(\alpha)$, то по лемме 1 имеем $\beta - \gamma \in \Psi_1(\alpha)$. Поэтому $(\beta - \gamma) = 0$, значит коэффициент (β) не меняется. □

Теорема 2. *Пусть* $g \in U_\delta$. *Тогда, сопрягая элемент* g *корневыми элементами* $x_\beta(b)$ *при* $\beta \in \Phi_0$, *можно добиться того, чтобы все коэффициенты* $(\alpha)_g$ *при* $\alpha \neq \alpha_1, \delta - \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *стали равны* 0. *При этом* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Phi_1$ *– некоторые попарно ортогональные корни, а* $0 \leqslant k \leqslant 4$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 \in \Phi_1$ – некоторый корень, такой что $(\alpha_1) \neq 0$; если такого α_1 не существует, то теорема выполняется при $k = 0$. Применяя лемму 5 несколько раз при $\alpha = \alpha_1$, а β пробегающем все множество $\Psi_1(\alpha_1)$, можно добиться того, чтобы все коэффициенты (β) при $\beta \in \Psi_1(\alpha_1)$ равнялись 0.

Пусть $\alpha_2 \in \Phi_1$ – некоторый корень, ортогональный α_1 и такой, что $(\alpha_2) \neq 0$; если такого α_2 не существует, то теорема выполняется при $k = 1$. Рассмотрим множество $\Psi_1(\alpha_2)$. Любой его элемент, по лемме 2, лежит в $\Psi_1(\alpha_1)$, $\Psi_0(\alpha_1)$ или $\Psi_{-1}(\alpha_1) = \{\delta - \alpha_1\}$. Коэффициенты (β) при $\beta \in \Psi_1(\alpha_1)$ мы уже сделали равными 0. Применяя лемму 5 несколько раз при $\alpha = \alpha_2$, а β пробегающем все множество $\Psi_1(\alpha_2) \cap \Psi_0(\alpha_1)$, можно добиться того, чтобы все коэффициенты (β) при $\beta \in \Psi_1(\alpha_2) \cap \Psi_0(\alpha_1)$ равнялись 0. При этом мы сопрягаем g корневыми элементами $x_{\beta-\alpha_2}(b)$, а все корни вида $\beta - \alpha_2$ принадлежат $\Phi_0 \cap \Phi_0(\alpha_1)$. Отсюда по леммам 5 и 6 получаем, что все коэффициенты (β) при $\beta \in \Psi_1(\alpha_1) \cup \Psi_1(\alpha_2)$, кроме $(\delta - \alpha_1)$, равны 0. Иначе говоря, ненулевые коэффициенты (β) останутся только при $\beta = \alpha_1$, $\delta - \alpha_1$, α_2 и $\beta \in \Psi_0(\alpha_1) \cap \Psi_0(\alpha_2)$.

Пусть $\alpha_3 \in \Psi_0(\alpha_1) \cap \Psi_0(\alpha_2)$ и $(\alpha_3) \neq 0$; если такого α_3 не существует, то теорема выполняется при $k = 2$. Повторяем сопряжения и рассуждения из предыдущего абзаца. В результате получаем, что ненулевые коэффициенты (β) останутся только при $\beta = \alpha_1$, $\delta - \alpha_1$,

α_2, α_3 и $\beta \in \Psi_0(\alpha_1) \cap \Psi_0(\alpha_2) \cap \Psi_0(\alpha_3)$. Далее, пусть $\alpha_4 \in \Psi_0(\alpha_1) \cap \Psi_0(\alpha_2) \cap \Psi_0(\alpha_3)$ и $(\alpha_4) \neq 0$; если такого α_4 не существует, то теорема выполняется при $k = 3$. Повторяем сопряжения и рассуждения из предыдущего абзаца еще раз. В результате получаем, что ненулевые коэффициенты (β) останутся только при $\beta = \alpha_1$, $\delta - \alpha_1$, α_2, α_3, α_4 и $\beta \in \Psi_0(\alpha_1) \cap \Psi_0(\alpha_2) \cap \Psi_0(\alpha_3) \cap \Psi_0(\alpha_4)$. Однако по утверждению 1 последнее пересечение пустое, значит, ненулевые коэффициенты (β) остались только при $\beta = \alpha_1$, $\delta - \alpha_1$, α_2, α_3 и α_4, что и требовалось. □

Теорема 3. *Любой элемент из U_δ есть произведение не более* 3 *корневых элементов.*

Доказательство. По предыдущей теореме можно считать, что все коэффициенты (α) при $\alpha \neq \alpha_1, \delta - \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равны 0 при $0 \leqslant k \leqslant 4$; кроме того, коэффициенты $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_k)$ не равны 0. Рассмотрим следующие варианты.

1. Пусть $k = 0$. Тогда по пункту 3 предыдущего раздела
$$g = x_\delta(d),$$
то есть g является корневым элементом.

2. Пусть $k = 1$. Тогда по пункту 3 предыдущего раздела
$$g = x_\delta(d) x_{\alpha_1}(a_1) x_{\delta - \alpha_1}(b),$$
то есть g является произведением трех корневых элементов (на самом деле двух, в силу леммы 4, но нам сейчас это не важно).

3. Пусть $k = 2$. Тогда по пункту 3 предыдущего раздела
$$g = x_\delta(d) x_{\alpha_1}(a_1) x_{\alpha_2}(a_2) x_{\delta - \alpha_1}(b).$$
По лемме 4 произведение двух первых корневых элементов в этом разложении является корневым элементом, поскольку $\alpha_1 \in \Phi_1$. Поэтому g снова является произведением трех корневых элементов (на самом деле двух, также как и в предыдущем пункте, но нам это по-прежнему не важно).

4. Пусть $k = 3$. Тогда по пункту 3 предыдущего раздела
$$g = x_\delta(d) x_{\alpha_1}(a_1) x_{\alpha_2}(a_2) x_{\alpha_3}(a_3) x_{\delta - \alpha_1}(b).$$
По лемме 4 произведение двух первых корневых элементов в этом разложении является корневым элементом, поскольку $\alpha_1 \in \Phi_1$. Аналогично, по лемме 4 произведение двух последних корневых элементов также является корневым элементом, поскольку по лемме 2

$\alpha_3 \in \Phi_1(\delta - \alpha_1)$. Таким образом, в этом случае g опять является произведением трех корневых элементов.

5. Пусть $k = 4$ и коэффициент $(\delta - \alpha_1)$ не равен 0. По лемме 1, $\alpha_2 \in \Phi_1(\delta - \alpha_1)$, следовательно, $\gamma = \alpha_2 - (\delta - \alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta$ является корнем. Снова по лемме 1 $\gamma \in \Phi_0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi_1(\gamma)$ и $\delta - \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \in \Phi_{-1}(\gamma)$.

Рассмотрим сопряжение элемента g корневым элементом $x_\gamma(c)$. По описанному выше расположению корня γ и пункту 4 предыдущего раздела получаем, что при таком сопряжении к коэффициенту (α_2) прибавляется $\pm c(\delta - \alpha_1)$, коэффициент $(\alpha_3 + \gamma)$ становится равным $\pm c(\alpha_3)$, коэффициент $(\alpha_4 + \gamma)$ становится равным $\pm c(\alpha_4)$, а все остальные коэффициенты не меняются. Выберем c так, чтобы коэффициент (α_2) стал равен 0; тогда по пункту 3 предыдущего раздела

$$g = x_\delta(d) x_{\alpha_1}(a_1) x_{\alpha_3+\gamma}(b_1) x_{\alpha_4+\gamma}(b_2) x_{\alpha_4}(a_4) x_{\alpha_3}(a_3) x_{\delta-\alpha_1}(b).$$

По леммам 1 и 4 произведение первых трех корневых элементов в этом произведении является корневым элементом. Произведение четвертого и пятого корневых элементов, снова по лемме 4, также является корневым элементом. Наконец, произведение двух последних корневых элементов, по леммам 2 и 4, тоже является корневым элементом. Таким образом, и в этом случае g есть произведение трех корневых элементов.

6. Осталось рассмотреть случай, когда $k = 4$, а коэффициент $(\delta - \alpha_1)$ равен 0. В этом случае нам понадобятся два сопряжения. Во-первых, пусть $\gamma_1 = \delta - \alpha_1 - \alpha_2$. Поскольку γ_1 равен, очевидно, $-\gamma$ из 5 пункта, то $\gamma_1 \in \Phi_0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi_{-1}(\gamma_1)$ и $\delta - \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \in \Phi_1(\gamma_1)$. Рассмотрим сопряжение элемента g корневым элементом $x_{\gamma_1}(c_1)$. Тогда по пункту 4 предыдущего раздела получаем, что при таком сопряжении коэффициент $(\delta - \alpha_1)$ становится равным $\pm c_1(\alpha_2)$, коэффициент $(\delta - \alpha_2)$ становится равным $\pm c_1(\alpha_1)$, а все остальные коэффициенты не меняются. Число c_1 можно выбрать любым, не равным 0. Таким образом, после этого сопряжения ненулевые коэффициенты у g – это в точности (α_1), $(\delta - \alpha_1)$, (α_2), $(\delta - \alpha_2)$, (α_3) и (α_4).

Во-вторых, пусть $\gamma_2 = \alpha_3 - (\delta - \alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_3 - \delta$. По лемме 1 $\alpha_3 \in \Phi_1(\delta - \alpha_1)$, следовательно, γ_2 является корнем. Снова по лемме 1 $\gamma_2 \in \Phi_0$, $\alpha_1, \delta - \alpha_2, \alpha_3 \in \Phi_1(\gamma_2)$ и $\delta - \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \Phi_{-1}(\gamma_2)$. При этом по утверждению 1 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\delta$, откуда $\alpha_2 + \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \delta = \delta - \alpha_4$ и $\alpha_4 + \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - \delta = \delta - \alpha_2$. Рассмотрим сопряжение элемента g корневым элементом $x_{\gamma_2}(c_2)$. Тогда по пункту 4 предыдущего раздела получаем, что при таком сопряжении к коэффициенту (α_3) прибавляется $\pm c_2(\delta-\alpha_1)$, к коэффициенту $(\delta-\alpha_2)$ прибавляется $\pm c_2(\alpha_4)$, коэффициент $(\delta-\alpha_4)$ становится равным $\pm c_2(\alpha_2)$, а все остальные коэффициенты не меняются. Выберем c_2 так, чтобы коэффициент (α_3) стал равен 0; тогда по пункту 3 предыдущего раздела

$$g = x_\delta(d)x_{\alpha_1}(a_1)x_{\delta-\alpha_4}(b_1)x_{\delta-\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_4}(a_4)x_{\alpha_2}(a_2)x_{\delta-\alpha_1}(b).$$

По леммам 1 и 4 произведение первых трех корневых элементов в этом произведении является корневым элементом. Произведение четвертого и пятого корневых элементов, снова по лемме 4, также является корневым элементом. Наконец, произведение двух последних корневых элементов, по леммам 2 и 4, тоже является корневым элементом. Таким образом, и в этом случае g есть произведение трех корневых элементов. □

Литература

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — В кн.: Семинар по алгебраическим группам, Мир, М., 1973, 9–59.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Главы IV–VI, Мир, М., 1972.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Главы VII–VIII, Мир, М., 1978.
4. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
5. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 54–83.
6. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые торы в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **24** (2012), No. 3, 22–83.
7. О. О'Мира, *Лекции о линейных группах.* — В кн.: Автоморфизмы классических групп. Мир, М., 1976, с. 57–167.
8. О. О'Мира, *Лекции о симплектических группах.* Мир, М., 1979.
9. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых элементов в группах типа* E_6. — Алгебра и анализ **23** (2011), No. 3, 261–309.
10. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, I. — Алгебра и анализ **23** (2011), No. 5, 155–198.
11. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 242–264.
12. И. М. Певзнер, *Ширина группы* $\mathrm{GL}(6,K)$ *относительно множества квазикорневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 183–204.
13. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы.* — В кн.: Алгебраическая геометрия – 4. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления **55**, ВИНИТИ, М., 1989, с. 5–136.
14. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М., 1975.
15. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.

16. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* МЦНМО, М., 2003.
17. A. Cohen, A. Steinbach, R. Ushirobira, D. Wales, *Lie algebras generated by extremal elements.* — J. Algebra **236** (2001), no. 1, 122–154.
18. J. Dieudonné, *Sur les générateurs des groupes classiques.* — Summa Brasil. Math. **3** (1955), 149–179.
19. T. A. Springer, *Linear algebraic groups.* Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1998.

Pevzner I. M. Width of extraspecial unipotent radical with respect to root elements.

Let $G = G(\Phi, K)$ be a Chevalley group of type Φ over a field K, where Φ is a simply-laced root system. We study the extraspecial unipotent radical of G and prove that any its element is a product of not more than three root elements. Moreover, we prove that any element of the radical is, possibly after a conjugation by an element of the Levi subgroup, a product of six elementary root elements.

РГПУ им. А.И. Герцена
наб. р. Мойки, д.48
191186, Санкт-Петербург,Россия
E-mail: pevzner_igor@mail.ru

Поступило 1 октября 2015 г.