Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 435, 2015 г.

А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский

ПОЛУЦЕПНЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА КОНЕЧНЫХ ГРУПП. СПОРАДИЧЕСКИЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ И ГРУППЫ СУДЗУКИ

§1. Введение

В этой работе мы продолжаем (см. [17, 28]) исследование вопроса о полуцепности группового кольца FG конечной группы G над полем F простой характеристики p. Например, как было показано в [28] (см. также [10, теорема 4.1]), ответ на этот вопрос зависит только от характеристики поля (в частности, он одинаков для простого поля и его алгебраического замыкания).

По теореме Машке только случай, когда характеристика поля делит порядок группы, нетривиален (иначе кольцо FG классически полупросто). Далее, не оговаривая, будем рассматривать только этот случай. Более того, по результату Хигмана [13], для полуцепности кольца FG необходимо, чтобы силовская p-подгруппа P группы G была циклической. Для алгебраически замкнутого поля ответ на интересующий нас вопрос в принципе известен (см. [31, глава VII]): кольцо FG полуцепно, если и только если дерево Брауэра каждого блока является звездой, чья исключительная вершина располагается в центре.

Поскольку вычисление деревьев Брауэра является сложной задачей и для ряда (даже простых) групп деревья Брауэра пока неизвестны, то, с нашей точки зрения, такой ответ не является окончательным, а скорее доставляет удобный критерий для проверки полуцепности. Идеальный ответ должен быть по возможности дан в виде теоретико-групповых условий на G.

В настоящей работе мы сформулируем гипотезу о необходимом и достаточном условии на группу G (которое близко к p-разрешимости) для того, чтобы кольцо FG было полуцепно. Напомним, что полуцепность кольца FG для p-разрешимой группы с циклической силовской подгруппой P вытекает из результатов Мориты [22] (см. также [25]).

Ключевые слова: полуцепное кольцо, групповое кольцо, спорадические простые группы, группы Судзуки.

В этом случае группа G допускает нормальный композиционный ряд $\{e\} < O_{p'} < K < G$, в котором $K/O_{p'} \cong P$.

Пусть группа G не p-разрешима. Мы предполагаем, что кольцо FG полуцепно, если и только если G допускает нормальный композиционный ряд $\{e\} < O_{p'} < K < G$, в котором K – наименьшая нормальная подгруппа, строго содержащая $O_{p'}$, причем $H = K/O_{p'}$ – простая нециклическая группа с полуцепным кольцом FH.

Необходимость в этой гипотезе несложно проверить, используя теоремы о строении групп с циклической силовской подгруппой. Чтобы доказать достаточность, нужно сначала выписать список простых групп H и характеристик p таких, что кольцо FH полуцепно.

Например, в [30] показано, что групповое кольцо FA_n полуцепно и не классически полупросто только в случае $p = 3$ и $n = 3, 4, 5$. В [29] (с использованием результатов работы [6]) выписан список групп $\mathrm{PSL}(2, q)$, групповое кольцо которых полуцепно (таких групп бесконечное число: например, при $p \geqslant 3$ все они таковы, если p делит $q - 1$).

В этой заметке мы продолжим начатую работу, рассмотрев простые спорадические группы и простые группы Судзуки $\mathrm{Sz}(q)$. Например, мы покажем, что для простых спорадических групп только одна группа Матье M_{11}, $p = 5$ и одна группа Янко J_1, $p = 3$ попадают в наш список. Число групп Судзуки $\mathrm{Sz}(q)$ с полуцепным кольцом бесконечно: все они таковы, если p делит $q - 1$; иначе полуцепность возникает только в случае $p = 5$.

Исследуя спорадические группы, мы отбрасываем ненужные (с неполуцепным групповым кольцом), используя доступную информацию о деревьях Брауэра и необходимые условия (в терминах централизаторов силовских подгрупп и числа классов сопряженности инволюций) полуцепности главного блока из работы Блау [3]. Оставшиеся несколько примеров (с неизвестными деревьями Брауэра) без труда анализируются, используя таблицу обычных характеров. Заметим, что в некоторых случаях (например, для $G = M_{23}$, $p = 5$) главный блок является полуцепным кольцом, но существуют неглавные неполуцепные блоки.

§2. Гипотеза о редукции к простым группам

Напомним, что модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению; и *полуцепным*, если M разлагается в прямую сумму цепных модулей. Скажем, что кольцо R *полуцепное*, если R полуцепно как правый и как левый модуль над собой. Общую теорию полуцепных колец можно найти в [1, глава 8] и [24].

Нас будет интересовать вопрос о полуцепности группового кольца FG конечной группы G над полем F. Напомним (см. [28]), что полуцепность кольца FG зависит только от характеристики p. Итак, можно считать поле F достаточно хорошим для того, чтобы ссылаться на известные результаты (обычно для этих ссылок хватает алгебраической замкнутости, но в [31] требуется несколько больше).

Следующая редукция будет полезной в дальнейших рассуждениях.

Факт 1 ([31, теорема VI.2.7])**.** Пусть H – нормальная подгруппа группы G, содержащая силовскую p-подгруппу P. Тогда кольцо FG полуцепно, если и только если кольцо FH полуцепно.

Через $O_{p'}$ будем обозначать наибольшую нормальную p'-подгруппу группы G. Нам потребуются некоторые сведения из теории групп с циклической силовской подгруппой. А именно (см. [27]), такая группа является p-разрешимой, если и только если G обладает нормальным композиционным рядом $\{e\} \subset O_{p'} \subset K' \subset G$ таким, что $K'/O_{p'} \cong P$ и группа G/K' циклична.

Заметим, что в этом случае G обладает наименьшей собственной нормальной подгруппой K, строго содержащей $O_{p'}$, причем группа $K/O_{p'}$ простая абелева. Однако K не обязана включать всю группу P. Например, пусть $G = D_{18}$ и $p = 3$. Тогда $P \cong C_9,\ O_{p'} = 1,\ K \cong C_3$, поэтому P не содержится в K.

Для не p-разрешимых групп можно сказать больше.

Факт 2 (см. [3, лемма 5.2] и [23, лемма 6.1])**.** Пусть G – не p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой P. Тогда существует наименьшая нормальная подгруппа K группы G, собственно содержащая $O_{p'}$. Более того, K содержит P, причем фактор-группа $H = K/O_{p'}$ – простая неабелева.

Итак, в этом случае мы также получаем нормальный композиционный ряд $\{e\} \subset O_{p'} \subset K \subset G$, причем G/K является p'-группой.

Теперь мы готовы сформулировать основную гипотезу.

Гипотеза 3. Пусть G – конечная группа с нетривиальной циклической силовской p-подгруппой P и пусть F – поле характеристики p. Тогда следующие условия эквивалентны.

1) Групповое кольцо FG полуцепно.

2) Либо G p-разрешима; либо кольцо FH полуцепно, где группа H определена в факте 2.

Необходимость в этой гипотезе доказывается легко. Поскольку групповое кольцо p-разрешимой группы полуцепно, то можно считать, что G не p-разрешима. По факту 1 из полуцепности FG вытекает полуцепность кольца FK. Но тогда и кольцо FH полуцепно как гомоморфный образ полуцепного кольца.

Заметим, что для доказательства достаточности гипотезы (рассуждая как выше) можно считать, что $G = K$. Тогда группа K действует (сопряжением) на классически полупростом кольце $FO_{p'}$, и требуется доказать, что результат этого действия является полуцепным кольцом. Вычисления в компьютерной системе MAGMA [4] над простыми полями показывают, что это верно для групп порядка $\leqslant 504$. Конечно, простые группы, возникающие как факторы в группах таких порядков, малы (самая большая – это группа $\mathrm{PSL}(2,7)$ порядка 168).

Заметим также (см. [31, лемма IV.4.12]), что подгруппа $O_{p'}$ состоит в точности из таких элементов группы G, которые действуют тривиально на главном блоке кольца FG. Поэтому вопрос о полуцепности главного блока, который исследовал Блау [3], редуцируется к случаю простой группы. Но, как мы увидим ниже, полуцепность главного блока не гарантирует полуцепности всего кольца FG.

§3. Сведения из теории модулярных представлений конечных групп

Напомним некоторые сведения о деревьях Брауэра для групп с циклической силовской подгруппой. Основные определения и факты, связанные с этим понятием, можно найти в [2, 14, 31].

Пусть B – p-блок группы G с циклической дефектной группой D порядка p^d. Число d называется *дефектом* блока B. Говорят, что блок B имеет *максимальный дефект*, если $D = P$ (где P – силовская p-подгруппа группы G). Главный блок всегда имеет максимальный дефект. Дефектная группа D является единичной группой, если и только если B полупрост.

Пусть $e = |\mathrm{IBr}(B)|$ – число неприводимых характеров Брауэра блока B. Множество обыкновенных неприводимых характеров $\mathrm{Irr}(B)$ блока B разбивается на два подмножества. Элементы первого подмножества $\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ называются *исключительными* характерами. В частности, они имеют одинаковые ограничения на p-регулярные классы сопряженных элементов. Остальные характеры из множества $\mathrm{Irr}(B)$ называются *неисключительными*. Их количество равно e, – запишем их как $\chi_1, \ldots, \chi_e$. Положим $\chi_{e+1} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda$.

Деревом Брауэра блока B называется неориентированный граф, вершинами которого являются которого неисключительные характеры $\chi_1, \ldots, \chi_e$, и одна (исключительная) вершина χ_{e+1}, представляющая все исключительные характеры. На графе Брауэра исключительную вершину будем обозначать черным кружком $\bullet$ с указанием ее кратности $m = |\Lambda|$. Если $m = 1$, то мы не считаем вершину χ_{e+1} исключительной, и обозначаем ее кружком $\circ$ таким же, как и остальные вершины.

Две различные вершины χ_i и χ_j соединяются ребром, если характер $\chi_i + \chi_j$ проективен (то есть является характером проективного модуля в B). При этом ребра соответствуют неприводимым характерам Брауэра.

Если χ – обыкновенный характер блока B, то его сужение на p-регулярные классы разлагается в прямую сумму характеров Брауэра. Кратность характера Брауэра ϕ в этом разложении обозначается $d_{\chi,\phi}$, и все такие кратности образуют *матрицу разложения* блока B. Дерево Брауэра блока B легко восстанавливается по матрице разложения. А именно, вершины χ и ξ соединены ребром, если и только если существует характер Брауэра $\phi \in \mathrm{IBr}(B)$ такой, что $d_{\chi,\phi} \neq 0$ и $d_{\xi,\phi} \neq 0$ [16].

Например, следующему дереву Брауэра с двумя обыкновенными характерами χ_1, χ_2 и исключительными характерами χ_3, χ_4

$\circ_{\chi_1} \xrightarrow{\;\phi_1\;} \bullet_{\chi_{3,4}} \xrightarrow{\;\phi_2\;} \circ_{\chi_2}$

соответствует следующая матрица разложения:

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
ϕ_1	1	0	1	1
ϕ_2	0	1	1	1

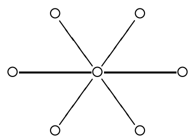
Нам потребуются некоторые факты, помогающие вычислять деревья Брауэра. Пусть x обозначает порождающий дефектной группы D блока B. Тогда справедливы следующие утверждения.

Факт 4. [14, с. 2]

1) Существует такое целое число $n \geqslant 1$, что $\chi_i(x) = \pm n$ для всех $i = 1, \ldots, e+1$.

2) Если вершины χ_i и χ_j соединены ребром, то $\chi_i(x) = -\chi_j(x)$.

Будем называть дерево Брауэра *звездой*, если в нем не существует путей длины больше 2. В частности, такое дерево может состоять из одного ребра или одной вершины. Типичный вид звезды:



Следующий факт дает важный критерий полуцепности блока в терминах его дерева Брауэра (хотя полуцепность не зависит от поля, дерево Брауэра нужно считать над алгебраически замкнутым полем).

Факт 5 ([31, следствие VII.2.22])**.** Блок B полуцепной тогда и только тогда, когда его дерево Брауэра является звездой, причем исключительная вершина (если таковая имеется) находится в центре звезды.

Нам также потребуется следующее следствие этого факта, которое (для удобства) мы сформулируем для простых групп. Через $C_G(P)$ и $N_G(P)$ обозначаем централизатор и нормализатор подгруппы P в G.

Факт 6 ([3, теорема 1, следствие 1])**.** Пусть G – простая неабелева группа с нетривиальной циклической силовской p-подгруппой P. Пусть дерево Брауэра главного блока B_0 кольца FG является звездой с e_0 ребрами. Тогда:

1) e_0 – четное число;

2) если $|C_G(P)|$ нечетно, то G имеет единственный класс инволюций.

Поскольку дефектной группой главного p-блока B_0 группы G является вся силовская p-подгруппа P, то число ребер e_0 блока B_0 может быть найдено по формуле $e_0 = |N_G(P)/C_G(P)|$ [2, с. 212], в частности, e_0 делит $p-1$. Более того, кратность исключительной вершины блока B_0 равна $(|P|-1)/e_0$ [2, теорема 6.5.5].

Для произвольного блока B с дефектной группой D число ребер e в его дереве Брауэра делит $p-1$, а кратность исключительной вершины равна $(|D|-1)/e$.

§4. Групповые кольца простых спорадических групп

В этом параграфе мы докажем следующую теорему, описывающую простые спорадические группы, чьи групповые кольца полуцепны.

Теорема 7. *Пусть G – простая спорадическая группа и F – поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG полуцепно, если и только если либо $G = M_{11}$, $p = 5$, либо $G = J_1$, $p = 3$.*

Доказательство этой теоремы займет два параграфа, оно заключается в последовательном рассмотрении списка простых спорадических групп и деревьев Брауэра их p-блоков.

Промежуточные результаты вычислений занесены в таблицу, расположенную в параграфе 6. В ней содержатся инварианты простых спорадических групп, а также указаны ссылки на известные деревья Брауэра или матрицы разложения. Количество классов инволюций (КИ) и порядки централизаторов силовских подгрупп взяты из таблиц характеров [8], порядки нормализаторов – из работы [18] (эти данные приводим только для циклической силовской подгруппы).

Примерно в половине случаев критерий Блау (факт 6) позволяет установить неполуцепность группового кольца. Для большинства простых спорадических групп деревья Браэура p-блоков (либо матрицы разложения) известны. Отдельного рассмотрения (параграф 5) требуют группы Fi'_{24} и BM.

Отрезком длины n будем называть (связный) граф с n ребрами и $n+1$ вершинами, в котором каждая вершина, кроме двух концов отрезка, принадлежит ровно двум ребрам. Например, на следующем рисунке показан отрезок длины 4:

$$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$$

Если число n велико и отрезок не содержит исключительных вершин, то для экономии места будем изображать его как $\circ -_{(n)}- \circ$. На дереве Брауэра индекс 1 возле (неисключительной) вершины указывает позицию тривиального характера.

Если хотя бы для одного p-блока группы G дерево Брауэра не является звездой, либо является звездой, но имеет кратную исключительную вершину, не лежащую в центре, то кольцо FG не будет полуцепным.

Если силовская 2-подгруппа P группы G циклическая, то G является 2-нильпотентной, т.е. имеет нормальную подгруппу H, такую что $G/H \cong P$ [21, теорема 2.1]. Следовательно, в простой неабелевой группе силовская 2-подгруппа всегда нециклическая.

В тексте используются следующие обозначения из ATLAS [8]. Через $A.B$ обозначается группа G с нормальной подгруппой A такой, что $G/A \cong B$; через $G = A : B$ – полупрямое произведение (где A – нормальная подгруппа, на которой действует B); p^k – элементарная абелева группа $C_p \times \cdots \times C_p$ (k раз); p^{k+l} – любая группа вида $p^k.p^l$.

4.1. Простые группы Матье.

Напомним порядки групп Матье: $|M_{11}| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, $|M_{12}| = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$, $|M_{22}| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, $|M_{23}| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$, $|M_{24}| = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$. Вычисляя в GAP [11], убеждаемся, что для всех этих групп силовские 3-подгруппы нециклические. При $p > 5$ неполуцепность группового кольца для всех групп Матье устанавливается с использованием факта 6. Осталось рассмотреть случай $p = 5$.

В этом случае для трех групп M_{12}, M_{22} и M_{24}, используя матрицы разложения [5], заключаем, что деревья Брауэра главных 5-блоков этих групп являются отрезком длины 4 без кратных исключительных вершин:

$$\circ_1 \text{———} \circ \text{———} \circ \text{———} \circ \text{———} \circ$$

Для $G = M_{11}$, $p = 5$ дерево Брауэра главного блока является звездой с 4-мя ребрами [14, с. 64]. Поскольку кратность исключительной вершины равна $(5-1)/4 = 1$ и других дефектных блоков нет, то групповое кольцо FG является полуцепным.

Для $G = M_{23}$, $p = 5$ главный блок полуцепной, т.к. (см. [14, с. 104]) его дерево Брауэра является звездой с 4-мя ребрами без кратных исключительных вершин. Однако имеется еще один дефектный 5-блок, чье дерево Брауэра – отрезок длины 2 с исключительной вершиной кратности 2 на конце. Значит, в этом случае кольцо FG не полуцепное.

Таким образом, среди групп Матье только для M_{11} и поля характеристики 5 соответствующее групповое кольцо будет полуцепным.

4.2. Группы Янко.

1) $G = J_1$ – группа порядка $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$.

Для $p = 3$ имеется 4 дефектных блока, и их деревья Брауэра являются отрезками длины 2 без кратных исключительных вершин [14, с. 70]. Итак, кольцо FG полуцепное.

Для $p = 5$ по [14, с. 71] имеется 3 дефектных блока, и их деревья Брауэра – отрезки длины 2. Для всех блоков кратность исключительной вершины равна $(5-1)/2 = 2$. При этом в главном блоке она находится в центре, а в двух остальных дефектных блоков – на конце отрезка, поэтому кольцо FG не полуцепное.

Для $p = 7,\ 11,\ 19$ дерево Браэура главного p-блока не является звездой [14].

Таким образом, групповое кольцо FJ_1 будет полуцепным только в случае поля F характеристики 3.

2) $G = J_2$ – группа порядка $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Силовская подгруппа циклическая только для $p = 7$, причем в этом случае дерево Брауэра главного 7-блока является отрезком длины 6 без кратных исключительных вершин [5, 15], т.е. кольцо FG не полуцепное.

3) $G = J_3$ – группа порядка $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$, причем силовская 3-подгруппа нециклическая [11].

Для $p = 5$ по матрице разложения [5] заключаем, что дерево Брауэра главного блока является отрезком длины 2 с исключительной вершиной кратности 2 на краю; для $p = 17$ – отрезком длины 8.

Для $p = 19$ используем факт 6 (см. таблицу).

Таким образом, для группы J_3 полуцепных групповых колец не возникает.

4) $G = J_4$ – группа порядка $2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$. Нецикличность силовской p-подгруппы для $p = 3,\ 11$ следует из наличия в группе J_4 максимальных подгрупп $2^{11} : M_{24}$ и $11^{1+2} : (5 \times 2S_4)$ соответственно [8]. Для главных блоков с циклической дефектной группой деревья Браэура известны и не являются звездами [14].

4.3. Группы Фишера.

1) Fi_{22} – группа порядка $2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Для $p = 7$ дерево Брауэра главного блока есть отрезок длины 6 без кратных вершин [5]. Для остальных p используем факт 6 (см. таблицу).

2) Fi_{23} – группа порядка $2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$.

Для $p = 3,\ 5$ силовская p-подгруппа нециклическая [11]. Для $p > 5$ деревья Брауэра главного p-блока известны и не являются звездами [14].

3) Fi'_{24} – группа порядка $2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$.

Для $p = 3,\ 5,\ 7$ силовская p-подгруппа не циклическая [11]. Для $p = 17,\ 23,\ 29$ используем факт 6 (см. таблицу). Для $p = 11,\ 13$ деревья Брауэра нам не известны, и эти случаи будут рассмотрены в параграфе 5.

4.4. Группы Конвея.

Порядки групп Конвея: $|Co_1| = 2^{21}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 23$, $|Co_2| = 2^{18}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11\cdot 23$, $|Co_3| = 2^{10}\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11\cdot 23$.

В группах Co_1, Co_2 и Co_3 силовская p-подгруппа нециклическая для $p = 3$ и $p = 5$; в группе Co_1 также и для $p = 7$ [11].

Для групп Co_2 и Co_3 деревья Брауэра блоков с циклической дефектной группой известны [14], а для Co_1 известны матрицы разложения [5]. Так, деревья Брауэра главных p-блоков группы Co_1 для $p = 11$ и $p = 13$ имеют следующий вид:

$p = 11$:

$$\circ_1 \text{ -(10)- } \circ\ .$$

$p = 13$:

$$\begin{tikzcd} & \circ \arrow[d, dash] & \\ \circ_1 \arrow[r, dash, "(6)"] & \circ \arrow[r, dash, "(4)"] \arrow[d, dash] & \circ \\ & \circ & \end{tikzcd}$$

Для Co_1, $p = 23$ число вершин e_0 нечетно (см. таблицу), поэтому можно применить факт 6.

4.5. Группа Харады–Нортона HN. Порядок группы равен $2^{14}\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7\cdot 11\cdot 19$.

Поскольку $A_{12} \leqslant HN$ [8], то для $p = 3,\ 5$ силовская p-подгруппа группы HN нециклическая. Для $p > 5$ деревья Брауэра главного блока известны [14].

4.6. Группа Хигмана–Симса HS. Порядок группы равен $2^9\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11$. См. таблицу.

4.7. Группа Хельда He. Порядок группы равен $2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 17$. См. таблицу.

4.8. Группа МакЛафлина McL. Порядок группы равен $2^7\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11$. См. таблицу.

4.9. Группа Судзуки Suz**.** Порядок группы равен $2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Для $p = 7$ дерево Брауэра главного блока есть отрезок длины 6 без кратных исключительных вершин [5]. Для остальных p см. таблицу.

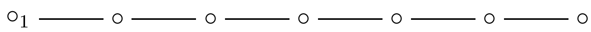
4.10. Группа Лайонса Ly**.** Порядок группы равен $2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$.

Нецикличность силовской p-подгруппы для $p = 3, 5$ вытекает из наличия в группе Ly максимальных подгрупп $3^5 : (2 \times M_{11})$ и $5^{1+4} : (4.S_6)$ соответственно [8]. Для $p > 5$ деревья Браэура главного блока известны [14, 19].

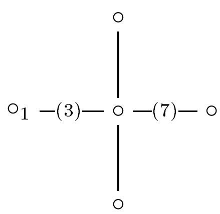
4.11. Группа Рюдвалиса Ru**.** Порядок группы равен $2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$.

Для $p = 7,\ 13$ деревья Брауэра главного блока не являются звездами [5]:

$p = 7$:



$p = 13$:



Для остальных p см. таблицу.

4.12. Группа О'Нана $O'N$**.** Порядок группы равен $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$.

Для $p = 2,\ 3,\ 7$ силовская p-подгруппа не циклическая [11]. Для $p = 31$ можно применить факт 6 (см. таблицу).

Для $p = 5,\ 11,\ 19$ деревья Брауэра главного блока являются отрезками длины 4, 10 и 6 соответственно [5].

4.13. Группа Томпсона Th**.** Порядок группы равен $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$.

Для $p = 3,\ 5,\ 7$ силовская p-подгруппа не циклическая, поскольку Th содержит подгруппы $3^5 : 2.S_6$, $5^2 : GL_2(5)$ и $7^2 : (3 \times 2S_4)$ [8]. Для $p > 7$ деревья Браэура главного блока известны и они не являются звездами [9, 14].

4.14. Группа "маленький монстр" BM. Порядок группы равен $2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$.

Для $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7$ силовская p-подгруппа не циклическая, так как Th содержится в BM как подгруппа [8].

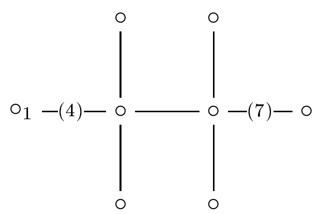
Для $p = 23,\ 31,\ 47$ см. таблицу.

Для $p = 11,\ 17$ деревья Брауэра главного блока не являются звездами [5]:

$p = 11$:

$$\circ_1 -(10)- \circ\ .$$

$p = 17$:



Для $p = 13,\ 19$ деревья Брауэра нам неизвестны. Эти случаи будут рассмотрены в параграфе 5.

4.15. Группа–Монстр M **Фишера–Грейса.** Порядок группы равен $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$.

Для $p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13$ силовская p-подгруппа не циклическая, т.к. M содержит подгруппы $S_3 \times Th$, $11^2 : (5 \times 2A_5)$ и $13^{1+2} : (3 \times 4S_4)$ [8].

Для главных блоков с циклической дефектной группой деревья Брауэра известны [14], за исключением $p = 29$, но в этом случае неполуцепность главного блока следует из нечетности порядка $C_G(P)$.

Таким образом, осталось проверить полуцепность групповых колец для Fi'_{24} ($p = 11,\ 13$) и BM ($p = 13,\ 19$).

§5. Группы Fi'_{24} и BM

В этом параграфе мы покажем, что

Лемма 8. *Для* $G = BM$, $p = 13,\ 19$ *и* $G = Fi'_{24}$, $p = 11,\ 13$ *дерево Брауэра главного* p*-блока группы* G *не является звездой.*

Заметим, что тривиальный характер соединен самое большее с одной вершиной и принимает значение 1 на порождающем элементе x силовской p-подгруппы P. Кроме того (см. вычисления ниже), во всех рассматриваемых случаях кратность исключительной вершины главного блока равна 1.

По факту 4 достаточно показать, что главному блоку принадлежит хотя бы два характера, принимающих значение -1 на x. Будем использовать следующее достаточное условие принадлежности характера главному блоку, которое непосредственно вытекает из [14, теорема 2.1.8].

Факт 9. Пусть χ – обыкновенный неприводимый характер группы G. Если для любого элемента $g \in G$, порядок которого взаимно прост с p, выполнено

$$\left(\frac{\chi(g)}{\chi(1)} - 1\right) \cdot \frac{|G|}{|C_G(g)|} \equiv 0 \pmod{p},$$

то характер χ лежит в главном p-блоке группы G.

1. Группа BM**.**

а) Для $p = 13$ (см. таблицу) находим, что число ребер в главном блоке $e_0 = 12$. Тогда кратность исключительной вершины равна $(13-1)/12 = 1$, т.е. главный блок не содержит кратных вершин. Используя факт 9, по таблицам характеров группы BM проверяем (вычисляя, например, в программе GAP), что характеры χ_{18} и χ_{37} (в нумерации ATLAS [8]) принадлежат главному блоку и принимают значение -1 на элементе x.

б) Для $p = 19$ число ребер $e_0 = 18$. В качестве требуемых характеров можно взять χ_9 и χ_{30}.

2. Группа Fi'_{24}**.**

а) Для $p = 11$ число ребер $e_0 = 10$. Требуемые характеры – χ_{18} и χ_{19}.

б) Для $p = 13$ число ребер $e_0 = 12$. Требуемые характеры – χ_8 и χ_{26}.

§6. Таблица для спорадических групп

Таблица 1. Полуцепность групповых колец спорадических групп.

G	КИ	p	$\|C_G(P)\|$	$\|N_G(P)\|$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
M_{11}	1	$2, 3$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		5	5	20	4	да	[14, с. 64]
		11	11	55	5	нет	[14, с. 65]; $2 \nmid e_0$
M_{12}	2	$2, 3$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		5	10	40	4	нет	[5]
		11	11	55	5	нет	$2 \nmid e_0$
M_{22}	1	$2, 3$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		5	5	20	4	нет	[5]
		7	7	21	3	нет	$2 \nmid e_0$
		11	11	55	5	нет	$2 \nmid e_0$
M_{23}	1	$2, 3$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		5	15	60	4	нет	[14, с. 104]
		7	14	42	3	нет	[14, с. 105]; $2 \nmid e_0$
		11	11	55	5	нет	[14, с. 106]; $2 \nmid e_0$
		23	23	253	11	нет	[14, с. 107]; $2 \nmid e_0$
M_{24}	2	$2, 3$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		5	60	240	4	нет	[14, с. 126]
		7	42	126	3	нет	[14, с. 128]; $2 \nmid e_0$
		11	11	110	10	нет	[14, с. 130]; $2 \nmid \|C_G(P)\|$
		23	23	253	11	нет	[14, с. 131]; $2 \nmid e_0$
J_1	1	2	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		3	30	60	2	да	[14, с. 70]
		5	30	60	2	нет	[14, с. 71]
		7	7	42	6	нет	[14, с. 72]
		11	11	110	10	нет	[14, с. 74]
		19	19	114	6	нет	[14, с. 76]

G	КИ	p	$\lvert C_G(P)\rvert$	$\lvert N_G(P)\rvert$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
J_2	2	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	7	42	6	нет	[15] или [5]
J_3	1	$2, 3$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		5	30	60	2	нет	[5]
		17	17	136	8	нет	[5]
		19	19	171	9	нет	$2 \nmid e_0$
G	КИ	p	$\lvert C_G(P)\rvert$	$\lvert N_G(P)\rvert$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
J_4	2	$2, 3, 11$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		5	6720	26880	4	нет	[14, с. 327]
		7	840	2520	3	нет	[14, с. 331]; $2 \nmid e_0$
		23	23	506	22	нет	[14, с. 336]; $2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
		29	29	812	28	нет	[14, с. 341]; $2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
		31	31	310	10	нет	[14, с. 345]; $2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
		37	37	444	12	нет	[14, с. 346]; $2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
		43	43	602	14	нет	[14, с. 348]; $2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
Fi_{22}	3	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	42	252	6	нет	[5]
		11	22	110	5	нет	$2 \nmid e_0$
		13	13	78	6	нет	$2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
Fi_{23}	3	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	840	5040	6	нет	[14, с. 289]
		11	44	440	10	нет	[14, с. 296]
		13	78	468	6	нет	[14, с. 299]
		17	17	272	16	нет	[14, с. 302]; $2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
		23	23	253	11	нет	[14, с. 303]; $2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$

G	КИ	p	$\|C_G(P)\|$	$\|N_G(P)\|$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
Fi'_{24}	2	$2, 3, 5, 7$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		11	132	1320	10	нет	лемма 8
		13	234	2808	12	нет	лемма 8
		17	17	272	16	нет	$2 \nmid \|C_G(P)\|$
		23	23	253	11	нет	$2 \nmid \|C_G(P)\|$
		29	29	406	14	нет	$2 \nmid \|C_G(P)\|$
Co_1	3	$2, 3, 5, 7$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		11	66	660	10	нет	[5]
		13	156	1872	12	нет	[5]
		23	23	253	11	нет	$2 \nmid e_0$
Co_2	3	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	56	336	6	нет	[14, с. 212]
		11	11	110	10	нет	[14, с. 216]; $2 \nmid \|C_G(P)\|$
		23	23	253	11	нет	[14, с. 217]; $2 \nmid \|C_G(P)\|$
G	КИ	p	$\|C_G(P)\|$	$\|N_G(P)\|$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
Co_3	2	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	42	252	6	нет	[14, с. 204]
		11	22	110	5	нет	[14, с. 207]; $2 \nmid e_0$
		23	23	253	11	нет	[14, с. 209]; $2 \nmid e_0$
HN	2	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая (п. 4.5)
		7	420	2520	6	нет	[14, с. 249]
		11	22	220	10	нет	[14, с. 253]
		19	19	171	9	нет	[14, с. 255]; $2 \nmid e_0$
HS	2	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	7	42	6	нет	$2 \nmid \|C_G(P)\|$
		11	11	55	5	нет	$2 \nmid \|C_G(P)\|$

G	КИ	p	$\lvert C_G(P)\rvert$	$\lvert N_G(P)\rvert$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
He	2	$2, 3, 5, 7$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		17	17	136	8	нет	[14, с. 141]; $2 \nmid e_0$
McL	1	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	14	42	3	нет	$2 \nmid e_0$
		11	11	55	5	нет	$2 \nmid e_0$
Suz	2	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	84	504	6	нет	[5]
		11	11	110	10	нет	$2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
		13	13	78	6	нет	$2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
Ly	1	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая (п. 4.10)
		7	168	1008	6	нет	[14, с. 257]
		11	66	330	5	нет	[14, с. 262]; $2 \nmid e_0$
		31	31	186	6	нет	[14, с. 267]
		37	37	666	18	нет	[14, с. 268] или [19]
		67	67	1474	22	нет	[14, с. 271] или [19]
G	КИ	p	$\lvert C_G(P)\rvert$	$\lvert N_G(P)\rvert$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
Ru	2	$2, 3, 5$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		7	28	168	6	нет	[5]
		13	52	624	12	нет	[5]
		29	29	406	14	нет	$2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
$O'N$	1	$2, 3, 7$	—	—	—	нет	P не циклическая [11]
		5	180	720	4	нет	[5]
		11	11	110	10	нет	[5]
		19	19	114	6	нет	[5]
		31	31	465	15	нет	$2 \nmid e_0$

G	КИ	p	$\lvert C_G(P)\rvert$	$\lvert N_G(P)\rvert$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
Th	1	$2,3,5,7$	—	—	—	нет	P не циклическая (п. 4.13)
		13	39	468	12	нет	[14, с. 274]
		19	19	342	18	нет	[14, с. 277] или [9]
		31	31	465	15	нет	[14, с. 284]; $2 \nmid e_0$
BM	4	$2,3,5,7$	—	—	—	нет	P не циклическая (п. 4.14)
		11	1320	13200	10	нет	[5]
		13	312	3744	12	нет	лемма 8
		17	68	1088	16	нет	[5]
		19	38	684	18	нет	лемма 8
		23	46	506	11	нет	$2 \nmid e_0$
		31	31	465	15	нет	$2 \nmid e_0$
		47	47	1081	23	нет	$2 \nmid e_0$
G	КИ	p	$\lvert C_G(P)\rvert$	$\lvert N_G(P)\rvert$	e_0	FG полуцепное	Ссылки
M	2	$2,3,5$	—	—	—	нет	P не циклическая (п. 4.15)
		$7,11,13$	—	—	—	нет	P не циклическая (п. 4.15)
		17	2856	45696	16	нет	[14, с. 470]
		19	1140	20520	18	нет	[14, с. 481]
		23	552	6072	11	нет	[14, с. 490]; $2 \nmid e_0$
		29	87	2436	28	нет	$2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
		31	186	2790	15	нет	[14, с. 497]; $2 \nmid e_0$
		41	41	1640	40	нет	[14, с. 503]; $2 \nmid \lvert C_G(P)\rvert$
		47	94	2162	23	нет	[14, с. 506]; $2 \nmid e_0$
		59	59	1711	29	нет	[14, с. 512]; $2 \nmid e_0$
		71	71	2485	35	нет	[14, с. 515]; $2 \nmid e_0$

Примечание к таблице: КИ – количество классов инволюций; p – характеристика поля F; P – силовская p-подгруппа; e_0 – количество ребер в дереве Брауэра главного p-блока группы G.

§7. Группы Судзуки $Sz(q)$

Рассмотрим теперь серию простых групп Судзуки $Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1}$, $n \geqslant 1$. Базовые сведения о строении этих групп можно найти в оригинальной статье Судзуки [26] или в работе [20]. В частности, порядок группы $Sz(q)$ равен $q^2(q^2+1)(q-1)$ и не делится на 3. Кроме того, при $p \neq 2$ все силовские p-подгруппы группы $Sz(q)$ являются циклическими.

Обозначим $r = 2^{n+1}$. Тогда $r^2 = 2q$ и $q^2+1 = (q+r+1)(q-r+1)$. Заметим, что числа q, $q-1$, $q+r+1$ и $q-r+1$ попарно взаимно просты (см. [7] и [12]). Итак, если p делит порядок группы, то имеет место один из следующих четырех случаев:

$$1)\ p \mid q; \qquad 2)\ p \mid q-1; \qquad 3)\ p \mid q-r+1 \qquad \text{или} \qquad 4)\ p \mid q+r+1\,.$$

Теорема 10. *Пусть $G = Sz(q)$, $q = 2^{2n+1}$, $r = 2^{n+1}$, $n \geqslant 1$ и F — поле характеристики p. Тогда групповое кольцо FG полуцепно, если и только если либо* 1) *p делит $q-1$, либо* 2) *$p = 5$ делит $q+r+1$, но 5^2 не делит $q+r+1$.*

Например, при $n = 3$ (т.е. $q = 128$ и $r = 16$) группа $G = Sz(128)$ имеет порядок $2^{14} \cdot 5 \cdot 29 \cdot 113 \cdot 127$. Число $p = 5$ делит $q+r+1 = 145$, но 5^2 не делит 145, поэтому кольцо FG полуцепное. Но при $p = 29$ это кольцо не будет полуцепным.

Доказательство. В доказательстве теоремы мы последовательно рассмотрим все возможные случаи.

1. Случай $p \mid q$.

Если $p \mid q$, то $p = 2$. Но силовская 2-подгруппа группы $Sz(q)$ не циклическая, поэтому кольцо FG не полуцепное.

В оставшихся трех случаях, согласно [7], дефект любого неполупростого блока максимален.

2. Случай $p \mid q-1$.

Согласно [7, с. 423], дерево Брауэра главного блока является отрезком длины 2 с исключительной вершиной в центре. Остальные неполупростые блоки состоят из одного ребра, т.е. являются полуцепными. Поэтому кольцо FG является полуцепным.

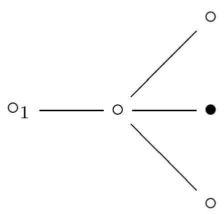
Например при $n = 1$ (следовательно $q = 8$, $r = 4$), группы $G = Sz(8)$ имеет порядок $8^2(8^2+1)(8-1) = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Если $p = 7$, то $p \mid q-1$, поэтому кольцо FG полуцепное. В этом случае неполупростым является только главный блок, с кратность исключительной вершины $(7-1)/2 = 3$.

3. Случай $p \mid q - r + 1$.

По [7, с. 424], дерево Брауэра главного блока не является звездой, поэтому кольцо FG не полуцепное. Например, это имеет место для $G = Sz(8)$ при $p = 5$.

4. Случай $p \mid q + r + 1$.

Дерево Брауэра главного блока в этом случае выглядит так (см. [7, с. 423]):



Следовательно, главный блок полуцепной, если и только если кратность его исключительной вершины $(|P|-1)/4 = 1$. Согласно [20, с. 158], оставшиеся неполупростые блоки содержат ровно по одному модулярному характеру и, значит, являются полуцепными. Таким образом, кольцо FG полуцепно, если и только если $|P| = 5$. $\square$

Перечислим нерешенные задачи.

Проблема 11. Проверить полуцепность для оставшихся серий простых групп.

Проблема 12. Доказать достаточность в гипотезе 3 (либо найти контрпример).

Литература

1. F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and categories of modules.* 2nd edition, Springer Graduate Texts in Math., Vol. 13, 1992.
2. D. J. Benson, *Representations and Cohomology* I. Cambridge University Press, 1995.
3. H. I. Blau, *On Brauer stars.* — J. Algebra **90** (1984), 169–188.
4. W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system* I: The user language, J. Symb. Comp., 24(3/4) (1997), 235–265, `http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/`.

5. T. Breuer et al., *The modular atlas homepage*: *decomposition matrices*, `http://www.math.rwth-aachen.de/homes/MOC/decomposition/`.
6. R. Burkhardt, *Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen* $\mathrm{PSL}(2,p^f)$. — J. Algebra **40** (1976), 75–96.
7. R. Burkhardt, *Über die Zerlegungszahlen der Suzukigruppen* $\mathrm{Sz}(q)$. — J. Algebra **59** (1979), 421–433.
8. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups*. Oxford, Clarendon Press, 1985.
9. G. Cooperman, G. Hiss, K. Lux, J. Müller, *The brauer tree of the principal* 19*-block of the sporadic simple Thompson group*. — Exp. Math. **6**, (4) (1997), 293–300.
10. D. Eisenbud, P. Griffith, *Serial rings*. — J. Algebra **17** (1971), 389–400.
11. The GAP Group, Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.6.5, 2013, http://www.gap-system.org/.
12. L. Hethely, E. Horvath, F. Petenyi, *The depth of subgroups of Suzuki groups*. /http://arxiv.org/abs/1404.1523v1.
13. D. G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic* p. — Duke J. Math. **21** (1954), 377–381.
14. G. Hiss, K. Lux, *Brauer trees of sporadic groups*. Clarendon Press, 1989.
15. G. Hiss, K. Lux, *The Brauer characters of the Hall–Janko group*. — Comm. Algebra **16**, (2) (1988), 357–398.
16. G. Hiss, C. Jansen, K. Lux, R. Parker, *Computational modular character theory*. Preprint, 1993.
17. A. Kukharev, G. Puninski, *Serial group rings of finite groups. p-solvability*. — Algebra Discrete Math. **16**, (2) (2013), 201–216.
18. A. Khosravi, B. Khosravi, *Two new characterizations for sporadic simple groups*. — Pure math. and appl. **16**, (3) (2005), 287–293.
19. J. Müller, M. Neunhöffer, F. Röhr, R. Wilson, *Completing the Brauer trees for the sporadic simple Lyons group*. — LMS J. Comput. Math. **5** (2002), 18–33.
20. R. P. Martineau, *On representations of the Suzuki groups over fields of odd characteristic*. — J. London Math. Soc. **6** (1972), 153–160.
21. В. С. Монахов, А. А. Трофимук, *Инварианты конечных разрешимых групп*. — ПФМТ, **1** (2) (2010), 63–81.
22. K. Morita, *On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals*. — Sci. Repts. Tokyo Daigaku **4** (1951), 177–194.
23. N. Naehrig, *A construction of almost all Brauer trees*. — J. Group Theory **11** (6) (2008), 813–829.
24. G. Puninski, *Serial rings*. Kluwer, 2001.
25. B. Srinivasan, *On the indecomposable representations of a certain class of groups*. — Proc. Lond. Math. Soc. **10** (1960), 497–513.
26. M. Suzuki, *On a class of doubly transitive groups over fields of odd characteristic*. — J. Lond. Math. Soc. **6** (1972), 153–160.
27. H. Wielandt, *Sylowgruppen und Kompositions-Struktur*. — Abhand. Math. Sem. Hamburg **22** (1958), 215–228.

28. Ю. В. Волков, А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепность группового кольца конечной группы зависит только от характеристики поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 57–66.
29. А. В. Кухарев, *Полуцепность групповых колец унимодулярных проективных групп.* — Сборник работ 71-ой научной конференции студентов и аспирантов Белорус. гос. ун-та, Минск, Изд. центр БГУ, 2014, Ч.1., 11–14.
30. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепность групповых колец знакопеременных и симметрических групп.* — Вестник БГУ, сер. математика **2** (2014), 61–64.
31. У. Фейт, *Теория представлений конечных групп.* Наука, М., 1990.

Kukharev A. V., Puninski G. E. Serial group rings of finite groups. Sporadic simple groups and Suzuki groups.

For each prime p we make a list of simple sporadic finite groups and Suzuki groups whose p-modular group ring is serial.

Кафедра высшей алгебры и защиты информации,
механико-математический факультет
Белорусского государственного университета,
проспект Независимости 4, Минск, 220030 Беларусь
E-mail: kukharev.av@mail.ru, punins@mail.ru

Поступило 14 апреля 2015 г.