Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 435, 2015 г.

Д. Д. Киселев

УЛЬТРАРАЗРЕШИМЫЕ НАКРЫТИЯ ГРУППЫ Z_2 ГРУППАМИ Z_8, Z_{16} И Q_8

1°. Напомним, что задача погружения, связанная с точной последовательностью

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F = \mathrm{Gal}(K/k) \to 1 \qquad (1)$$

конечных групп, где группа F реализована как группа Галуа расширения полей K/k, состоит в том, чтобы построить алгебру Галуа L с группой G таким образом, чтобы $K \subset L$ и ограничение автоморфизмов алгебры L на поле K совпадало бы с φ.

Тот факт, что решение задачи погружения ищется в классе алгебр Галуа, принципиален по следующим причинам: во-первых, если искать решение в классе полей, то получается много более сложная задача, чем обратная задача теории Галуа; во-вторых, поиск решения в классе алгебр Галуа дает возможность (по крайней мере для случая абелева ядра) применить развитый аппарат гомологической алгебры; в-третьих, коль скоро установлено, что задача (1) разрешима, то при некоторых технических ограничениях существует также и поле, решающее ее. К таким ограничениям относятся, например, предположение об алгебраичности поля K над $\mathbb{Q}$ а также нильпотентность ядра A (см. [1]).

В работах [2, 3] предложен класс *ультраразрешимых* задач погружения, т.е. таких задач, все решения которых (если они вообще существуют) априори оказываются полями. Хорошо известно одно достаточное условие ультраразрешимости: ядро задачи погружения содержится в группе Фраттини накрывающей группы (см. [4, гл. 1, §6, следствие 5]). В работе [3, теорема 1] приведен простейший критерий ультраразрешимости задачи погружения: необходима и достаточна разрешимость самой задачи и неразрешимость любой присоединенной к ней. К сожалению, этот критерий очень непросто применить даже в случае абелева ядра, когда известны условия разрешимости задачи погружения, найденные А. В. Яковлевым (см. [5, 6]).

Ключевые слова: ультраразрешимость, задача погружения.

В [2,3] построены бесконечные серии примеров ультраразрешимых задач погружения, свободных от ограничения на группу Фраттини. Однако, ядро каждой такой задачи не слишком большое: построенные задачи имеют ядро, изоморфное циклической группе порядка 4, либо элементарной абелевой p-группе ранга 2 (при $p > 2$).

В настоящей работе для $n \in \{3, 4\}$ строится бесконечно много ультраразрешимых задач погружения с ядром, изоморфным Z_{2^n}, но свободных от ограничения на группу Фраттини. Аналогичное построение проводится для случая, когда ядро изоморфно группе кватернионов Q_8.

2°. Будем говорить, что расширение конечных групп

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1 \tag{2}$$

ультраразрешимо, если существует расширение полей K/k с группой Галуа F, такое что соответствующая задача погружения (1) ультраразрешима.

Рассмотрим для произвольного натурального $n \geqslant 2$ обобщенно-кватернионную группу, заданную своим копредставлением

$$Q_{2^{n+1}} = \langle a,\, b \mid a^{2^n} = 1,\, b^2 = a^{2^{n-1}},\, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle. \tag{3}$$

Фиксируем циклическую подгруппу $M_n = \langle a\rangle$ порядка 2^n а также произвольное поле k характеристики, отличной от 2. Пусть $d \in k^* \setminus k^{*2}$. Тогда если группа Галуа $F = \mathrm{Gal}(k(\sqrt{d})/k)$ порождается инволюцией f, то определена задача погружения

$$1 \to M_n \to Q_{2^{n+1}} \xrightarrow{\varphi} F = \mathrm{Gal}(k(\sqrt{d})/k) \to 1, \tag{4}$$

где $\varphi(b) = f$.

Выясним, какова структура максимальных присоединенных задач для задачи (4).

Лемма 1. *Пусть H – максимальная подгруппа группы $Q_{2^{n+1}}$, не содержащая подгруппу M_n. Тогда при $n > 2$ группа H изоморфна группе Q_{2^n}. При $n = 2$ группа H является циклической порядка 4.*

Доказательство. Случай $n = 2$ очевиден, поэтому будем предполагать, что $n > 2$. Так как H – максимальная подгруппа группы $Q_{2^{n+1}}$, то ее индекс в $Q_{2^{n+1}}$ равен 2. Поэтому $H \cap M_n = \langle a^2\rangle$, т.е. $H \cap M_n \cong M_{n-1}$. Т.е. элемент a^2 лежит в H. Если $b \in H$, то H содержит подгруппу $\langle a^2,\, b\rangle$, изоморфную Q_{2^n} и потому $H \cong Q_{2^n}$. Пусть теперь $b \notin H$. Так как $a \notin H$ по условию, то существует элемент вида $a^s b \in H$, причем $2^n \nmid s$. Из соображений максимальности подгруппы H получаем, что либо $s = 2$, либо $s = 1$. Но если $s = 2$, то $b \in H$. Поэтому в H есть подгруппа $\langle a^2, ab \rangle$, изоморфная, как легко видеть, Q_{2^n}. Лемма доказана. $\square$

Вспомним, что для ультраразрешимости задачи (4) необходима и достаточна ее разрешимость, а также неразрешимость всех максимальных присоединенных задач. Иными словами, задача (4) ультраразрешима тогда и только тогда, когда $(k(\sqrt{d})/k,\, Q_{2^{n+1}},\, \varphi)$ разрешима, а задача $(k(\sqrt{d})/k,\, Q_{2^n},\, \varphi)$ неразрешима (для $n > 2$). Для $n = 2$ должна быть неразрешима задача $(k(\sqrt{d})/k,\, Z_4,\, \varphi)$.

Специфика рассмотрения задач погружения, соответствующих точной последовательности конечных p-групп с циклическим ядром, проявляется в следующем утверждении.

Предложение 1. *Пусть $(K/k,\, G,\, \varphi)$ – разрешимая задача погружения с p-группой G и циклическим ядром A порядка выше p, причем $\operatorname{char} k \neq p$. Для ультраразрешимости данной задачи необходима и достаточна неразрешимость лишь одной максимальной присоединенной задачи.*

Доказательство. Если $A \leqslant \Phi(G)$, то присоединенных задач нет, т.е. доказывать нечего. Пусть $A \nleqslant \Phi(G)$. В таком случае определена прямая сопутствующая задача $(K/k,\, G/A_1,\, \varphi_1)$, где $A_1 = \Phi(A)$, а φ_1 – эпиморфизм, индуцированный φ. Все решения такой задачи имеют вид $\widetilde{K} = K \otimes_k L$, где L – алгебра Галуа над k с группой A/A_1. Если алгебра $\widetilde{K}$ не является полем, то для ультраразрешимости исходной задачи необходима неразрешимость задачи $(\widetilde{K}/k,\, G,\, \varphi_0)$ с ядром A_1. Так как $(L : k) = p$, то поле-ядро алгебры $\widetilde{K}$ совпадает с K. Пусть $H = \varphi_0^{-1}(F)$, где $F = \operatorname{Gal}(K/k)$. Тогда для ультраразрешимости исходной задачи необходима неразрешимость задачи $(K/k,\, H,\, \varphi_0)$.

Заметим, что H – максимальная подгруппа группы G. Положим $F = \operatorname{Gal}(K/k)$. Покажем, что $A \nleqslant H$. В самом деле, пусть $h \in Z^2(F,\, A)$ – коцикл расширения

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1.$$

В таком случае группа G может быть представлена как множество пар $\{(u_f, a) \mid a \in A, f \in F\}$ с умножением

$$(u_{f_1}, a_1)(u_{f_2}, a_2) = (u_{f_1 f_2}, h(f_1, f_2) a_1^{f_2} a_2).$$

В таком случае эпиморфизм φ переводит пару (u_f, a) в элемент f. Группа G/A_1 в свою очередь представима как множество пар $\{(u_f, \overline{a})\}$, где $\overline{a}$ – класс элемента a в группе A/A_1. Поскольку $\varphi_1\varphi_0 = \varphi$, то $\varphi_1((u_f, \overline{a})) = f$, а $\varphi_0((u_f, a)) = (u_f, \overline{a})$. Иными словами, группа H есть множество пар $\{(u_f, a_1) \mid f \in F, a_1 \in A_1\}$, откуда и следует, что $A \nleqslant H$.

Определим максимальную присоединенную задачу $(K/k, H, \varphi)$. Так как $\varphi_0((u_f, x)) = (u_f, 1)$ для $x \in A_1$, а $\varphi((u_f, x)) = f$, то образ элемента $(u_f, x) \in H$ при эпиморфизме φ и при эпиморфизме φ_0 действует на поле K одинаково. Поэтому разрешимость задачи $(K/k, H, \varphi_0)$ равносильна разрешимости задачи $(K/k, H, \varphi)$. Итак, если задача $(K/k, G, \varphi)$ является раразрешимой, а максимальная присоединенная задача $(K/k, H, \varphi)$ неразрешима, то мы получаем ультраразрешимость задачи $(K/k, G, \varphi)$. Обратное очевидно. $\square$

3°. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы найти те допустимые d, при которых в задаче (4) выполнено условие согласности.

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. Скрещенное произведение $Q_8 \times k(\sqrt{d})$ имеет следующие центральные попарно ортогональные идемпотенты

$$E_0 = \frac{1 + a^2}{2}, \quad E_1 = \frac{1 - a^2}{2}, \tag{5}$$

причем $E_0 + E_1 = 1$. Алгебра $(Q_8 \times k(\sqrt{d}))E_0$ изоморфна скрещенному произведению $V_4 \times k(\sqrt{d})$, т.е. является матричной алгеброй порядка 2 над своей подалгеброй. В алгебре $(Q_8 \times k(\sqrt{d}))E_1$ элемент $a\sqrt{d}E_1$ является центральным, причем $(a\sqrt{d}E_1)^2 = -dE_1$. Так как $(aE_1)^2 = (bE_1)^2 = -E_1$ и $(aE_1)(bE_1) = -(bE_1)(aE_1)$, то алгебра $(Q_8 \times k(\sqrt{d}))E_1$ изоморфна тензорному произведению над k алгебры обобщенных кватернионов $k[-1, -1]$ и алгебры $k[x]/(x^2 + d)$. Если $-d \notin k^{*2}$, то получаем алгебру обобщенных кватернионов $k(\sqrt{-d})[-1, -1]$, 8-мерную над k. Если же $-d \in k^{*2}$, то получаем алгебру $(k \oplus k) \otimes_k k[-1, -1]$. Эта алгебра должна представляться в виде матричной алгебры порядка 2 над некоторой подалгеброй. Это возможно лишь когда алгебра

$k(\sqrt{-d})[-1,\,-1]$ расщепляется над $k(\sqrt{-d})$. Т.е. -1 должна представляться в виде суммы двух квадратов элементов поля $k(\sqrt{-d})$ (возможно, что $k(\sqrt{-d}) = k$)[1]. Если дополнительно предположить, что k – поле алгебраических чисел, то можно упростить указанное условие. Именно (подробнее см. рассуждение при $n = 3$) представимость -1 в виде суммы двух квадратов элементов поля алгебраических чисел $k(\sqrt{-d})$ возможна тогда и только тогда, когда

$$k(\sqrt{-d})\cdot\mathbb{R} = \mathbb{C}, \quad ((k(\sqrt{-d})\cdot\mathbb{Q}_2) : \mathbb{Q}_2) \equiv 0(\mathrm{mod}\,2). \tag{6}$$

Разберем случай $n = 3$. Положим $G = Q_{16}$ и исследуем скрещенное произведение $\Lambda = G \times k(\sqrt{d})$.

Алгебра Λ имеет, как нетрудно проверить, следующие попарно ортогональные центральные идемпотенты

$$E_0 = \frac{1+a^4}{2}\cdot\frac{1+a^2}{2}, \quad E_1 = \frac{1+a^4}{2}\cdot\frac{1-a^2}{2}, \quad E_2 = \frac{1-a^4}{2},$$

причем $E_0 + E_1 + E_2 = 1$. Положим $\Lambda_j = \Lambda E_j$.

Изучим строение алгебры Λ_0. Ясно, что $(aE_0)^4 = E_0$, $(bE_0)^2 = E_0$. Вычислим элемент a^2E_0. Для этого заметим, что

$$a^2\frac{1+a^2}{2}E_0 = a^2\frac{E_0+a^2E_0}{2}E_0 = \frac{a^2E_0+E_0}{2}E_0 = \frac{1+a^2}{2}E_0.$$

Но тогда $a^2E_0 = E_0$. Поэтому элементы aE_0 и bE_0 коммутируют. Итак, алгебра Λ_0 изоморфна скрещенному произведению $Q_{16}/\langle a^2\rangle \times k(\sqrt{d})$, т.е. является матричной алгеброй порядка 2 над своей подалгеброй $k[x]/(x^2-1) \cong k \oplus k$.

Изучим строение алгебры Λ_1. Так как $(aE_1)^4 = E_1$, то $(bE_1)^2 = E_1$. Рассуждая так же, как и при изучении алгебры Λ_0, получаем $(aE_1)^2 = -E_1$. Поэтому элементы aE_1 и bE_1 антикоммутируют. Но тогда они порождают алгебру обобщенных кватернионов $k[-1,\,1]$, изоморфную $\mathrm{Mat}(2,\,k)$. Далее, элемент $a\sqrt{d}E_1$ лежит в центре алгебры Λ_1 в силу антикоммутируемости элементов aE_1, bE_1 а также антикоммутируемости элементов bE_1, $\sqrt{d}E_1$. Так как $(a\sqrt{d}E_1)^2 = -dE_1$, то подалгебра, порожденная элементом $a\sqrt{d}E_1$, изоморфна либо полю $k(\sqrt{-d})$ при $-d \notin k^{*2}$, либо алгебре Галуа $k\oplus k$ при $-d \in k^{*2}$. В любом случае алгебра Λ_1 является матричной алгеброй порядка 2 над своей подалгеброй.

---

[1]Можно дать еще и такую эквивалентную формулировку: d представимо в виде суммы трех квадратов элементов поля k. Но нам это не понадобится.

Рассмотрим, наконец, алгебру Λ_2. Имеем $(aE_2)^4 = -E_2$, $(bE_2)^2 = -E_2$, причем элементы a^2E_2 и bE_2 антикоммутируют. Т.е. подалгебра, порожденная над k элементами a^2E_2 и bE_2, изоморфна алгебре обобщенных кватернионов $k[-1, -1]$. Заметим, что элементы $a^2\sqrt{d}E_2$ и $(a+a^{-1})E_2$ лежат в центре алгебры Λ_2. При этом $(a^2\sqrt{d}E_2)^2 = -dE_2$, а $((a + a^{-1})E_2)^2 = 2E_2$. Размерность алгебры Λ_2 над k равна 16, ибо $\dim_k \Lambda = 32$, а $\dim_k \Lambda_0 = \dim_k \Lambda_1 = 8$. Это означает, что Λ_2 есть тензорное произведение над k алгебры $k[-1, -1]$ и 4-мерной алгебры, порожденной элементами $a^2\sqrt{d}E_2$ и $(a + a^{-1})E_2$, которая изоморфна $k[x]/(x^2 + d) \otimes_k k[x]/(x^2 - 2)$. Если $-d \notin k^{*2}$, $2 \notin k^{*2}$ и при этом поля $k(\sqrt{-d})$ и $k(\sqrt{2})$ линейно разделены над k, то такая алгебра есть поле $k(\sqrt{-d}, \sqrt{2})$. Для того чтобы алгебра Λ_2 была матричной алгеброй порядка 2 над своей подалгеброй необходимо и достаточно распадения алгебры обобщенных кватернионов $k[-1, -1]$ над $k[x]/(x^2 + d) \otimes_k k[x]/(x^2 - 2)$. Т.е. -1 должна представляться в виде суммы двух квадратов элементов поля $k(\sqrt{-d}, \sqrt{2})$ (возможно, что $(k(\sqrt{-d}, \sqrt{2}) : k) < 4$). Но это представление возможно тогда и только тогда, когда индекс Шура двумерного комплексного неприводимого характера χ группы кватернионов Q_8 над полем $k(\sqrt{-d}, \sqrt{2})$ равен единице. Если дополнительно предположить, что k – поле алгебраических чисел, то поскольку $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) = m_{\mathbb{R}}(\chi) = 2$, а также $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}$, то алгебра Λ_2 является матричной алгеброй порядка 2 над своей подалгеброй тогда и только тогда, когда

$$k(\sqrt{-d}, \sqrt{2}) \cdot \mathbb{R} = \mathbb{C}, \quad ((k(\sqrt{-d}, \sqrt{2}) \cdot \mathbb{Q}_2) : \mathbb{Q}_2) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2). \qquad (7)$$

Так как $2 \notin \mathbb{Q}_2^{*2}$, то условие (7) равносильно условию

$$k(\sqrt{-d}) \cdot \mathbb{R} = \mathbb{C}. \qquad (8)$$

Теперь мы в состоянии доказать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (4) k *– поле алгебраических чисел. В задаче погружения* (4) *при* $n > 2$ *выполнено условие согласности тогда и только тогда, когда поле* k *удовлетворяет условию* (8). *Задача* (4) *при* $n = 2$ *разрешима тогда и только тогда, когда поле* k *удовлетворяет условию* (6).

Доказательство. Так как при $n = 2$ ядро задачи (4) есть циклическая группа порядка 4, то согласность достаточна для погружаемости. Случай $n = 3$ уже был рассмотрен. Пусть теперь $n > 3$. Из леммы 1 следует, что задача (4) при $n = 3$ является присоединенной задачей погружения для задачи (4) при $n > 3$ (возможно, что не максимальной присоединенной). Как известно, выполнение условия согласности в присоединенной задаче погружения влечет выполнение условия согласности и в исходной задаче (см. [7, лемма]). Будем поэтому предполагать, что условие (6) не выполнено. Это означает, что $k(\sqrt{-d}) \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Но тогда $k \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}$, и $\sqrt{-d} \in \mathbb{R}$. Но $\sqrt{d} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-d}$, поэтому $\sqrt{d} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Т.е. $k(\sqrt{d}) \cdot \mathbb{R} = \mathbb{C}$. Так как расширение группы $F = \mathrm{Gal}(k(\sqrt{d})/k)$ до группы $Q_{2^{n+1}}$ с помощью циклического ядра порядка 2^n не расщепляется, то $\mathbb{R}$-локализация задачи (4) неразрешима. Но это противоречит предположению о выполнении условия согласности[2] в задаче (4) при выбранном $n > 3$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Нетрудно, впрочем, проверить условие согласности в задаче (4) и для случая произвольного поля k характеристики отличной от двух.

В самом деле, пусть последовательность элементов $\{\theta_n\}_{n\geqslant 2}$ такова, что

$$\theta_2 = 0, \quad \theta_3 = \sqrt{2}, \quad \theta_n = \sqrt{2 + \theta_{n-1}}\,\forall\, n \geqslant 3.$$

Тогда в задаче (4) выполнено условие согласности, если и только если алгебра обобщенных кватернионов $k(\sqrt{-d},\, \theta_n)[-1,\, -1]$ распадается над $k(\sqrt{-d},\, \theta_n)$.

4°. Нам надо подобрать такое поле алгебраических чисел k и такое $d \notin k^{*2}$, что задача (4) при $n = 2$ была неразрешима, а при $n = 3$ разрешима. Сопоставляя условия (6) и (8), мы видим, что, во-первых, степень поля $k \cdot \mathbb{Q}_2$ над $\mathbb{Q}_2$ должна быть нечетной, во-вторых, $-d \in (k \cdot \mathbb{Q}_2)^{*2}$, в-третьих, $k(\sqrt{-d}) \cdot \mathbb{R} = \mathbb{C}$, в-четвертых, в задаче (4) при $n = 3$ выполнено дополнительное условие погружаемости.

Положим $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, $d = -1$. Так как $-7 \in \mathbb{Q}_2^{*2}$, то условие (6) не выполняется; в то же время условие (8) выполнено. Присоединим к полю $k(\sqrt{-1})$ примитивный корень ε_8. Так как поля k и $\mathbb{Q}(\varepsilon_8)$ линейно разделены над $\mathbb{Q}$, то группа Галуа $\mathrm{Gal}(k(\varepsilon_8)/k)$ изоморфна группе $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$. Так как степень поля $k(\varepsilon_8) \cdot \mathbb{Q}_2$ над $k \cdot \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2$ равна 4, то

[2] Присоединяя примитивный корень из единицы степени 2^n к полю $k(\sqrt{d})$, мы осуществляем подъем класса коцикла, задающего расширение (4). Так как гомоморфизм подъема коммутирует с гомоморфизмом ограничения, то в силу транзитивности подъема для выполнения условия согласности необходима и достаточна разрешимость всех сопутствующих локальных задач для “неподнятой” задачи.

$H^3(\mathrm{Gal}(k(\varepsilon_8)/k),\, (k(\varepsilon_8)^*)) = \{1\}$. Но тогда в силу [6, теорема 1] дополнительное условие погружаемости исчезает. Применяя теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, $n = 3$, $d = -1$. *Тогда задача погружения* (4) *является ультраразрешимой.*

Для дальнейшего нам понадобится выяснить условия разрешимости задачи (4) при $n = 3$ лишь в предположении $\mathrm{char}\, k \neq 2$.

С этой целью заметим, что, переходя от задачи $(k(\sqrt{d})/k,\, Q_{16},\, \varphi)$ к сопутствующей задаче погружения $(k(\sqrt{d})/k,\, Q_{16}/\langle a^2\rangle,\, \varphi_1)$, получим прямую задачу. Поэтому для разрешимости исходной задачи необходимо и достаточно существование такого элемента $x \in k$, что в задаче $(L/k,\, Q_{16},\, \varphi_0,\, \langle a^2\rangle)$, где $L = k(\sqrt{d}) \otimes_k k(\sqrt{x})$ – алгебра Галуа с группой V_4 над[3] k, было выполнено условие согласности (т.к. ядро $\langle a^2\rangle$ есть циклическая группа порядка 4).

Пусть $\varphi_0(a) = g$, $\varphi_0(b) = f$, где f, g – порождающие элементы группы $\mathrm{Gal}(L/k)$. При этом выполнены соотношения

$$\sqrt{d}^f = -\sqrt{d},\ \sqrt{d}^g = \sqrt{d},\ \sqrt{x}^f = \sqrt{x},\ \sqrt{x}^g = -\sqrt{x}. \tag{9}$$

Пусть $\Lambda = Q_{16} \times L$, $\Lambda_j = \Lambda E_j$, где по-прежнему

$$E_0 = \frac{1+a^4}{2}\cdot\frac{1+a^2}{2}, \quad E_1 = \frac{1+a^4}{2}\cdot\frac{1-a^2}{2}, \quad E_2 = \frac{1-a^4}{2}.$$

Изучим строение алгебры Λ_0. Нетрудно видеть, что элементы $\sqrt{d}E_0$ и bE_0 антикоммутируют, причем $(bE_0)^2 = E_0$. Элементы $\sqrt{x}E_0$ и aE_0 также антикоммутируют. При этом $(aE_0)^2 = E_0$. Это означает, что алгебра $A_1 = \langle\sqrt{d}E_0,\, bE_0\rangle_k$ изоморфна алгебре обобщенных кватернионов $k[1,\, d]$, которая есть просто матричная алгебра $\mathrm{Mat}(2,\, k)$. Алгебра $A_2 = \langle\sqrt{x}E_0,\, aE_0\rangle_k$ изоморфна алгебре $k[1,\, x]$, т.е. матричной алгебре $\mathrm{Mat}(2,\, k)$. Алгебры A_1 и A_2 попарно коммутируют, а $\dim_k \Lambda_0 = 16$, поэтому

$$\Lambda_0 \cong \mathrm{Mat}(2,\, k) \otimes_k \mathrm{Mat}(2,\, k) \cong \mathrm{Mat}(4,\, k).$$

Рассмотрим алгебру Λ_1. Здесь $(aE_1)^2 = -E_1$, $(bE_1)^2 = E_1$. Элементы aE_1, bE_1 антикоммутируют, а потому элементы $a\sqrt{d}E_1$ и bE_1 коммутируют. В частности, алгебры $B_1 = \langle a\sqrt{d}E_1,\, \sqrt{x}E_1\rangle_k$ и $B_2 =$

[3]Здесь под $k(\sqrt{d})$ а также под $k(\sqrt{x})$ понимаются, соответственно, $k[t]/(t^2-d)$ и $k[t]/(t^2-x)$.

$\langle bE_1,\, \sqrt{d}\rangle_k$ попарно коммутируют. Более того, $B_1 \cong k[-d,\, x]$, а $B_2 \cong k[1,\, d] \cong \mathrm{Mat}(2,\, k)$. Так как $\dim_k \Lambda_2 = 16$, то

$$\Lambda_1 \cong \mathrm{Mat}(2,\, k) \otimes_k k[-d,\, x].$$

Поэтому Λ_2 есть матричная алгебра порядка 4 над некоторой подалгеброй тогда и только тогда, когда $k[-d,\, x]$ расщепляется над k.

Изучим алгебру Λ_2. Ясно, что $\dim_k \Lambda_2 = 32$ (т.к. $\dim_k Q_{16} \times L = 64$, а $\dim_k \Lambda_0 = \dim_k \Lambda_1 = 16$). Элемент $a^2\sqrt{d}E_2$ лежит в центре алгебры Λ_2. Алгебра $C_1 = \langle (a+a^{-1})E_2,\, \sqrt{x}E_2\rangle_k$ изоморфна алгебре $k[2,\, x]$, ибо $((a+a^{-1})E_2)^2 = 2E_2$, причем элементы $(a+a^{-1})E_2$ и $\sqrt{x}E_2$ антикоммутируют. Алгебра $C_2 = \langle bE_2,\, \sqrt{d}E_2\rangle_k$ изоморфна $k[-1,\, d]$, так как элементы bE_2 и $\sqrt{d}E_2$ антикоммутируют, а $(bE_2)^2 = -E_2$. Алгебры C_1 и C_2 попарно коммутируют, поэтому имеется изоморфизм

$$\Lambda_2 \cong k[t]/(t^2+d) \otimes_k k[2,\, x] \otimes_k k[-1,\, d].$$

Алгебра Λ_2 должна быть алгеброй матриц порядка 4 над некоторой подалгеброй, т.е. должна быть изоморфна $\mathrm{Mat}(4,\, k[t]/(t^2+d))$. Т.е. алгебра Λ_2 должна быть эквивалентна единице в группе Брауэра $B(k(\sqrt{-d}))$.

Предположим, что $k[-1,\, d]$ распадается над $k(\sqrt{-d})$. Тогда необходимо и достаточно распадение алгебры $k(\sqrt{-d})[2,\, x]$ над $k(\sqrt{-d})$. Предположим, что $k[-1,\, d]$ не распадается над $k(\sqrt{-d})$. Тогда необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм алгебр $k(\sqrt{-d})[2,\, x]$ и $k(\sqrt{-d})[-1,\, d]$ (ибо только в этом случае алгебра Λ_2 как $k(\sqrt{-d})$-алгебра эквивалентна единице в группе $B(k(\sqrt{-d}))$). Итак, мы установили следующее

Предложение 2. *Задача (4) в случае $n = 3$ и произвольного поля k характеристики, отличной от 2, разрешима тогда и только тогда, когда найдется элемент $x \in k$, такой что, во-первых, алгебра $k[-d,\, x]$ распадается над k, а, во-вторых, алгебры $k(\sqrt{-d})[2,\, x]$ и $k(\sqrt{-d})[-1,\, d]$ изоморфны.*

Замечание 2. Нетрудно видеть, что при $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, а $d = -1$ алгебра $k[-1,\, -1]$ не распадается (ибо уже в $\mathbb{Q}_2 = k(\sqrt{-d}) \cdot \mathbb{Q}_2$ символ Гильберта $[-1,\, -1] = -1$), алгебра $k[1,\, x] = 1$ распадается над любым полем характеристики, отличной от 2. Алгебра $k[-1,\, -1]$ есть тело кватернионов над k. Согласно теореме 2, в поле k найдется элемент x, такой что $k[2,\, x] \cong k[-1,\, -1]$. Можно положить $x = 3$. В таком случае алгебра $k[2,\,3]$ имеет тривиальные инварианты Хассе во всех p-локальных пополнениях[4] поля k, кроме $p=2$. В самом деле, инвариант Хассе алгебры $\mathbb{Q}_3[2,\,3]$ нетривиален, так как символ Лежандра

$$\left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{(3^2-1)/8} = -1,$$

а -7 не является квадратом в поле $\mathbb{Q}_3$; в частности, алгебра $\mathbb{Q}_3(\sqrt{-7})[2,\,3]$ распадается. В то же время алгебра $\mathbb{Q}_2[2,\,3]$ не распадается. Таким образом, алгебры $k[-1,\,-1]$ и $k[2,\,3]$ изоморфны.

5°. Разбор случая $n=4$ в задаче (4) нуждается в некоторых приготовлениях.

Лемма 2. *Пусть k – произвольное поле характеристики отличной от двух. Задача погружения расширения[5] $k(\sqrt{d},\,\sqrt{x})/k$ с группой V_4 в алгебру Галуа с группой D_4 разрешима тогда и только тогда, когда алгебра обобщенных кватернионов $k[dx,\,x]$ распадается над k.*

Доказательство. Пусть $D_4 = \langle a,\, b \mid a^4 = b^2 = 1,\, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, причем

$$\sqrt{d}^{\,b} = -\sqrt{d},\ \sqrt{x}^{\,b} = \sqrt{x}, \qquad \sqrt{d}^{\,a} = \sqrt{d},\ \sqrt{x}^{\,a} = -\sqrt{x}.$$

Обозначим $L = k(\sqrt{d},\,\sqrt{x})$ и рассмотрим скрещенное произведение $\Lambda = D_4 \times L$. Алгебра Λ имеет следующие попарно ортогональные центральные идемпотенты

$$E_1 = \frac{1+a^2}{2}, \quad E_2 = \frac{1-a^2}{2},$$

сумма которых равна единице. Алгебра ΛE_1 является матричной алгеброй порядка 4 над полем k, ибо изоморфна скрещенному произведению $\mathrm{Gal}(L/k) \times L$, которое соответствует сопутствующей задаче первого рода, получающейся факторизацией по подгруппе $\langle a^2\rangle$. Алгебра ΛE_2 является центрально-простой k-алгеброй размерности 16. Найдем условия, при которых она распадается над k.

Заметим, что $(aE_2)^2 = -E_2$, $(bE_2)^2 = E_2$. Поэтому алгебра ΛE_2 содержит попарно коммутирующие алгебры $A_1 = \langle \sqrt{d}E_2,\, bE_2\rangle$ и $A_2 = \langle a\sqrt{d}E_2,\, \sqrt{x}\rangle$, изоморфные, соответственно, $k[d,\,1]$ и $k[-d,\,x]$. Поэтому

[4]В том числе и в архимедовых точках.

[5]Возможно, что $k(\sqrt{d},\,\sqrt{x})$ не поле, а алгебра Галуа.

$\Lambda E_2 \cong \mathrm{Mat}(2, k) \otimes_k k[-d, x]$. Иными словами, алгебра ΛE_2 распадается над k тогда и только тогда, когда распадается алгебра $k[-d, x]$. Но, как легко видеть, алгебра $k[-x^{-1}, x]$ всегда распадается над k, а потому алгебры $k[-d, x]$ и $k[dx, x]$ эквивалентны в группе Брауэра $B(k)$. □

Предложение 3. *Решения*[6] *задачи погружения расширения $k(\sqrt{d}, \sqrt{x})/k$ с группой V_4 в алгебру Галуа с группой диэдра D_4 имеют вид $L = k(\sqrt{d}, \sqrt{x}, \sqrt{y(\alpha + \beta\sqrt{x})})$, где α, β – элементы поля k, удовлетворяющие условию $dx = \alpha^2 - \beta^2 x$, а y – произвольный ненулевой элемент из k.*

Доказательство. Согласно лемме 2 задача погружения расширения $k(\sqrt{d}, \sqrt{x})/k$ в алгебру Галуа с группой D_4 разрешима тогда и только тогда, когда алгебра обобщенных кватернионов $k[dx, x]$ распадается над k. Поэтому в дальнейшем считаем, что $k[dx, x] \cong \mathrm{Mat}(2, k)$. Но тогда элемент dx является нормой относительно расширения $k(\sqrt{x})/k$. В частности, существуют элементы $\alpha, \beta \in k$ с условием $dx = \alpha^2 - \beta^2 x$.

Задача $(k(\sqrt{d}, \sqrt{x}), D_4, \varphi)$ является брауэровской, поэтому если $k(\sqrt{d}, \sqrt{x}, \sqrt{\gamma})$ – решение данной задачи, где γ – некоторый элемент из $k(\sqrt{d}, \sqrt{x})$, то все решения согласно [4, гл. 3, §1] будут иметь вид $k(\sqrt{d}, \sqrt{x}, \sqrt{y\gamma})$ для некоторого $y \in k^*$. Поэтому достаточно показать, что можно положить $\gamma = \alpha + \beta\sqrt{x}$.

Обозначим $\theta_1 = \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{x}}$, $\theta_2 = \sqrt{\alpha - \beta\sqrt{x}}$. Определим действие элементов группы D_4 на θ_1, θ_2 следующим образом:

$$\theta_1^a = \theta_2,\ \theta_2^a = -\theta_1,\ \theta_1^b = \theta_1,\ \theta_2^b = -\theta_2. \qquad (10)$$

Так как $\theta_1\theta_2 = \sqrt{d}\sqrt{x}$, то элементы a, b являются k-автоморфизмами алгебры $k(\sqrt{d}, \sqrt{x}, \theta_1)$, причем $(\theta_1^2)^a = \theta_2^2$, а $(\theta_2^2)^b = \theta_2^2$, т.е. действие элементов a, b на θ_1, определенное в (10), согласовано с действием a, b на $\sqrt{d}$ и $\sqrt{x}$. Нетрудно видеть, что $\theta_1^{a^4} = \theta_1$, $\theta_1^{b^2} = \theta_1$. Наконец, $\theta_1^{b^{-1}ab} = -\theta_2$, что согласуется с действием $\theta_1^{a^{-1}} = -\theta_2$. Таким образом, алгебра Галуа $k(\sqrt{d}, \sqrt{x}, \theta_1)$ имеет над k группу Галуа, изоморфную D_4. □

Будем снова считать k полем алгебраических чисел[7]. Вернемся к задаче (4) при $n = 4$. Заметим, что такую задачу можно решить в два

[6] Если существуют.

[7] Это гарантирует, что решения задач погружения с абелевым ядром можно считать полями согласно теореме Фаддеева–Шольца (см. [4, гл. 3, §6]).

этапа: сначала решить задачу погружения квадратичного расширения $k(\sqrt{d})/k$ в алгебру Галуа с группой диэдра D_4, а затем выяснить, какие из полученных решений погружаются в алгебру Галуа с группой Q_{32}.

Согласно предложению 3, все решения полупрямой задачи погружения $(k(\sqrt{d})/k,\, D_4,\, \varphi)$ имеют вид $L = k(\sqrt{d},\, \sqrt{x},\, \sqrt{y}\theta_1)$, где, напомним, $\theta_1 = \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{x}}$, $x \in k^*$, а элементы $\alpha, \beta \in k$ удовлетворяют условию $dx = \alpha^2 - \beta^2 x$.

Рассмотрим задачу $(L/k,\, Q_{32},\, \psi)$, где Q_{32} задана копредставлением (3) при $n = 4$, а ψ – естественный эпиморфизм, согласованный с действием (10). Ядро данной задачи – циклическая группа порядка 4, поэтому условия разрешимости указанной задачи совпадают с условиями согласности. Обозначим $\Lambda = Q_{32} \times L$ и найдем условия представимости алгебры Λ в виде матричной алгебры порядка 8 над своей подалгеброй. Алгебра Λ имеет следующие попарно ортогональные центральные идемпотенты

$$E_0 = \frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+a^4}{2},\ E_1 = \frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1-a^4}{2},\ E_2 = \frac{1-a^8}{2}. \tag{11}$$

Обозначим $\Lambda_i = \Lambda E_i$ для всех $i \in \{0, 1, 2\}$. Так как $(aE_i)^8 = E_i$ для $i \in \{0, 1\}$, то алгебра $\Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ является скрещенным произведением группы диэдра D_8, заданной как гомоморфный образ группы Q_{32} при естественном эпиморфизме с ядром $\langle a^8 \rangle$, и поля L. Иными словами, алгебра $\Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ является скрещенным произведением для брауэровской сопутствующей задачи первого рода $(L/k,\, Q_{32}/\langle a^8\rangle,\, \psi_1)$. Таким образом, представимость скрещенного произведения $Q_{32}/\langle a^8\rangle \times L$ в виде матричной алгебры порядка 8 над своей подалгеброй равносильна распадению над k центрально-простой k-алгебры Λ_1.

Лемма 3. *Алгебра Λ_1 распадается над k тогда и только тогда, когда, во-первых, $k[dx,\, x] \cong \mathrm{Mat}(2,\, k)$, а, во-вторых, найдется элемент $z \in k^*$ такой, что $k[dx,\, 2] \cong k[-d,\, z]$.*

Доказательство. Заметим сначала, что условие $k[dx,\, x] \cong \mathrm{Mat}(2,\, k)$ необходимо для рассмотрения расширения L/k в силу леммы 2. Заметим, что алгебра Λ_1 является скрещенным произведением поля L и группы D_8 с системой факторов, принимающих значения в группе $\{\pm 1\}$. Таким образом, алгебра Λ_1 имеет индекс Шура не выше

2. В частности, Λ_1 представима в виде тензорного произведения алгебр обобщенных кватернионов[8]. Рассмотрим подалгебру $A_1 = \langle (a + a^{-1})E_1,\, \sqrt{x}E_1 \rangle$. Так как $((a+a^{-1})E_1)^2 = 2E_1$, а элементы $(a+a^{-1})E_1$ и $\sqrt{x}E_1$ антикоммутируют, то $A_1 \cong k[2,\, x]$. При этом $\Lambda_1 \cong A_1 \otimes_k C_{\Lambda_1}(A_1)$. Элементы bE_1 и $\sqrt{d}E_1$ лежат в централизаторе $C_{\Lambda_1}(A_1)$ алгебры A_1 и антикоммутируют, поэтому $\langle bE_1,\, \sqrt{d}E_1\rangle \cong k[1,\, d]$. Таким образом, $\Lambda_1 \cong A_2 \otimes_k C_{\Lambda_1}(A_2)$, где $A_2 \cong k[2,\, x] \otimes_k k[1,\, d]$.

Обозначим $\widetilde{\theta}_1 = \sqrt{y(\alpha + \beta\sqrt{x})}$, а также $\widetilde{\theta}_2 = \sqrt{y(\alpha - \beta\sqrt{x})}$. Рассмотрим элемент $\omega = (\widetilde{\theta}_2 + a^2\widetilde{\theta}_1)\sqrt{dx}E_1$. Ясно, что ω коммутирует с $\sqrt{d}E_1$ и с $\sqrt{x}E_1$. Далее,

$$(\widetilde{\theta}_2+a^2\widetilde{\theta}_1)\sqrt{dx}E_1\cdot bE_1 = -(\widetilde{\theta}_2+a^2\widetilde{\theta}_1)b\sqrt{dx}E_1 = -(\widetilde{\theta}_2 b+a^2 b\widetilde{\theta}_1)\sqrt{dx}E_1 = \\ = (b\widetilde{\theta}_2 + ba^2\widetilde{\theta}_1)\sqrt{dx}E_1 = bE_1\cdot(\widetilde{\theta}_2 + a^2\widetilde{\theta}_1)\sqrt{dx}E_1,$$

т.е. ω коммутирует с bE_1. Проверим коммутируемость ω и $(a+a^{-1})E_1$. Для этого достаточно установить антикоммутируемость $(\widetilde{\theta}_2+a^2\widetilde{\theta}_1)E_1$ и $(a+a^{-1})E_1$. Для этого заметим, что с одной стороны выполнено

$$(a+a^{-1})(\widetilde{\theta}_2 + a^2\widetilde{\theta}_1)E_2 = (a\widetilde{\theta}_2 + a^{-1}\widetilde{\theta}_2 + a^3\widetilde{\theta}_1 + a\widetilde{\theta}_1)E_2, \tag{12}$$

а с другой –

$$(\widetilde{\theta}_2 + a^2\widetilde{\theta}_1)(a+a^{-1})E_1 = (\widetilde{\theta}_2 a + a^2\widetilde{\theta}_1 a + \widetilde{\theta}_2 a^{-1} + a^2\widetilde{\theta}_1 a^{-1})E_1 = \\ = (-a\widetilde{\theta}_1 + a^3\widetilde{\theta}_2 - a^3\widetilde{\theta}_1 - a\widetilde{\theta}_2)E_1. \tag{13}$$

Из (12) и (13) с учетом $a^3E_1 = -a^{-1}E_1$ получаем требуемое. Итак, элемент ω лежит в централизаторе $C_{\Lambda_1}(A_2)$. Ясно, что элемент $a^2\sqrt{d}E_1$ также лежит в $C_{\Lambda_1}(A_2)$ и антикоммутирует с ω. Так как

$$(\widetilde{\theta}_2 + a^2\widetilde{\theta}_1)(\widetilde{\theta}_2 + a^2\widetilde{\theta}_1)E_1 = (\widetilde{\theta}_2^2 + \widetilde{\theta}_2 a^2\widetilde{\theta}_1 + a^2\widetilde{\theta}_1\theta_2 + a^2\widetilde{\theta}_1 a^2\widetilde{\theta}_1)E_1 \\ = (\widetilde{\theta}_2^2 + \widetilde{\theta}_1^2)E_1 = 2y\alpha E_1,$$

то $\omega^2 = 2y\alpha dx$. Это означает, что $C_{\Lambda_1}(A_2) \cong k[2y\alpha dx,\, -d]$. В частности,

$$\Lambda_1 \cong k[x,\, 2] \otimes_k k[1,\, d] \otimes_k k[2y\alpha dx,\, -d].$$

[8] Так как k – поле алгебраических чисел, то всякая центрально-простая k-алгебра является циклической, поэтому искомая представимость следует из оценки индекса Шура алгебры Λ_1.

Найдем условия распадения над k алгебры Λ_1. В группе Брауэра $B(k)$ имеем эквивалентность

$$\Lambda_1 \sim k[dx,\, 2] \otimes_k k[-d,\, y\alpha] \otimes_k k[-d,\, x],$$

ибо $k[-d,\, d] \sim 1$, а также $k[-1,\, 2] \sim 1$. Но по условию должно быть также $k[dx,\, x] \sim 1$, что в силу эквивалентности $k[-x^{-1},\, x] \sim 1$ влечет эквивалентность $k[-d,\, x] \sim 1$. Итак, алгебра Λ_1 эквивалентна в группе Брауэра $B(k)$ алгебре $k[dx,\, 2] \otimes_k k[-d,\, y\alpha]$. Так как y – произвольный ненулевой элемент поля k, то, заменив $y\alpha$ на $z \in k^*$, получим требуемое условие распадения. $\square$

Исследуем алгебру Λ_2. Ясно, что элемент $a^4\sqrt{d}E_2$ лежит в центре алгебры Λ_2. Таким образом, для представимости алгебры Λ_2 в виде матричной алгебры порядка 8 над своей подалгеброй необходимо и достаточно распадение алгебры Λ_2 над своим центром, который изоморфен $k(\sqrt{-d})$. Заметим, что условие распадения алгебры Λ_2 над $k(\sqrt{-d})$ равносильно разрешимости брауэровской задачи погружения $(\widetilde{L}/k(\sqrt{-d}),\, Q_{32},\, \delta)$, где $\widetilde{L} = k(\sqrt{-d})(\sqrt{-1},\, \sqrt{x},\, \widetilde{\theta}_1)$, а элементы a, b группы Q_{32} действуют[9] на поле $\widetilde{L}$ следующим образом:

$$\begin{gathered}\sqrt{-1}^{\,b} = -\sqrt{-1}, \quad \sqrt{x}^{\,a} = -\sqrt{x}, \quad \sqrt{x}^{\,b} = \sqrt{x}, \quad \sqrt{-1}^{\,a} = \sqrt{-1},\\ \widetilde{\theta}_1^{\,b} = \theta_1, \quad \widetilde{\theta}_1^{\,a} = \widetilde{\theta}_2.\end{gathered} \tag{14}$$

Мы покажем, что если $k = \mathbb{Q}$, $d = 7$, $x = 2$, то алгебра Λ_2 распадается над $k(\sqrt{-d})$ при надлежащем выборе[10] элемента $y \in k^*$ (напомним, что $\widetilde{\theta}_1 = \sqrt{y(\alpha + \beta\sqrt{x})}$, а α, β – такие элементы поля k, что $dx = \alpha^2 - \beta^2 x$).

Легко видеть, что можно взять $\alpha = 4$, а $\beta = 1$. Проверим условия распадения алгебры Λ_1 для таких параметров. Из леммы 3 получаем, что алгебры $\mathbb{Q}[14,\, 2]$ и $\mathbb{Q}[-7,\, 4y]$ (произвольный элемент z из леммы 3 равен $y\alpha$) должны быть изоморфны. Алгебра $\mathbb{Q}[14,\, 2]$ эквивалентна алгебре $\mathbb{Q}[2,\, 2] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[7,\, 2]$ в группе Брауэра $\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$. Так как 2-локальный символ Гильберта $[2,\, 2]$ равен единице, то алгебра $\mathbb{Q}[2,\, 2]$ является матричной. Исследуем алгебру $\mathbb{Q}[7,\, 2]$. Так как $\mathbb{Q}_2[7,\, 2] \cong \mathbb{Q}_2[-1,\, 2]$, то 2-локальный символ Гильберта $[7,\, 2]$ тривиален. Заметим, наконец, что

[9] Согласованно с эпиморфизмом δ.

[10] Т.е. когда распадается и алгебра Λ_1.

символ Лежандра

$$\left(\frac{2}{7}\right) = (-1)^{(7^2-1)/8} = 1,$$

поэтому 7-локальный символ Гильберта $[7, 2]$ также тривиален. Резюмируя, заключаем, что алгебра $\mathbb{Q}[14, 2]$ матричная. Таким образом, условия распадения алгебры Λ_1 совпадают с условиями распадения алгебры $\mathbb{Q}[-7, y]$ для некоторого $y \in \mathbb{Q}^*$.

Так как поле $\widetilde{L}$ содержит элемент $\sqrt{-1}$, то оно может быть получено присоединением элемента $\widetilde{m} = \sqrt{\mu\sqrt{x}}$ к полю $\mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-1}, \sqrt{x})$, где $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{-7})^*$. В самом деле, присоединение элемента $\sqrt[4]{x}$ решает задачу погружения расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-1}, \sqrt{x})/\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ в поле с группой диэдра D_4. Но все решения такой брауэровской задачи получаются, согласно [4, гл. 3,§1], варьированием элемента μ.

Найдем связь между элементами y и μ. Нетрудно видеть[11], что $\widetilde{\theta}_1 = \sqrt{(\mu^{-1}\widetilde{m}^2 + 4)y}$. Таким образом, элемент $(\mu^{-1}\widetilde{m}^2 + 4)y$ должен быть квадратом в поле $\widetilde{L}$. Это равносильно выполнению равенства

$$(\mu^{-1}\widetilde{m}^2 + 4)y = (\gamma_1 + \gamma_2\widetilde{m} + \gamma_3\widetilde{m}^2 + \gamma_4\widetilde{m}^3)^2, \tag{15}$$

где γ_i – некоторые элементы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-1})$. Так как элементы $\{\widetilde{m}^j\}_{j=0}^3$ составляют базис поля $\widetilde{L}$ над подполем $\mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-1})$, то из условия (15) получаем систему соотношений

$$\begin{aligned} 4y &= \gamma_1^2 + 4\gamma_2\gamma_4\mu^2 + 2\gamma_3^2\mu^2, \\ \gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_3\gamma_4\mu^2 &= 0, \\ y\mu^{-1} &= 2\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2^2 + 2\gamma_4^2\mu^2, \\ \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Итак, условия распадения алгебры Λ_2 при $k = \mathbb{Q}$, $d = 7$, $x = 2$ над своим центром $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ эквивалентны условиям распадения алгебры $\widetilde{\Lambda}$, порожденной элементами a, b и полем $\widetilde{L}$, удовлетворяющими соотношениям

$$a^4 = \sqrt{-1},\ b^2 = -1,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ ua = au^a,\ ub = bu^b,\ \forall\, u \in \widetilde{L}, \tag{17}$$

[11] Напомним, что $\alpha = 4$, $\beta = 1$.

где действия элементов a, b на поле $\widetilde{L}$ заданы согласно (14). При этом, при выполнении условия $\mathbb{Q}[-7, y] \sim 1$ распадение алгебры $\widetilde{\Lambda}$ оказывается равносильным представимости алгебры Λ в виде матричной алгебры порядка 8 над своей подалгеброй.

Покажем, что алгебра $\widetilde{\Lambda}$ распадается для некоторого подходящего μ. Для этого достаточно установить разрешимость задачи погружения $(\mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{2}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}(\sqrt{-7}), Q_{32}, \gamma)$ с циклическим ядром порядка 8.

Лемма 4. *Задача погружения* $(\mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{2}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}(\sqrt{-7}), Q_{32}, \gamma)$ *разрешима.*

Доказательство. Проверим выполнение условий согласности в данной задаче погружения. Пусть $M = Q_{32} \times K$, где $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-1}, \sqrt{2})$. Положим также $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Алгебра M имеет следующие центральные попарно ортогональные идемпотенты

$$E_0 = \frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+a^4}{2} \cdot \frac{1+a^2}{2}, \quad E_1 = \frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+a^4}{2} \cdot \frac{1-a^2}{2},$$
$$E_2 = \frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1-a^4}{2}, \quad E_3 = \frac{1-a^8}{2}.$$

Обозначим $M_i = ME_i$ для всех $i = \overline{0, 3}$.

Алгебра M_0 изоморфна скрещенному произведению $Q_{32}/\ker\gamma \times K$, которое является матричной алгеброй порядка 4 над k.

Алгебра M_1 является тензорным произведением над k попарно коммутирующих алгебр $A_1 = \langle aE_1, \sqrt{2}E_1 \rangle_k$ и $A_2 = \langle b\sqrt{2}E_1, \sqrt{-1}E_1 \rangle_k$, причем $A_1 \cong k[-1, 2]$, а $A_2 \cong k[2, -1]$. Так как $2 = 1^2 + 1^2$, то $M_1 \cong \mathrm{Mat}(4, k)$.

Центр алгебры M_2 порождается над k элементом $a^2\sqrt{-1}E_2$, поэтому алгебра M_2 изоморфна тензорному произведению центра на тензорное произведение попарно коммутирующих алгебр $A_1 = \langle (a + a^{-1})E_2, \sqrt{2}E_2 \rangle_k$ и $A_2 = \langle bE_2, \sqrt{-1}E_2 \rangle_k$. Таким образом, алгебра M_2 изоморфна $(k \oplus k) \otimes_k k[2, 2] \otimes_k k[1, -1]$. Поскольку $2 = 2^2 - 2 \cdot 1^2$, то $M_2 \cong \mathrm{Mat}(4, k \oplus k)$.

Центр алгебры M_3 порождается над k элементами $a^4\sqrt{-1}E_3$ и $(a^2 + a^{-2})E_3$, поэтому алгебра M_3 как $Z(M_3)$-алгебра изоморфна тензорному произведению попарно коммутирующих алгебр

$$A_1 = \langle (a + a^{-1})E_3, \sqrt{2}E_3 \rangle_{Z(M_3)} \ \text{ и } \ A_2 = \langle bE_3, \sqrt{-1}E_3 \rangle_{Z(M_3)}.$$

Поскольку $Z(M_3) \cong k(\sqrt{2}) \otimes_k (k \oplus k)$, то алгебра M_3 эквивалентна в группе Брауэра $B(k(\sqrt{2}))$ алгебре $k(\sqrt{2})[2+\sqrt{2},\, 2] \otimes_{k(\sqrt{2})} k(\sqrt{2})[-1,\, -1]$, т.е. эквивалентна единице в $B(k(\sqrt{2}))$, ибо $k \cdot \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2$, а $(\mathbb{Q}_2(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}_2) = 2$. Таким образом, алгебра $M_3 \cong \mathrm{Mat}(4,\, k(\sqrt{2}) \otimes_k (k \oplus k))$. Таким образом, в задаче $(K/k,\, Q_{32},\, \gamma)$ выполнено условие согласности.

Установим, что дополнительное условие погружения исчезает. С этой целью заметим, что поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})(\sqrt{-1})$ линейно разделены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, при этом их композит $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})(\sqrt{2},\, \sqrt{-1})$ содержит примитивный корень восьмой степени из единицы. Поскольку -7 является квадратом в поле $\mathbb{Q}_2$, а элементы $2,\, -1$ порождают 2-мерное векторное подпространство в 3-мерном пространстве $\mathbb{Q}_2^*/\mathbb{Q}_2^{*2}$ над полем $\mathbb{F}_2$, то группа разложения для $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})(\varepsilon_8)/\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ изоморфна V_4. Но тогда, согласно теореме Демушкина–Шафаревича [6, теорема 1], дополнительное условие погружения исчезает. $\square$

Пусть $k = \mathbb{Q}$, $L = k(\sqrt{7},\, \sqrt{2},\, \sqrt{y(4+\sqrt{2})})$, а ψ выбрано в соответствии с (10).

Лемма 5. *Сопутствующая задача погружения* $(L/k(\sqrt{7}),\, \langle a \rangle,\, \psi)$ *разрешима для некоторого подходящим образом выбранного элемента* $y = y_1 \in \mathbb{Q}^*$.

Доказательство. Ясно, что $\langle a \rangle$ – циклическая группа порядка 16. Указанный элемент y_1 существует тогда и только тогда, когда разрешима задача погружения квадратичного расширения $k(\sqrt{7}, \sqrt{2})/k(\sqrt{7})$ в поле с циклической группой Галуа порядка 16. Рассмотрим вспомогательную задачу погружения $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q},\, Z_{16},\, \pi)$ с циклическим ядром порядка 8 и каноническим эпиморфизмом π. Проверим сначала выполнение условий согласности в данной вспомогательной задаче. Положим $\Delta = Z_{16} \times \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и рассмотрим следующие центральные попарно ортогональные идемпотенты алгебры Δ:

$$E_1 = \frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+a^4}{2} \cdot \frac{1+a^2}{2},$$
$$E_2 = \frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+a^4}{2} \cdot \frac{1-a^2}{2},$$
$$E_3 = \frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1-a^4}{2}, \qquad E_4 = \frac{1-a^8}{2}.$$

Положим $\Delta_j = \Delta E_j$ для всех $j = \overline{1,\, 4}$.

Алгебра Δ_1 является скрещенным произведением для тривиальной сопутствующей задачи первого рода, полученной факторизацией по ядру, и потому является матричной порядка 2 над $\mathbb{Q}$.

Алгебра Δ_2 порождена антикоммутирующими элементами aE_2 и $\sqrt{2}E_2$, поэтому изоморфна алгебре $\mathbb{Q}[1, 2]$, т.е. также является матричной порядка 2 над $\mathbb{Q}$.

Алгебра Δ_3 имеет нетривиальный над $\mathbb{Q}$ центр, порожденный элементом a^2E_3; при этом $Z(\Delta_3) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Алгебра $\langle (a+a^{-1})E_3, \sqrt{2}E_3\rangle$ как $Z(\Delta_3)$-алгебра изоморфна алгебре обобщенных кватернионов $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})[2, 2]$, которая, очевидно, распадается. Но тогда и алгебра Δ_3 есть матричная алгебра порядка 2 над своим центром.

Алгебра Δ_4 имеет нетривиальный над $\mathbb{Q}$ центр, порожденный элементами a^4E_4 и $(a^2 + a^{-2})E_4$; при этом $Z(\Delta_4) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$. Таким образом, алгебра Δ_4 порождается над своим центром антикоммутирующими элементами $(a+a^{-1})E_4$ и $\sqrt{2}E_4$. Итак, $\Delta_4 \cong \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2})[2+\sqrt{2}, 2]$, а потому является матричной порядка 2 над своим центром.

Проверим, что во вспомогательной задаче дополнительное условие погружаемости исчезает. В самом деле, присоединим к полю $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ примитивный корень степени 8 из единицы. Получим поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$, которое является расширением Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой V_4. Ясно, что $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_2(\sqrt{2}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}_2) \cong V_4$. Поэтому в силу [6, теорема 1] дополнительное условие погружения исчезает.

Остается только заметить, что искомая задача погружения расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ в поле с циклической группой порядка 16 является $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$-локализацией разрешимой вспомогательной задачи. $\square$

Лемма 6. *Сопутствующая задача погружения* $(L/k(\sqrt{2}), \langle a^2, b\rangle, \psi)$ *разрешима для некоторого подходящим образом выбранного элемента* $y = y_2 \in \mathbb{Q}^*$.

Доказательство. Легко видеть, что группа $\langle a^2, b\rangle$ изоморфна группе Q_{16}. Таким образом, искомый элемент y_2 существует тогда и только тогда, когда разрешима задача погружения $(\mathbb{Q}(\sqrt{7},\sqrt{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}), Q_{16}, \nu)$, где Q_{16} порождено элементами a^2, b, а ν – естественный эпиморфизм с ядром $\langle a^2\rangle$. Но условия разрешимости такой задачи были получены в предложении 2. Именно, должен найтись элемент $y_2 \in \mathbb{Q}^*$, такой что, во-первых, алгебра $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7, y_2(4 + \sqrt{2})]$ распадается, а, во-вторых, алгебры $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-7})[2, y_2(4+\sqrt{2})]$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-7})[-1, -1]$ изоморфны. Но поскольку алгебра $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-7})[-1, -1]$ распадается (т.к. алгебра $\mathbb{Q}[-1, -1]$ имеет нетривиальные инварианты Хассе лишь в вещественной и в 2-локальной точках поля $\mathbb{Q}$, а $(\mathbb{Q}_2(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}_2) = 2)$, то условие разрешимости сводится к поиску такого элемента $y_2 \in \mathbb{Q}^*$, что алгебры $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-7})[2, y_2(4+\sqrt{2})] \sim 1$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7, y_2(4+\sqrt{2})]$ распадаются одновременно. Т.е. должна распадаться лишь алгебра $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7, y_2(4+\sqrt{2})]$. Покажем, что требуемый элемент $y_2 \in \mathbb{Q}^*$ существует.

Рассмотрим конечное множество S, состоящее из тех точек поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, в которых алгебра $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7, 4+\sqrt{2}]$ не распадается. Ясно, что в архимедовых точках алгебра $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7, 4+\sqrt{2}]$ распадается. Пусть T – множество простых чисел, над которыми лежат точки из S.

Если $p \in T$ таково, что $p \notin \{2, 7\}$, причем символ Лежандра $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, то число p остается простым в кольце $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$. Так как кольцо $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ евклидово, то из-за разложения[12] $4+\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+2\sqrt{2})$ получаем, что p не делит $4+\sqrt{2}$. Но тогда алгебра $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7, 4+\sqrt{2}]$ распадается p-локально[13].

Если $p \in T$, но $p \notin \{2, 7\}$, то по доказанному можно считать, что $p^2 \equiv 1 (\operatorname{mod} 16)$. Но тогда пополнение алгебры $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7, 4+\sqrt{2}]$ по любой точке поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, лежащей над p, даст алгебру $\mathbb{Q}_p[-7, 4+u]$, где $u \in \mathbb{Q}_p$, причем $u^2 = 2$. Для таких p выберем $(y_2)_p \in \mathbb{Q}_p^*$ так, чтобы алгебра $\mathbb{Q}_p[-7, (y_2)_p(4+u)]$ распадалась.

Пусть $p = 2$. Так как -7 является квадратом в $\mathbb{Q}_2$, то алгебра $\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})[-7, 4+\sqrt{2}]$ распадается.

Пусть $p = 7$. Так как 2 является квадратом в $\mathbb{Q}_7$, то 7-локализация алгебры $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7, 4+\sqrt{2}]$ даст алгебру $\mathbb{Q}_7[-7, 4+v]$, где $v \in \mathbb{Q}_7$, причем $v^2 = 2$. В таком случае выберем $(y_2)_7 \in \mathbb{Q}_7^*$ так, чтобы алгебра $\mathbb{Q}_7[-7, (y_2)_7(4+v)]$ распадалась.

В силу теоремы Чеботарева о плотности существует простое число y_2, p-локализация которого совпадает[14] с $(y_2)_p$ для всех $p \in T$, причем символ Лежандра $\left(\frac{-7}{y_2}\right) = 1$. Докажем, что y_2 – искомый элемент. В самом деле, если точка $\mathfrak{p}$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ не лежит в $S \cup \{y_2\}$, то

---

[12]Ясно, что $\sqrt{2}$ – простой элемент кольца $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$, а идеал $(1+2\sqrt{2})$ лежит над 7.
[13]Ибо -7 и $4+\sqrt{2}$ – единицы кольца $\mathbb{Z}_p(\sqrt{2})$.
[14]С точностью до локальных квадратов.

алгебра $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[-7,\, y_2(4+\sqrt{2})]$ распадается $\mathfrak{p}$-локально. Поэтому осталось рассмотреть алгебру $\mathbb{Q}_{y_2}(\sqrt{2})[-7,\, y_2(4+\sqrt{2})]$, которая, очевидно, распадается в силу выбора простого числа y_2. $\square$

Вспомним, что нам достаточно установить для подходящим образом выбранного элемента $y \in \mathbb{Q}^*$ выполнение условия согласности в задаче $(L/k,\, Q_{32},\, \psi)$, где ψ выбрано в соответствии с (10), $k = \mathbb{Q}$, а $L = k(\sqrt{7},\, \sqrt{2},\, \sqrt{y(4+\sqrt{2})})$. Поскольку основное поле является полем алгебраических чисел, то для согласности необходима и достаточна разрешимость всех сопутствующих локальных задач. Напомним также, что Q_{32} порождена элементами a, b, удовлетворяющими соотношениям (3).

Существует лишь конечное число точек поля k, разветвленных в $L_0 = k(\sqrt{7},\, \sqrt{2},\, \sqrt{4+\sqrt{2}})$. Обозначим через S множество всех таких точек[15]. Ясно, что если $p \notin S$, то p-локализация задачи $(L_0/k,\, Q_{32},\, \psi)$ разрешима в силу [4, гл. 3, §14, лемма 3.14]. Пусть $p \in S$, тогда возможно несколько случаев.

Если $p = 2$, то (так как -7 является квадратом в поле $\mathbb{Q}_2$) $L_0 \cdot \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1},\, \sqrt{2})$, т.е. 2-локализация задачи $(L_0/k,\, Q_{32},\, \psi)$ является сопутствующей 2-локальной задачей к разрешимой задаче из леммы 4. Поэтому элементы $y \in \mathbb{Q}^*$ и $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{-7})^*$, согласованные при помощи (16), могут быть выбраны 2-локально так, чтобы алгебры Λ_1 и $\widetilde{\Lambda}$ 2-локально распадались одновременно (напомним, что условия распадения алгебры Λ_1 найдены в лемме 3, а $\widetilde{\Lambda}$ распадается тогда и только тогда, когда распадается алгебра $\Lambda_2 = (Q_{32} \times L)E_2$, а идемпотент E_2 выбран согласно (11)). Таким образом, элемент $y \in \mathbb{Q}^*$ может быть 2-локально выбран так, что 2-локализация задачи[16] $(L/k,\, Q_{32},\, \psi)$ разрешима.

Если $p = 7$, то, поскольку в силу квадратичного закона взаимности 2 является квадратом в поле $\mathbb{Q}_7$, мы получаем, что 7-локализация задачи $(L_0/k,\, Q_{32},\, \psi)$ является сопутствующей задачей второго рода к задаче из леммы 6, а потому разрешима для подходящего 7-локального выбора элемента $y \in \mathbb{Q}^*$ и при замене L_0 на соответствующее поле L.

---

[15] В данном случае некоторое подмножество простых чисел, ибо $k = \mathbb{Q}$, а также символ ∞.

[16] L получается из L_0 заменой $\sqrt{4+\sqrt{2}}$ на $\sqrt{y(4+\sqrt{2})}$, причем 2-локальное поведение y выбрано согласно лемме 4.

Если $p \in S \setminus \{2, 7\}$, то силу того, что $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ – евклидово кольцо, а $4+\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+2\sqrt{2})$, имеем: никакая точка поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, лежащая над p, не делит[17] $4+\sqrt{2}$. В частности, расширение L_0/k неразветвлено по p.

Если $p = \infty$, то достаточно выбрать $y > 0$.

Поэтому для каждого $p \in S$ (включая символ $p = \infty$) мы можем выбрать элемент y_p, такой что p-локализация задачи $(L/k,\, Q_{32},\, \psi)$ разрешима. Поскольку S – конечное множество, то в силу теоремы Чеботарева о плотности можно выбрать простой элемент $y \in \mathbb{Q}^*$, p-локализация которого совпадает с y_p для всех $p \in S$, причем дополнительно 2 является квадратом в $\mathbb{Q}_y$. Покажем, что такой элемент является искомым. В самом деле, если q – простое число, не лежащее в $S \cup \{y\}$, то q-локализация задачи $(L/k,\, Q_{32},\, \psi)$ разрешима, так как L/k неразветвлено по q. Поэтому достаточно лишь рассмотреть y-локализацию задачи $(L/k,\, Q_{32},\, \psi)$. Так как разрешимость q-локализации такой задачи равносильна q-локальному распадению алгебр Λ_1 и Λ_2 над своими центрами, а Λ_1 распадается тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}[-7,\, y] \cong \mathrm{Mat}(2,\, \mathbb{Q})$, то обязательно -7 является квадратом в Q_y в силу закона взаимности Артина (т.к. локализация алгебры $\mathbb{Q}[-7,\, y]$ по всем остальным простым точкам распадается). Далее, расширение $\mathbb{Q}_y(\sqrt{-1},\, \sqrt{2})/\mathbb{Q}_y$ неразветвлено[18]. Так как по условию 2 является квадратом в $\mathbb{Q}_y$, то y-локализация задачи $(L/k,\, Q_{32},\, \psi)$ является сопутствующей задачей погружения второго рода к задаче из леммы 6, а так как $\left(\frac{-7}{y}\right) = 1$, то из доказательства леммы 6 получаем разрешимость y-локализации задачи $(L/k,\, Q_{32},\, \psi)$.

Итак, нами доказано

Предложение 4. *Задача погружения* (4) *при $k = \mathbb{Q}$, $d = 7$, $n = 4$ разрешима.*

Теорема 3. *Задача погружения* (4) *при $k = \mathbb{Q}$, $d = 7$, $n = 4$ является ультраразрешимой.*

Доказательство. В силу предложений 1, 4 а также леммы 1 достаточно показать, что задача погружения (4) при $k = \mathbb{Q}$, $d = 7$, $n = 3$ неразрешима. В силу предложения 2 надо показать, что для всех $x \in \mathbb{Q}^*$, таких, что алгебра $\mathbb{Q}[-7,\, x]$ распадается, алгебры $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})[-1,\, -1]$

[17] Идеал $(1+2\sqrt{2})$ кольца $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ лежит над 7, а $(\sqrt{2})$ – над 2.

[18] Мы заменили $\sqrt{7}$ на $\sqrt{-1}$, ибо -7 является квадратом в $\mathbb{Q}_y$.

и $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})[2, x]$ не являются изоморфными. Это знаменитый пример Д. К. Фаддеева неразрешимой задачи погружения полей алгебраических чисел с циклическим ядром порядка 8, в которой выполнено условие согласности (см. [8]). Теорема доказана. □

6°. Рассмотрим задачу погружения $(K/k, Q_{16}, \varphi, Q_8)$, где Q_{16} задана копредставлением (3) при $n = 3$, а Q_8 вложена в Q_{16} как нормальная подгруппа, порожденная элементами a^2, b. При этом $\varphi(b) = 1$, а $\varphi(a)$ порождает группу $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Теорема 4. *Задача* $(K/k, Q_{16}, \varphi, Q_8)$ *при* $k = \mathbb{Q}$, *а* $K = k(\sqrt{7})$ *является ультраразрешимой.*

Доказательство. Согласно результату Б. Б. Лурье [4, гл. 5, §1, теорема 5.1.4] задача погружения с неабелевым ядром порядка 8 разрешима над полями алгебраических чисел тогда и только тогда, когда разрешима ее $\mathbb{R}$-локализация. Так как $k \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}$, а $K \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}$, то задача $(K/k, Q_{16}, \varphi, Q_8)$ разрешима. Для ультраразрешимости данной задачи достаточно показать неразрешимость всех максимальных присоединенных задач (ясно, что ядро Q_8 не лежит в группе Фраттини накрывающей группы). Согласно лемме 1, достаточно рассмотреть две задачи: $(K/k, \langle a\rangle, \varphi_1, \langle a^2\rangle)$ и $(K/k, \langle a^2, ab\rangle, \varphi_2, \langle a^2\rangle)$, где эпиморфизмы φ_1, φ_2 индуцированы эпиморфизмом φ. Первая задача представляет собой задачу погружения квадратичного расширения в алгебру Галуа с циклической группой порядка 8, вторая – это задача погружения квадратичного расширения в алгебру Галуа с группой Q_8, причем, отождествляя ab и b, мы приходим к уже изученной задаче (4) при $n = 2$. Таким образом, неразрешимость задачи $(K/k, \langle a^2, ab\rangle, \varphi_2)$ вытекает из теоремы 1 и теоремы 3. Неразрешимость задачи $(K/k, \langle a\rangle, \varphi_1)$ вытекает из неразрешимости сопутствующей задачи первого рода, полученной факторизацией по подгруппе $\langle a^4\rangle$; указанная сопутствующая задача неразрешима, ибо 7 не представима в виде суммы двух квадратов элементов поля $\mathbb{Q}$. Теорема доказана. □

7°. Данную работу мы завершим некоторыми замечаниями.

Теорема 5. *Существует бесконечное число нетривиальных* (*т.е. когда ядро не лежит в группе Фраттини накрывающей группы*) *ультраразрешимых задач погружения с циклическими ядрами порядков* 8 *и* 16 *а также с кватернионным ядром порядка* 8.

Доказательство. На основании теорем $2, 3, 4$ мы можем построить ультраразрешимые задачи погружения с ядрами, изоморфными циклическим группам порядков 8, 16 а также с кватернионным ядром порядка 8, при этом эти ядра не будут лежать в группе Фраттини накрывающей группы. Более того, ядра этих задач являются гамильтоновыми группами: все собственные подгруппы в них нормальны. Поэтому применимы теоремы 1 и 2 работы [2] для задач с ядрами Z_{16} и Q_8. В задаче с ядром Z_8 достаточно дополнительно установить, что что если N – конечная группа, композиционные факторы которой обладают GAR-реализацией (см. [9, Ch. IV, §3, Corollary 3.7, Ch. IV, §4,Theorem 4.3, Ch. IV,§3.1]) над $\mathbb{Q}$, то найдется задача погружения расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-7})/\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ с ядром N, имеющая поле-решение. С этой целью рассмотрим произвольную (например, полупрямую) задачу погружения расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$ с ядром N. Тогда такая задача непременно будет иметь поле-решение L_0. Так как группа Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-7})/\mathbb{Q})$ изоморфна группе Клейна, то можно сделать подъем задачи с полем-решением L_0 до задачи погружения расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-7})/\mathbb{Q}$ с ядром N. Одним из решений поднятой задачи будет алгебра Галуа $L_1 := L_0 \otimes_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})} \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-7})$. Заметим, что поля L_0 и $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-7})$ линейно разделены над $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$: этот факт следует из того, что N не обладает композиционным фактором, изоморфным циклической группе порядка 2. Поэтому алгебра Галуа L_1 является в действительности полем. Ясно, что L_1 является также решением задачи погружения расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-7})/\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ с ядром N. Это и есть искомая задача; в качестве L можно взять L_1. Теперь можно применить [2, теорема 2]. □

Замечание 3. Теорема 1 утверждает, что в задаче (4) при $n > 2$ условие согласности выполнено при любом выборе основного поля алгебраических чисел k, лишь бы $\mathbb{R}$-локализация задачи была разрешима. Условие (8) в случае, когда k – p-локальное поле характеристики нуль становится тривиальным. Таким образом, задача (4) при всех $n > 2$ универсально разрешима в локальных полях нулевой характеристики (т.к. дополнительное условие погружаемости в этом случае исчезает согласно [5, теорема 2]). Ясно, что указанное групповое расширение (4) тем не менее не является полупрямым.

Б. Б. Лурье в работе [10] для каждой группы F порядка выше 2 построил универсально разрешимое расширение

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$$

с абелевым ядром A, не являющееся полупрямым. При этом, очевидно, универсально разрешимое расширение для случая $|F| = 2$ обязательно полупрямое. В серии работ В. В. Ишханова и Б. Б. Лурье [11–13] показано, что класс универсально разрешимых расширений совпадает с классом полупрямых расширений, если ядро таких расширений является циклическим. При доказательстве этого факта существенно используются локальные поля. Построенные нами локально универсально разрешимые (но не полупрямые) расширения с циклическим 2-ядром сколь угодно высокого порядка не противоречат исследованиям [11–13], ибо случай $|F| = 2$ там не рассматривался ввиду очевидного отсутствия отличия класса универсально разрешимых расширений от класса полупрямых расширений при $|F| = 2$.

Замечание 4. В работе [3] доказательство теоремы 2 для спорадических ядер не является полным. Здесь мы излагаем полное доказательство.

Пусть $(K/k,\, G,\, \varphi,\, A)$ – задача погружения со спорадическим ядром A. Покажем, что она всегда разрешима, но не является ультраразрешимой. В самом деле, в работе [3] отмечено, что условие ультраразрешимости наследуется при спуске. Поэтому, осуществив спуск по централизатору ядра, можно считать, что группа $\mathrm{Gal}(K/k)$ является подгруппой группы внешних автоморфизмов ядра A. Но хорошо известно (см. [14]), что группа внешних автоморфизмов ядра A либо тривиальна, но тогда задача погружения вырождается в обратную задачу теории Галуа, тривиально разрешимую в классе алгебр Галуа, либо $|\mathrm{Out}\, A| = 2$. Как любезно сообщил автору В. Д. Мазуров, в этом случае группа автоморфизмов ядра A является полупрямым расширением. Поэтому такая задача разрешима, но не может быть ультраразрешимой. Автор нашел простые аргументы для проверки указанного утверждения.

Именно, пусть в группе $\mathrm{Aut}A$ нет внешнего автоморфизма, квадрат которого является тривиальным автоморфизмом. Рассмотрим задачу $(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}, \mathrm{Aut}A, \pi)$, где π – естественный эпиморфизм. Такая задача неразрешима, ибо уже ее $\mathbb{R}$-локализация неразрешима (она разрешима тогда и только тогда, когда задача $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathrm{Aut}A, \pi_1)$ полупрямая). Однако, согласно [9, Ch. IV, §3, Corollary 3.7, Ch. IV, §4, Theorem 4.3, Ch. IV, §3.1], а также [14], все спорадические группы с нетривиальной группой внешних автоморфизмов обладают GAR-реализацией над полем $\mathbb{Q}$, что означает, в частности, разрешимость задачи $(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}, \operatorname{Aut} A, \pi)$. Противоречие.

Итак, задача погружения со спорадическим ядром не является ультраразрешимой, хотя и разрешима, так как есть результат подъема с полупрямой задачи.

Список литературы

1. В. В. Ишханов, *О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром.*— Изв. АН СССР. Сер. мат., **40**, No. 1 (1976), 3–25.
2. Д. Д. Киселев, *Примеры задач погружения, у которых решения только поля.* — УМН, **68**, No. 4 (2013), 181–182.
3. Д. Д. Киселев, Б. Б. Лурье, *Ультраразрешимость и сингулярность в проблеме погружения.*— Зап. научн. сем. ПОМИ, **414** (2013), 113–126.
4. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* Наука, М., (1990).
5. А. В. Яковлев, *Задача погружения полей.*— Изв. АН СССР. Сер. мат., **28**, No. 3 (1964), 645–660.
6. А. В. Яковлев, *Задача погружения для числовых полей.*— Изв. АН СССР, Сер. мат., **31**, No. 2 (1967), 211–224.
7. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Условие согласности для задачи погружения с p-расширением.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **236** (1997), 100–106.
8. Д. К. Фаддеев, *Об одной гипотезе Хассе.*— ДАН СССР, **94**, No. 6 (1954), 1013–1016.
9. G. Malle, B. H. Matzat, *Inverse Galois theory.* Springer-Verlag, N.Y., (1999).
10. Б. Б. Лурье, *Об универсально разрешимых задачах погружения.* — Тр. МИАН **183** (1990), 121–126.
11. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Универсально разрешимые задачи погружения с циклическим ядром.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **265** (1999), 189–197.
12. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Универсальная задача погружения с циклическим ядром порядка 8.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **281** (2001), 210–220.
13. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Об универсально разрешимых задачах погружения с циклическим ядром.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **338** (2006), 173–179.
14. С. А. Сыскин, *Абстрактные свойства простых спорадических групп.* — УМН, **35** No. 5 (1980), 181–212.

Kiselev D. D. Ultrasolvable covering of the group Z_2 by the groups Z_8, Z_{16} and Q_8.

We construct infinite series of non-trivial ultrasolvable embedding problems with cyclic kernel of order 8, 16 and quaternion kernel of order 8. Moreover, we discover 2-local non-split universally solvable embedding

problems of a quadratic extension into a Galois algebra whose kernel is generalized quaternion or cyclic.

Всероссийская академия
внешней торговли
минэкономразвития РФ,
Пудовкина 4а, 119285, Москва,
Россия
E-mail: denmexmath@yandex.ru

Поступило 21 апреля 2015 г.