Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 435, 2015 г.

И. М. Зильберборд

ТЕОРЕМА О СОГЛАСОВАННЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ДЛЯ МОДУЛЕЙ НАД ПОЛУЦЕПНЫМИ НЕТЕРОВЫМИ СЛЕВА КОЛЬЦАМИ

§1. Введение

Напомним, что модуль называется цепным, если структура его подмодулей линейно упорядочена относительно включения, и полуцепным, если он является прямой суммой некоторого семейства цепных модулей. Кольцо R называется полуцепным, если R_R и ${}_RR$ – полуцепные модули.

В данной работе доказывается теорема о согласованных разложениях для проективных (не обязательно конечно порождённых) левых модулей над полуцепными нётеровыми слева кольцами (теорема 2.1). Работа продолжает цикл статей [1–4], в которых изучается категория модулей над кольцами такого типа.

Доказанная автором в [4] теорема о чистой проективности произвольного подмодуля чисто проективного модуля над рассматриваемыми кольцами позволяет в доказательстве теоремы о согласованных разложениях придерживаться плана статьи [5].

Классическая теорема о согласованных базисах для конечно порождённых свободных абелевых групп была впервые обобщена Коэном и Глюком [5] для произвольных свободных абелевых групп (и свободных модулей над областями главных идеалов). В дальнейшем Хилл и Меджиббен [6] вывели эту теорему из обобщённой теоремы о согласованных базисах для абелевых групп.

Генералов и Желудев [7,8] доказали обобщённую теорему о согласованных разложениях для модулей над коммутативными дедекиндовыми кольцами и ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами. Согласованные базисы изучались также, в частности, в работах [9–11].

Ключевые слова: полуцепные кольца, согласованные разложения, проективные модули.

§2. Доказательство основной теоремы

Теорема 2.1. *Пусть R – полуцепное нётерово слева кольцо, B – проективный левый R-модуль, A – такой его подмодуль, что B/A – прямая сумма циклических модулей. Тогда существует такое семейство неразложимых подмодулей $\{P_i\}_{i\in I}$ модуля B, что $B = \bigoplus_{i\in I} P_i$ и $A = \bigoplus_{i\in I}(A \cap P_i)$.*

Для случая, когда модуль B конечно порождён, эта теорема доказана Дроздом [12] и Уорфилдом ([13], теорема 3.3) (см.также Робсон ([14], теорема 25.3.3) и Кириченко [15]).

Ключевой в доказательстве Робсона является следующая лемма.

Лемма 2.2. (*См.* [14], *лемма* 25.3.2) *Пусть P – конечно порождённый проективный модуль над полуцепным кольцом R, x – локальный элемент модуля P. Тогда существует неразложимое прямое слагаемое Q в P, содержащее x.*

Замечание 2.3. Ясно, что в лемме требование конечной порождённости модуля P излишне: пусть $P = \bigoplus_{j\in J} M_i$, где модули M_i неразложимы, тогда все M_i – конечно порождённые модули, и x содержится в прямой сумме некоторого их конечного подсемейства.

Из теоремы 2.1 для конечно порождённых проективных модулей следует, что любой неразложимый конечно порождённый левый модуль над полуцепным нётеровым слева кольцом R изоморфен фактормодулю модуля вида Re (для некоторого неразложимого идемпотента e кольца R). Следовательно, любой такой модуль цепной, а любой конечно порождённый левый R-модуль является полуцепным.

Будем говорить, что элемент x некоторого R-модуля M *локален*, если локальным (эквивалентно, неразложимым) является модуль Rx.

Переходя к доказательству теоремы 2.1, докажем сначала аналог утверждения (1.4) в [5].

Лемма 2.4. *Пусть B – проективный левый модуль над полуцепным нётеровым слева кольцом R, x – локальный элемент модуля B, тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *подмодуль Rx – прямое слагаемое модуля B;*
(2) *подмодуль Rx максимален среди локальных циклических подмодулей модуля B.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): пусть Rx содержится в локальном подмодуле Ry модуля B, тогда Rx – прямое слагаемое неразложимого модуля Ry, поэтому $Rx = Ry$.

(2) $\Rightarrow$ (1): по лемме 2.2 и замечанию 2.3 подмодуль Rx лежит в некотором неразложимом прямом слагаемом Q модуля B. Тогда Q – неразложимый проективный и потому циклический модуль, следовательно, $Rx = Q$. □

Следуя плану доказательства из [5], получим доказательство теоремы 2.1 при помощи следующих лемм.

Лемма 2.5. (ср. с [5], лемма X) *Пусть B – проективный левый модуль над полуцепным нётеровым слева кольцом R, A – подмодуль модуля B такой, что B/A – прямая сумма циклических модулей, C^* – конечно порождённый подмодуль модуля B/A. Тогда существуют конечно порождённые модули B_1 и C_1, удовлетворяющие следующим условиям:*
(а) *B_1 – прямое слагаемое модуля B, C_1 – прямое слагаемое модуля B/A,*
(б) *$\pi(B_1) = C_1$, где $\pi : B \longrightarrow B/A$ – канонический эпиморфизм,*
(в) *$C^* \subset C_1$.*

Доказательство. Пусть $B/A = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, где все модули M_i – ненулевые неразложимые циклические, и m_i – порождающий элемент модуля M_i. Рассмотрим сначала случай $C^* = M_k$ (где $k \in I$) и выберем $b \in \pi^{-1}(m_k)$.

Предположим, что подмодуль Rb не выделяется в модуле B прямым слагаемым. Тогда согласно лемме 2.4 модуль B содержит такой локальный элемент b_1, что $Rb \subsetneq Rb_1$. Можем считать, что $b_1 = eb_1$ для некоторого неразложимого идемпотента e кольца R. Пусть $b = n_1 b_1$, где $n_1 \in Re$. Обозначим $J = \mathrm{Rad}(R)$ – радикал Джекобсона кольца R.

Если $n_1 \notin J$, то Rn_1 не содержится в Je, и в силу локальности идеала Re найдётся такой элемент $r \in R$, что $e = rn_1$. Но тогда $b_1 = eb_1 = rn_1 b_1 = rb$, и мы получаем противоречие с выбором b_1.

Пусть теперь $n_1 \in J$. Рассмотрим $\pi(b_1) = \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i m_i$ (для некоторых $N \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in R$). Тогда $\pi(b) = n_1\pi(b_1) = \sum\limits_{i=1}^{N} n_1\gamma_i m_i$. С другой стороны, $\pi(b) = m_k$, поэтому $m_k = n_1\gamma_k m_k$, и $m_k = 0$ вопреки предположению (см., например, [14], теорема 18.4). Следовательно, подмодуль $B_1 = Rb$ – прямое слагаемое модуля B.

Далее общий случай для C^* сводится к рассмотренному аналогично доказательству [5], лемма X. □

Лемма 2.6. (ср. с [5], лемма Y) *Пусть B – проективный левый модуль над полуцепным нётеровым слева кольцом R, A – подмодуль модуля B такой, что B/A – прямая сумма циклических модулей, B^* – конечно порождённый подмодуль модуля B/A. Тогда существуют конечно порождённые модули B_1 и C_1, удовлетворяющие следующим условиям*:
(а) *B_1 – прямое слагаемое модуля B, C_1 – прямое слагаемое модуля B/A,*
(б) *$\pi(B_1) = C_1$, где $\pi : B \longrightarrow B/A$ – канонический эпиморфизм,*
(в) *$B^* \subset B_1$.*

Доказательство. С учётом [4, теорема 1.7] доказательство леммы полностью аналогично доказательству [5, лемма Y]. □

Заметим теперь, что лемма Z в [5] верна для коротких точных последовательностей вида $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ (где B – проективный модуль, C – прямая сумма семейства циклических модулей) в категории модулей над произвольным кольцом (см. доказательство ([5, лемма Z]). Следовательно, доказательство теоремы 2.1 можно завершить аналогично [5, с. 499].

В заключение автор хотел бы поблагодарить профессора А. И. Генералова за постановку задачи и искреннее внимание.

Литература

1. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Базисные подмодули модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 129–143.
2. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Базисные подмодули модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 154–169.
3. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Пополнение модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 170–185.
4. И. М. Зильберборд, *Чистоты и чисто-инъективные модули над полуцепными нётеровыми справа кольцами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** 2002, 214–232.
5. J. M. Cohen, H. Gluck, *Stacked bases for modules over principal ideal domains.* — J. Algebra **14** (1970), 493–505.

6. P. Hill, C. Megibben, *Generalizations of the stacked bases theorem.* — Trans. Amer. Math. Soc. **312**, No. 1 (1989), 377–402.
7. А. И. Генералов, М. В. Желудев, *Теорема о согласованных базисах в модулях над дедекиндовыми кольцами.* — Алгебра и анализ **7**, выпуск 4 (1995), 157–175.
8. А. И. Генералов, М. В. Желудев, *Согласованные разложения модулей над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами.* — Алгебра и анализ **9**, вып. 4 (1997), 47–62.
9. P. Astuti, H. K. Wimmer, *Stacked submodules of torsion modules over discrete valuation domains and h-independent bases.* www.mathematik.uni-wuerzburg.de/ wimmer/ab90/download/bullaustr3128.pdf
10. L. Fuchs, Sang Bum Lee, *Stacked bases over h-local Prüfer domains.* — Contemporary Mathematics, Abelian groups and modules **273** (2001), 129–135.
11. L. Salce, *Stacked bases for homogeneous completely decomposable groups.* — Commun. Algebra **29**, No. 6 (2001), 2575–2588.
12. Ю. А. Дрозд, *Об обобщенно однорядных кольцах.* — Матем. заметки **18**, No. 5 (1975), 705–710.
13. R. B. Warfield, *Serial rings and finitely presented modules.* — J. Algebra **37**, No. 2 (1975), 187–222.
14. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории*, т. 2. Мир, М., 1979.
15. В. В. Кириченко, *Обобщенно однорядные кольца.* Препринт ИМ-75-1, Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1975, 58 сс.

Zilberbord I. M. Stacked decomposition theorem for modules over serial left noetherian rings.

We prove the stacked decomposition theorem for infinitely generated left modules over serial left noetherian rings.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: igorr-5@yandex.ru

Поступило 1 октября 2015 г.