Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 435, 2015 г.

Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТРАНСВЕКЦИИ В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГРУППЕ

§1. Введение

Рассматривается элементарная сеть порядка n (элементарный ковер) $\sigma = (\sigma_{ij})$ аддитивных подгрупп коммутативного кольца (то есть сеть без диагонали), связанная с σ производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$, сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$, причем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ и сеть Ω является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть σ. В работе получено разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ из $E(\sigma)$ в произведение двух матриц M_1 и M_2, где M_1 – элемент группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$, M_2 – элемент сетевой группы $G(\tau)$ и сеть τ имеет вид $\tau = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$. Отметим, что настоящая статья мотивирована вопросом В.М.Левчука (Коуровская тетрадь, вопрос 15.46) о том, что необходимым и достаточным условием допустимости элементарной сети σ является допустимость всех пар $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$. Другими словами включение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарную группу $E(\sigma)$ эквивалентно включению $t_{ij}(\alpha)$ в группу $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ (для любых $i \neq j$).

В работе приняты следующие стандартные обозначения. Пусть e – единичная матрица порядка n, e_{ij} – матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ – элементарная трансвекция. Положим, далее, $t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}$. Для элементарной сети (ковра) σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная группа:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\rangle.$$

Далее, если σ – сеть, то через $G(\sigma)$ обозначается соответствующая сетевая (ковровая) группа [2].

Ключевые слова: сети, элементарные сети, замкнутые сети, сетевые группы, элементарная группа, трансвекция.

Работа В. А. Койбаева поддержана РФФИ (проект 13-01-00469).

§2. Производная, замкнутая и дополняемая сети

В этом параграфе для производной элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы построим две сети: производную сеть $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ и сеть $\sigma^E = \Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, которая является наименьшей дополняемой сетью, содержащей σ (см. [1]): $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$.

Пусть Λ – произвольное коммутативное кольцо с единицей, n – натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца Λ называется сетью (ковром) [2, 3] над кольцом Λ порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) [2–3, 4, вопрос 15.46]. Таким образом, элементарная сеть это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца Λ, для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел i, r, j.

Определение 1. *Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется дополняемой, если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ дополняема, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети.*

Хорошо известно, что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда (см. [2])

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \tag{1}$$

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \tag{2}$$

где суммирование берется по всем k отличным от i. Ясно, что элементарная сеть может быть дополнена до сети не всегда единственным способом. Однако, очевидно, формула (2) (при выполнении условий (1)) позволяет дополнить элементарную сеть σ наименьшей диагональю.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Рассмотрим набор $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ,

определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где, очевидно (так как σ – элементарная сеть), суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j, мы имеем $\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца Λ является элементарной сетью.

Если, например, $n = 3$, то производная сеть $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}.$$

Элементарная сеть $\omega = \sigma^1$ является дополняемой ([1], предложение 1), то есть для нее справедлива формула (1), а потому она дополняется до (полной) сети. Элементарную сеть ω можно дополнить до (полной) сети стандартным способом, пользуясь формулой (2). Однако, мы предлагаем другой (необходимый нам для дальнейшей работы) способ дополнения элементарной сети ω до полной. Для любых $i \neq j$ положим

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Тогда диагональные элементы ω_{ii}, $1 \leqslant i \leqslant n$, определим следующим образом:

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} (\gamma_{ik} \cap \gamma_{is} \cap \gamma_{ks}), \tag{3}$$

где суммирование ведется по всем $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$ (ясно, что $k \neq i, s \neq i$).

Замечание 1. Можно показать, что последняя сумма содержит группу $\sum\limits_{k \neq i} \omega_{ki}\omega_{ik}$, а потому представленная диагональ абелевых групп содержит диагональ, получаемую стандартным способом. Если, например, $n = 3$, то $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \gamma_{12} \cap \gamma_{13} \cap \gamma_{23}$.

Определение 2. *Элементарная сеть ω, дополненная диагональю формулой* (3), *является сетью* ([1], *предложение* 2)), *которая называется производной сетью* (*для σ*).

Пусть α, β – подгруппы аддитивной группы кольца Λ. Рассмотрим элементарную сеть σ_0 второго порядка и определим для нее γ:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} * & \alpha \\ \beta & * \end{pmatrix} \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\beta)^k.$$

Рассмотрим элементарную группу $E(\sigma_0) = \langle t_{21}(\beta), \quad t_{12}(\alpha)\rangle$. Если $a \in E(\sigma_0), \quad a = \begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{pmatrix}$, то справедливы включения ([1], предложение 4):

$$a_{11}, a_{22} \in \gamma, \quad a_{12} \in \alpha + \alpha\gamma, \quad a_{21} \in \beta + \beta\gamma.$$

Последний факт естественным образом индуцирует следующее построение. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Для произвольных $i \neq j$ положим $\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}$, где $\gamma_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. Таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной сетью, причем дополняемой, то есть справедливы включения $\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ для любых $i \neq j$ ([1], предложение 5). В силу формулы (2) дополним элементарную сеть Ω до (полной) сети стандартным способом, положив $\Omega_{ii} = \sum\limits_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki}$, где суммирование берется по $k, \quad k \neq i$. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \gamma_{ik}.$$

Так, например, $\Omega_{11} = \gamma_{12} + \gamma_{13} + \cdots + \gamma_{1n}$. Заметим, что $\omega_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$ для всякого i. Сеть Ω является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть σ ([1]).

Определение 3. *Сеть $\Omega = \sigma^E$ называется сетью, ассоциированной с элементарной группой $E(\sigma)$ (или D–замыканием сети σ).*

Для элементарной сети σ рассмотрим элементарную сеть $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$, индуцированную трансвекциями из группы $E(\sigma)$. А именно, для любых $i \neq j$ положим

$$\bar{\sigma}_{ij} = \{\alpha \in \Lambda \,:\, t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\}.$$

В силу известной коммутаторной формулы $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$ является элементарной сетью.

Определение 4. *Элементарная сеть $\bar{\sigma}$ называется замыканием сети σ. Если $\sigma = \bar{\sigma}$, то сеть σ называется замкнутой* (*или допустимой* [4], *вопрос* 15.46).

Очевидно, что примером замкнутой сети является дополняемая сеть. Элементарная сеть $\bar{\sigma}$ является наименьшей замкнутой сетью, содержащей σ ([1], предложение 9).

Предложение 1 ([1], теорема 1). *Элементарная сеть σ индуцирует производную сеть $\sigma^{(1)} = \omega$, замкнутую сеть $\bar{\sigma}$ и сеть $\sigma^E = \Omega$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, при этом выполняются включения $\omega \subseteq \sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \Omega$, причем*

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$$

для любых i, r, j.

Для сетей ω и Ω рассмотрим матричные кольца

$$M(\omega) = \{a = (a_{ij}) : \quad a_{ij} \in \omega_{ij}\} \subseteq M(\Omega) = \{b = (b_{ij}) : \quad b_{ij} \in \Omega_{ij}\ \}.$$

Следствие. *$M(\omega)$ – двусторонний идеал матричного кольца $M(\Omega)$.*

Предложение 2. *Пусть σ – элементарная сеть, Ω – сеть, асссоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$. Если $a = (\delta_{ij} + a_{ij}) \in E(\sigma)$, то $a_{ij} \in \Omega_{ij}$.*

Доказательство. Имеем $a = (\delta_{ij} + a_{ij}) \in E(\sigma) \subseteq E(\Omega) \subseteq G(\Omega)$. Осталось заметить, что Ω – (полная) сеть, а $G(\Omega)$ – сетевая группа (δ_{ij} – символ Кронекера). □

§3. Факторизация элементарной группы

Пусть σ – элементарная сеть, $\sigma^1 = \omega$, $\sigma^E = \Omega$ – сети, определенные для элементарной сети σ в §2. Пусть, далее $E(\sigma)$ и $E(\omega)$ – элементарные сетевые группы, определенные соответственно для элементарной сети σ и для сети ω; $G(\omega)$, $G(\Omega)$ – сетевые группы, определенные для (полных) сетей ω и Ω соответственно.

Положим

$$\Gamma_{ij} = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), \quad t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle.$$

Имеет место факторизация элементарной группы ($n \geqslant 3$):

$$E(\sigma) = (\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Gamma_{ij})E(\omega),$$

причем сомножители Γ_{ij} в произведении можно брать в любом порядке (см., например, [1]). Однако мы будем использовать факторизацию несколько в ином, удобном для нас виде. Для этого положим

$$\Gamma_1 = \prod_{3\leqslant i\leqslant n} \Gamma_{1i}(\sigma), \quad \Gamma_2 = \prod_{3\leqslant i\leqslant n} \Gamma_{2i}(\sigma), \quad \Gamma_3 = \prod_{3\leqslant i,j\leqslant n} \Gamma_{ij}(\sigma).$$

Заметим, что $\Gamma_3 \subseteq \mathrm{diag}(1,1,SL(n-2,k))$.

Из представленной факторизации вытекает следующее предложение.

Предложение 3. *Имеет место факторизация элементарной группы*

$$E(\sigma) = \Gamma_{12}(\sigma)\cdot\Gamma_3\cdot\Gamma_1\cdot\Gamma_2\cdot E(\omega), \tag{4}$$

причем сомножители в (4) *можно брать в любом порядке.*

§4. Разложение элементарной трансвекции в элементарной группе

В этом параграфе мы формулируем основные результаты работы.

Лемма. *Пусть* $h = \begin{pmatrix} 1+h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & 1+h_{22} \end{pmatrix}$. *Если*

$$H = \mathrm{diag}(h, \quad e_{n-2}) \in \Gamma_3\cdot\Gamma_1\cdot\Gamma_2\cdot E(\omega), \tag{5}$$

то

$$h_{11}\in\Omega_{11}, \quad h_{22}\in\Omega_{22}, \quad h_{12}\in\omega_{12}, \quad h_{21}\in\omega_{21}.$$

Замечание. Согласно предложению 1 таблица $\tau = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$ является сетью, поэтому по лемме $h\in G(\tau)$.

Доказательство леммы. Так как (см.(4)) $H\in E(\sigma)$, то согласно предложению 2 мы имеем $h_{ij}\in\Omega_{ij}$. Поэтому для доказательства леммы нужно показать, что

$$h_{12}\in\omega_{12}, \quad h_{21}\in\omega_{21}. \tag{6}$$

Согласно (5)

$$H = Q\cdot B\cdot C\cdot g, \quad Q\in\Gamma_3, \quad B\in\Gamma_1, \quad C\in\Gamma_2, \quad g\in E(\omega) \tag{7}$$

Положим

$$S = BC, \quad S^{-1} = C^{-1}B^{-1}, \quad S = (\delta_{ij}+s_{ij}), \quad S^{-1} = (\delta_{ij}+s'_{ij}).$$

Прежде чем мы начнем доказывать включения (6), сделаем несколько замечаний по поводу элементов матриц S и S^{-1}. Во-первых, согласно предложению 2 (так как $S, S^{-1} \in E(\sigma)$) мы имеем $s_{ij}, s'_{ij} \in \Omega_{ij}$. Во-вторых, по определению Γ_1 и Γ_2 нетрудно проверить, что

$$(BC)_{21} = s_{21} = 0, \quad (C^{-1}B^{-1})_{12} = s'_{12} = 0. \tag{8}$$

В третьих, согласно (7) мы имеем

$$H = QSg, \tag{9}$$

Поэтому, полагая

$$P = (\delta_{ij} + p_{ij}) = H^{-1}QS, \quad P^{-1} = (\delta_{ij} + p'_{ij}) = S^{-1}Q^{-1}H,$$

из (7) и (9) мы имеем

$$P, P^{-1} \in E(\omega) \subseteq G(\omega). \tag{10}$$

В-четвертых, так как $Q \in \mathrm{diag}(1, 1, SL(n-2, k))$, то при умножении матрицы Q слева на матрицу S первые две строки матрицы S не меняются. Аналогично, при умножении матрицы Q^{-1} справа на матрицу S^{-1} первых два столбца матрицы S^{-1} не меняются:

$$(QS)_{1i} = (S)_{1i}, \quad (QS)_{2i} = (S)_{2i}, \tag{11}$$

$$(S^{-1}Q^{-1})_{i1} = (S^{-1})_{i1}, \quad (S^{-1}Q^{-1})_{i2} = (S^{-1})_{i2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{12}$$

Приступим теперь непосредственно к доказательству включений (6).

Из (10) и (11) мы имеем

$$\delta_{1i} + p_{1i} = (1 + h_{22})(\delta_{1i} + s_{1i}) - h_{12}(\delta_{2i} + s_{2i}) \in \delta_{1i} + \omega_{1i},$$

$$\delta_{2i} + p_{2i} = -h_{21}(\delta_{1i} + s_{1i}) + (1 + h_{11})(\delta_{2i} + s_{2i}) \in \delta_{2i} + \omega_{2i}. \tag{13}$$

Аналогично, из (10) и (12) имеем

$$\delta_{i1} + p'_{i1} = (1 + h_{11})(\delta_{i1} + s'_{i1}) + h_{21}(\delta_{i2} + s'_{i2}) \in \delta_{i1} + \omega_{i1},$$

$$\delta_{i2} + p'_{i2} = h_{12}(\delta_{i1} + s'_{i1}) + (1 + h_{22})(\delta_{i2} + s'_{i2}) \in \delta_{i2} + \omega_{i2}. \tag{14}$$

Докажем теперь первое из включений (6): $h_{12} \in \omega_{12}$. Умножим обе части первого равенства из (13) на $\delta_{i2} + s'_{i2}$ и просуммируем (принимая во внимание то, что произведение первой строки матрицы S на второй столбец матрицы S^{-1} равно нулю):

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_{1i} + p_{1i})(\delta_{i2} + s'_{i2}) = (-h_{12}) \sum_{i=1}^{n} (\delta_{2i} + s_{2i})(\delta_{i2} + s'_{i2}) = -h_{12}.$$

Отсюда

$$-h_{12} = \sum_{i=1}^{n} (\delta_{1i} + p_{1i})(\delta_{i2} + s'_{i2}).$$

Согласно второму замечанию ($s'_{12} = 0$), включениям (10) (откуда $p_{1i} \in \omega_{1i}$), а также предложению 2 ($S^{-1} \in E(\sigma)$, $s'_{i2} \in \Omega_{i2}$) и предложению 1 ($\omega_{1i}\Omega_{i2} \subseteq \omega_{12}$) мы имеем

$$-h_{12} = \sum_{i=2}^{n} p_{1i}(\delta_{i2} + s'_{i2}) \in \sum_{i=2}^{n} \omega_{1i}\Omega_{i2} \subseteq \omega_{12}.$$

Второе из включений (6) доказывается аналогично. Умножим обе части первого равенства из (14) на $\delta_{2i} + s_{2i}$ и просуммируем (принимая во внимание то, что произведение второй строки матрицы S на первый столбец матрицы S^{-1} равно нулю):

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_{i1} + p'_{i1})(\delta_{2i} + s_{2i}) = h_{21} = \sum_{i=2}^{n} p'_{i1}(\delta_{2i} + s_{2i}) \in \sum_{i=2}^{n} \Omega_{2i}\omega_{i1} \subseteq \omega_{21}. \quad \square$$

Из предложения 3 и леммы вытекает следующая теорема (о представлении элементарной трансвекции в элементарной группе).

Теорема. *Пусть σ – элементарная сеть, $\sigma^1 = \omega = (\omega_{ij})$ и $\sigma^E = \Omega = (\Omega_{ij})$ соответственно производная сеть и D-замыкание сети σ. Пусть $t_{21}(\alpha) \in E(\sigma)$. Тогда*

$$t_{21}(\alpha) = \mathrm{diag}(A, e_{n-2}) \cdot \mathrm{diag}(h, e_{n-2}),$$

где

$$\mathrm{diag}(A, e_{n-2}) \in \Gamma_{12}(\sigma), \quad h \in G(\tau), \quad \tau = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix},$$

где τ – полная сеть.

Ранее подобное разложение для сетей порядка 3 получено в [5] (см. также [1]).

Результаты настоящей заметки были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

Литература

1. В. А. Койбаев, *Замкнутые сети в линейных группах.* — Вестн. СПбГУ. Сер. 1., No. 1 (2013), 26–34.
2. З. И. Боревич, *О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **75** (1978), 22–31.

3. В. М. Левчук, *Замечание к теореме Л. Диксона.* — Алгебра и логика **22**, No 5, (1983), 504–517.
4. *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь*, Издание 17-е., Новосибирск, (2010).
5. В. А. Койбаев, *Разложение трансвекции в элементарной группе.* — Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **5** (2012), Вып. 3. 388–392.

Dryaeva R. Yu., Koibaev V. A. Decomposition of elementary transvection in elementary group.

We consider the following data: an elementary net (or, what is the same elementary carpet) $\sigma = (\sigma_{ij})$ of additive subgroups of a commutative ring (in other words, a net without the diagonal) of order n, a derived net $\omega = (\omega_{ij})$, which depends of the net σ, the net $\Omega = (\Omega_{ij})$, associated with the elementary group $E(\sigma)$, where $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ and the net Ω is the smallest (complemented) net among the all nets which contain the elementary net σ. We prove that every elementary transvection $t_{ij}(\alpha)$ can be decomposed as a product of two matrices M_1 and M_2, where M_1 belongs to the group $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$, M_2 belongs to the net group $G(\tau)$ and the net τ has the form $\tau = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$.

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
кафедра алгебры и геометрии
362025, Владикавказ,
ул. Ватутина, 46,
Южный математический институт ВНЦ РАН
362027, Владикавказ,
ул.Маркуса, 27, Россия
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru
dryaeva-roksana@mail.ru

Поступило 23 сентября .2015 г.