Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 435, 2015 г.

А. И. Генералов, И. М. Зильберборд

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, V. СЕРИЯ $SD(3\mathcal{K})$

§1. Введение

В настоящей работе вычислены группы когомологий Хохшильда для алгебр полудиэдрального типа из серии $SD(3\mathcal{K})$, представленной в известной классификации К. Эрдман [1]. Тем самым мы продолжаем цикл работ, в которых вычисляются когомологии Хохшильда для некоторых серий алгебр из этой классификации (см. [2–13]). Отметим, что в некоторых случаях эти вычисления позволили уточнить эту классификацию, а также классификацию того же класса алгебр с точностью до производной эквивалентности; а именно, оказывалось, что алгебры (или, в частности, группы) когомологий Хохшильда были не изоморфны для тех или иных алгебр.

Как и в предыдущих работах, мы используем подход работы [2], в которой была описана алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 (мы вновь используем обозначения из [1]). Указанный подход состоит в том, что сначала на основе некоторых эмпирических вычислений строится минимальная проективная бимодульная резольвента для рассматриваемых алгебр, а затем с использованием этой резольвенты вычисляются группы когомологий Хохшильда, а также умножения в алгебре когомологий.

Отметим, что теми же методами были получены результаты, относящиеся к описанию алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для так называемой алгебры Мёбиуса (см. [14–16]), для самоинъективных алгебр конечного типа представления, имеющих древесный тип D_n (см. [17–23]), а также для некоторого семейства самоинъективных алгебр конечного типа представления, имеющих древесный тип E_6 (см. [24]). Кроме того, подход из [2] был использован для вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр Лю–Шульца (см. [25]).

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры полудиэдрального типа, бимодульная резольвента.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00902).

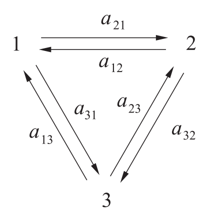
Кратко опишем структуру работы. В разделе 2 приводится формулировка основного результата работы – теоремы 2.1, в которой описываются группы когомологий Хохшильда для рассматриваемой серии алгебр полудиэдрального типа. В разделе 3 строится минимальная проективная резольвента алгебры R, рассматриваемой как модуль над своей обертывающей алгеброй $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$. Наконец, используя эту резольвенту, в разделе 4 мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$.

§2. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики $p = \operatorname{char} K$, R – конечномерная K-алгебра, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). Если $P_\bullet \to R$ – Λ-проективная резольвента алгебры R, то $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\bullet, R))$.

Алгебры R_{n_1,n_2,n_3}, где $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, серии $SD(3\mathcal{K})$ описываются с помощью следующего колчана $\mathcal{Q}^{(\mathcal{K})} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ с соотношениями:

$\mathcal{Q}^{(\mathcal{K})}$:



$$\left.\begin{array}{c} 0 = a_{31}a_{12} = a_{12}a_{23} = a_{23}a_{31}, \\ a_{13}a_{32} = a_{12}(a_{21}a_{12})^{n_3-1}, \\ a_{32}a_{21} = a_{31}(a_{13}a_{31})^{n_2-1}, \\ a_{21}a_{13} = a_{23}(a_{32}a_{23})^{n_1-1}; \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

композицию путей мы записываем справа налево. Кроме того, вершины колчана считаем элементами кольца вычетов $\mathbb{Z}_3$, а в обозначениях, связанных с вершинами колчана, индексы также рассматриваются по модулю 3.

Рассмотрим следующие вспомогательные матрицы (над K):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-n_2 & -n_2 & 0 & 0 \\ 1-n_3 & 1 & 1 & 0 & -n_3 & 0 \\ 1 & 1-n_1 & 1 & 0 & 0 & -n_1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & n_3 & n_1 \\ n_2 & 0 & n_1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Основной результат работы – это следующее описание групп когомологий Хохшильда для рассматриваемой серии алгебр.

Теорема 2.1. *Пусть* $R = R_{n_1,n_2,n_3}$, *где* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $p = \operatorname{char} K$, *и пусть* C *и* $\widetilde{C}$ *– матрицы из* (2.2), (2.3).

(I) *При* $0 \leqslant n \leqslant 4$ *размерности групп* $\mathrm{HH}^n(R)$ *описываются следующим образом.*

(Iа) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = N + 1;$

(Iб) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = N + 1 - \operatorname{rk} C;$

(Iв) $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = N + 1 - \operatorname{rk} C;$

(Iг) $\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} N + 2 - \operatorname{rk} \widetilde{C}, & \text{если } p = 2\,, \\ N + 1 - \operatorname{rk} \widetilde{C}, & \text{если } p \neq 2\,; \end{cases}$

(Iд) $\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} N + 3 - \operatorname{rk} \widetilde{C}, & \text{если } p = 2\,, \\ N + 1 - \operatorname{rk} \widetilde{C}, & \text{если } p \neq 2\,. \end{cases}$

(II) *Пусть* $p = 2$. *Тогда для* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 3\,, \\ 3 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(III) *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда для* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 6, \\ 1, & \text{если } n \equiv 1 \;\text{ или }\; 3 \pmod 6, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 2.2. *Для любого* $n \geqslant 13$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-12}(R) = \begin{cases} 2, & \text{если } p \neq 2. \\ 8, & \text{если } p = 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

§3. Резольвента

Пусть $R = R_{n_1,n_2,n_3}$ – алгебра, определённая в разделе 2. Через e_i, $i = 1,2,3$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{Q}^{(\mathcal{K})}$. Тогда $P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j)$, $i, j \in \{1,2,3\}$, составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^{\mathrm{e}}$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^* \colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Введём краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$\alpha_i = a_{i,i+1}a_{i+1,i}, \quad \beta_i = a_{i,i-1}a_{i-1,i} \ (i \in \mathbb{Z}_3).$$

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{B}_{ii} \cup \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{B}_{i+1,i} \cup \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{B}_{i,i+1}, \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ii} &= \{\alpha_i^j, \beta_i^k \mid 0 \leqslant j \leqslant n_{i+2}, 1 \leqslant k \leqslant n_{i+1} - 1\}, \\ \mathcal{B}_{i+1,i} &= \{a_{i+1,i}\alpha_i^k \mid 0 \leqslant k \leqslant n_{i+2} - 1\}, \\ \mathcal{B}_{i,i+1} &= \{\alpha_i^k a_{i,i+1} \mid 0 \leqslant k \leqslant n_{i+2} - 1\}. \end{aligned}$$

Для описания бимодульной резольвенты алгебры R введём ряд дополнительных обозначений. Рассмотрим K-пространство $V := K\mathcal{Q}_0 \oplus K\mathcal{Q}_1$ и определим изоморфизм $s : V \to V$ так, что $s(e_i) = e_{i+1}$, $s(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$. Он очевидным образом продолжается до K-линейного отображения $s : V \otimes V^{\mathrm{op}} \subset \Lambda \to V \otimes V^{\mathrm{op}} \subset \Lambda$, и затем введём обозначение

$$S(x,y,z) := \begin{pmatrix} x & y & z \\ s(z) & s(x) & s(y) \\ s^2(y) & s^2(z) & s^2(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\Lambda), \quad \text{где } x, y, z \in V \otimes V^{\mathrm{op}}.$$

Наконец, рассмотрим следующие вспомогательные проективные Λ-модули:

$$L_1 = \bigoplus_{i=1}^{3} P_{ii}, \ \ L_2' = \bigoplus_{i=1}^{3} P_{i,i+1}, \ \ L_2'' = \bigoplus_{i=1}^{3} P_{i+1,i}, \ \ L_2 = L_2' \oplus L_2''. \tag{3.2}$$

Теперь в категории (левых) Λ-модулей построим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$):

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d, "\tau_0'"] & \cdots \arrow[d, "\tau_2'"] & \cdots \arrow[d, "\tau_1"] & \\
L_1 \arrow[d, "\tau_2"] & L_2' \arrow[l, "\sigma_3"'] \arrow[d, "\tau_1'"] & L_2'' \arrow[l, "\sigma_2'"'] \arrow[d, "\tau_0"] & \cdots \arrow[l, "-\sigma_4"'] \\
L_2' \arrow[d, "\tau_1"] & L_2'' \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[d, "\tau_0'"] & L_1 \arrow[l, "-\sigma_4'"'] \arrow[d, "\tau_2'"] & \cdots \arrow[l, "-\sigma_3"'] \\
L_2'' \arrow[d, "\tau_0"] & L_1 \arrow[l, "-\sigma_4"'] \arrow[d, "\tau_2"] & L_2' \arrow[l, "-\sigma_3'"'] \arrow[d, "\tau_1'"] & \cdots \arrow[l, "-\sigma_2"'] \\
L_1 \arrow[d, "\tau_2'"] & L_2' \arrow[l, "-\sigma_3"'] \arrow[d, "\tau_1"] & L_2'' \arrow[l, "-\sigma_2'"'] \arrow[d, "\tau_0'"] & \cdots \arrow[l, "\sigma_4"'] \\
L_2' \arrow[d, "\tau_1'"] & L_2'' \arrow[l, "-\sigma_2"'] \arrow[d, "\tau_0"] & L_1 \arrow[l, "\sigma_4'"'] \arrow[d, "\tau_2"] & \cdots \arrow[l, "\sigma_3"'] \\
L_2'' \arrow[d, "\tau_0'"] & L_1 \arrow[l, "\sigma_4"'] \arrow[d, "\tau_2'"] & L_2' \arrow[l, "\sigma_3'"'] \arrow[d, "\widetilde{\rho}_1"] & \cdots \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[d, "\rho_2"] \\
L_1 \arrow[d, "\tau_2"] & L_2' \arrow[l, "\sigma_3"'] \arrow[d, "\tau_1'"] & L_2 \arrow[l, "\rho_4"'] \arrow[d, "\rho_0"] & L_2'' \arrow[l, "\rho_1"'] \\
L_2' \arrow[d, "\widetilde{\rho}_1"] & L_2'' \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[d, "\rho_2"] & L_1 \arrow[l, "\rho_3"'] & \\
L_2 \arrow[d, "\rho_0"'] & L_2'' \arrow[l, "\rho_1"'] & & \\
L_1 & & &
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

Гомоморфизмы в этой диаграмме описываются с помощью матриц, соответствующих прямым разложениям модулей из (3.2):

$$\rho_0 = \left(\sigma_0 \mid \tau_0\right), \text{ где}$$

$$\sigma_0 = S\left(a_{21} \otimes e_1, 0, -e_1 \otimes a_{13}\right), \; \tau_0 = S\left(a_{31} \otimes e_1, -e_1 \otimes a_{12}, 0\right);$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} {\rho_1}' \\ {\rho_1}'' \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$ {\rho_1}' = \begin{pmatrix} a_{32} \otimes e_1 & -\sum\limits_{i=0}^{n_3-2} a_{12}\beta_2^i \otimes a_{12}\beta_2^{n_3-2-i} & e_2 \otimes a_{13} \\ e_3 \otimes a_{21} & a_{13} \otimes e_2 & -\sum\limits_{i=0}^{n_1-2} a_{23}\beta_3^i \otimes a_{23}\beta_3^{n_1-2-i} \\ -\sum\limits_{i=0}^{n_2-2} a_{31}\beta_1^i \otimes a_{31}\beta_1^{n_2-2-i} & e_1 \otimes a_{32} & a_{21} \otimes e_3 \end{pmatrix},$$

$${\rho_1}'' = \operatorname{diag}\left(-\sum_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \otimes \beta_1^{n_2-1-i}, -\sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \otimes \beta_2^{n_3-1-i}, -\sum_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \otimes \beta_3^{n_1-1-i} \right);$$

$$\widetilde{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \tau_1 = S\left(a_{23} \otimes e_1, e_3 \otimes a_{12}, 0\right);$$

$$\rho_2 = S\left(a_{31}a_{13} \otimes e_1 - e_3 \otimes a_{13}a_{31},\; a_{13} \otimes a_{12},\; -a_{23} \otimes a_{13}\right);$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n_2-1} a_{13}\alpha_3^i \otimes \beta_1^{n_2-1-i} & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{n_3-1} a_{21}\alpha_1^i \otimes \beta_2^{n_3-1-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{n_1-1} a_{32}\alpha_2^i \otimes \beta_3^{n_1-1-i} \end{pmatrix};$$

$$\rho_4 = \left({\rho_4}' \mid {\rho_4}''\right), \quad \text{где}$$

$${\rho_4}' = \operatorname{diag}\left(-\alpha_2^{n_1-1} \otimes \beta_1^{n_2-1}, -\alpha_3^{n_2-1} \otimes \beta_2^{n_3-1}, -\alpha_1^{n_3-1} \otimes \beta_3^{n_1-1}\right),$$

$${\rho_4}'' = {\sigma_2}' = \begin{pmatrix} -a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes e_1 & 0 & -e_2 \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \\ -e_3 \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1} & -a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & -e_1 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & -a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes e_3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes e_1 & 0 & -e_2 \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \\ -e_3 \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1} & a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & -e_1 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes e_3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} -a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes e_1 & 0 & e_1 \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \\ e_2 \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1} & -a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & e_3 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & -a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes e_3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes e_1 & 0 & -e_3 \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \\ -e_1 \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1} & a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & -e_2 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes e_3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_3' = \begin{pmatrix} a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes e_1 & 0 & e_1 \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \\ e_2 \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1} & a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & e_3 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes e_3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_4' = \begin{pmatrix} -a_{13}\alpha_3^{n_2-1}\otimes e_1 & 0 & -e_3\otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \\ -e_1\otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1} & -a_{21}\alpha_1^{n_3-1}\otimes e_2 & 0 \\ 0 & -e_2\otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & -a_{32}\alpha_2^{n_1-1}\otimes e_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= S(a_{12}\otimes e_1, -e_2\otimes a_{12}, 0); \\ \tau_0' &= S(a_{31}\otimes e_1, e_1\otimes a_{12}, 0); \\ \tau_1' &= S(a_{23}\otimes e_1, -e_3\otimes a_{12}, 0); \\ \tau_2' &= S(a_{12}\otimes e_1, e_2\otimes a_{12}, 0). \end{aligned}$$

В качестве пополняющего отображения $\mu\colon B_{0,0} = L_1 \to R$, мы берём отображение, индуцированное умножением в R: $\mu(r\otimes s) = rs$.

Теорема 3.1. *Пусть $R = R_{n_1,n_2,n_3}$. Тогда тотализация*

$$Q_\bullet = (Q_n, d_n^Q) = \operatorname{Tot}(B_{\bullet\bullet})$$

бикомплекса $B_{\bullet\bullet}$ вместе с пополняющим отображением

$$\mu\colon Q_0 = L_1 \to R$$

является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.

Доказательство. То, что $Q_\bullet$ – комплекс и $\mu\cdot d_0^Q = 0$, проверяется прямыми вычислениями. Для доказательства ацикличности получающегося комплекса мы используем теорему 1 из [26]. А именно, нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S_i мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S_i (такие резольвенты модулей S_i, $i = 1,2,3$, описаны в [27]). Но это проверяется прямыми вычислениями, и мы предоставляем читателю провести все необходимые проверки. □

Замечание 3.2. Заметим, что если $\operatorname{char} K = 2$, то

$$\begin{aligned} &\sigma_2' = \sigma_2, \quad \sigma_3' = \sigma_3, \quad \sigma_4' = \sigma_4, \\ &\tau_0' = \tau_0, \quad \tau_1' = \tau_1, \quad \tau_2' = \tau_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим бикомплекс $A_{\bullet\bullet}$, состоящий из двух первых ненулевых столбцов в бикомплексе $B_{\bullet\bullet}$ с номерами 0 и 1 (а остальные столбцы в $A_{\bullet\bullet}$ нулевые). Пусть $X_\bullet = \operatorname{Tot}(A_{\bullet\bullet})$.

Предложение 3.3. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\imath} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{3.4}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение предложения вытекает непосредственно из строения бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$. □

§4. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = R_{n_1,n_2,n_3}$ – K-алгебра, определённая в разделе 2, и $p = \operatorname{char} K$. Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\Big(\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \ \delta^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\Big)_{n\geqslant 0}, \tag{4.1}$$

где $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – бимодульная резольвента алгебры R, построенная в разделе 3. В дальнейшем мы обычно когомологический класс (в $\mathrm{HH}^n(R)$) коцикла $f \in \operatorname{Ker}\delta^n$ обозначаем также через f.

Замечание 4.1. Всякий Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ определяется набором своих значений на образующих $e_i \otimes e_j$ тех $P_{ij} = \Lambda\cdot(e_i\otimes e_j)$, которые входят в разложение модуля Q_n, и мы в дальнейшем отождествляем f с этим набором значений. Когда в таком наборе значений f встречается подпоследовательность, состоящая из нулей, скажем, из r штук, то мы такую подпоследовательность обозначаем через O_r. Аналогично нулевую $r\times t$-матрицу обозначаем через $\mathrm{O}_{r,t}$; при этом мы опускаем указание на размеры такой матрицы, если они ясны из контекста.

Отметим, что если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$\widetilde{w} := \operatorname{Hom}_\Lambda(f, R)\colon\ \operatorname{Hom}(\Lambda, R) \simeq R \to \operatorname{Hom}(\Lambda, R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

После такого отождествления дифференциал $\delta^0\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R)$ описывается так: для $r_i \in e_iRe_i$ $(i = 0, 1)$

$$\delta^0(r_0, r_1) = (\alpha r_0 - r_0\alpha,\ -\beta r_0 + r_1\beta,\ r_0\gamma - \gamma r_1,\ \eta r_1 - r_1\eta).$$

Предложение 4.2. $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = N + 1$, $\dim \operatorname{Im}\delta^0 = N - 1$.

Доказательство. Ввиду [1, IX.1.4] центр $Z(R) = \operatorname{Ker} \delta^0$ алгебры R допускает в качестве базиса следующее множество

$$\begin{aligned}\big\{(\alpha_1^i, \beta_2^i, 0) \mid 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1\big\} &\cup \big\{(0, \alpha_2^i, \beta_3^i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1\big\}\\ &\cup \big\{(\beta_1^i, 0, \alpha_3^i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1\big\}\\ &\cup \big\{(e_1, e_2, e_3),\ (\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_2),\ (0, \alpha_2^{n_1}, 0),\ (\mathrm{O}_2, \alpha_3^{n_2})\big\}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = N + 1$ и

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Im} \delta^0 &= \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0, R) - \dim_K \operatorname{Ker} \delta^0\\ &= 2N - (N+1) = N - 1.\end{aligned}$$ □

Замечание 4.3. Пространство $\operatorname{Im} \delta^0$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\Big(a_{21}\alpha_1^i, \mathrm{O}_3, -\alpha_1^i a_{12}, 0\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.2}$$

$$\Big(0, a_{32}\alpha_2^i, \mathrm{O}_3, -\alpha_2^i a_{23}\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.3}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, a_{13}\alpha_3^i, -\alpha_3^i a_{31}, \mathrm{O}_2\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.4}$$

$$\Big(a_{21}, 0, -a_{13}, a_{31}, -a_{12}, 0\Big),\ \Big(-a_{21}, a_{32}, \mathrm{O}_2, a_{12}, -a_{23}\Big). \tag{4.5}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть значения δ^0 на элементах вида $(r_1, 0, 0)$ (соответственно вида $(0, r_2, 0)$ или вида $(0, 0, r_3)$), где r_1 пробегает множество $\mathcal{B}_{11}$ (соответственно r_2 пробегает множество $\mathcal{B}_{22}$, а r_3 – множество $\mathcal{B}_{33}$) и убедиться, что множество элементов из (4.2)–(4.5) порождает $\operatorname{Im} \delta^0$. Остаётся заметить, что мощность этого множества совпадает с $\dim_K \operatorname{Im} \delta^0$.

Далее, дифференциал

$$\delta^1\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ имеем

$$\delta^1(r_{21}, r_{32}, r_{13}, r_{31}, r_{12}, r_{23}) = (t_{31}, t_{12}, t_{23}, \mathrm{O}_3),$$

где

$$t_{31} = a_{32}r_{21} + r_{32}a_{21} - \sum_{i=0}^{n_2-2} a_{31}\beta_1^i \cdot r_{13} \cdot a_{31}\beta_1^{n_3-2-i} - \sum_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \cdot r_{31} \cdot \beta_1^{n_2-1-i},$$

$$t_{12} = a_{13}r_{32} + r_{13}a_{32} - \sum_{i=0}^{n_3-2} a_{12}\beta_2^i \cdot r_{21} \cdot a_{12}\beta_2^{n_2-2-i} - \sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \cdot r_{12} \cdot \beta_2^{n_3-1-i},$$

$$t_{23} = a_{21}r_{13} + r_{21}a_{13} - \sum_{i=0}^{n_1-2} a_{23}\beta_3^i \cdot r_{32} \cdot a_{23}\beta_3^{n_1-2-i} - \sum_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \cdot r_{23} \cdot \beta_3^{n_1-1-i}.$$

Далее предположим, что $q = (r_{21}, r_{32}, r_{13}, r_{31}, r_{12}, r_{23}) \in \operatorname{Ker}\delta^1$. Представим компоненты этого 1-коцикла в виде

$$r_{21} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{21}} \lambda_w w,\ r_{32} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{32}} \mu_w w,\ r_{13} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{13}} \nu_w w, \tag{4.6}$$

$$r_{31} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{31}} \lambda'_w w,\ r_{12} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{12}} \mu'_w w,\ r_{23} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{23}} \nu'_w w; \tag{4.7}$$

$(\lambda_w, \mu_w, \nu_w, \lambda'_w, \mu'_w, \nu'_w \in K)$. Тогда условие $t_{31} = 0$ оказывается равносильным следующему уравнению для координат разложений из (4.6) и (4.7) :

$$\lambda_{a_{21}} + \mu_{a_{32}} - (n_2 - 1)\nu_{a_{13}} - n_2\lambda'_{a_{31}} = 0. \tag{4.8}$$

Аналогично условия $t_{12} = 0$ и $t_{23} = 0$ приводят к уравнениям:

$$-(n_3 - 1)\lambda_{a_{21}} + \mu_{a_{32}} + \nu_{a_{13}} - n_3\mu'_{a_{12}} = 0, \tag{4.9}$$

$$\lambda_{a_{21}} - (n_1 - 1)\mu_{a_{32}} + \nu_{a_{13}} - n_1\nu'_{a_{23}} = 0. \tag{4.10}$$

Таким образом, размерность $\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1$ зависит только от ранга матрицы C из (2.2).

Замечание 4.4. Ясно, что $1 \leqslant \operatorname{rk} C \leqslant 3$. Используя некоторую симметрию в описании соотношений в алгебрах рассматриваемой серии, для бóльшей определённости в случае, когда $\operatorname{rk} C = 3$, будем дополнительно предполагать, что p не делит n_2n_3 (но, возможно, $p \mid n_1$), а в случае, когда $\operatorname{rk} C = 2$, будем дополнительно предполагать, что p делит n_1 и n_3 (но $p \nmid n_2$).

Теперь с использованием соотношений (4.8)–(4.10) легко приходим к следующему описанию базиса $\operatorname{Ker}\delta^1$.

Предложение 4.5. (а) *Предположим, что* $\operatorname{rk} C = 3$ *и при этом* p *не делит* n_2n_3. *Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *допускает в качестве* K-*базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big(a_{21}\alpha_1^i, \mathrm{O}_5\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.11}$$

$$\Big(0, a_{32}\alpha_2^i, \mathrm{O}_4\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.12}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, a_{13}\alpha_3^i, \mathrm{O}_3\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.13}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, a_{31}\beta_1^i, \mathrm{O}_2\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.14}$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, a_{12}\beta_2^i, 0\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.15}$$

$$\Big(\mathrm{O}_5, a_{23}\beta_3^i\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.16}$$

$$\Big(n_1n_2n_3a_{21}, \mathrm{O}_2, n_1n_3a_{31}, n_1n_2(1-n_3)a_{12}, n_2n_3a_{23}\Big), \tag{4.17}$$

$$\Big(a_{21}, 0, -a_{13}, a_{31}, -a_{12}, 0\Big),\ \Big(0, a_{32}, -a_{13}, a_{31}, 0, -a_{23}\Big). \tag{4.18}$$

(б) *Пусть теперь* $\operatorname{rk} C = 2$ *и при этом* p *делит* n_1 *и* n_3. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *в множество, указанное в части* (а), *надо вместо элемента из* (4.17) *включить пару элементов* $\Big(\mathrm{O}_4, a_{12}, 0\Big)$ *и* $\Big(\mathrm{O}_5, a_{23}\Big)$.

(в) *Пусть* $\operatorname{rk} C = 1$ (*и тогда* p *делит* n_i *для всех* i). *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо в множество, указанное в части* (а), *вместо элементов из* (4.17) – (4.18) *включить элементы*

$$\Big(a_{21}, -a_{32}, \mathrm{O}_4\Big),\ \Big(a_{21}, 0, -a_{13}, \mathrm{O}_3\Big),\ \Big(\mathrm{O}_3, a_{31}, \mathrm{O}_2\Big),\ \Big(\mathrm{O}_4, a_{12}, 0\Big),\ \Big(\mathrm{O}_5, a_{23}\Big).$$

Предложение 4.6. (а) *Предположим, что* $\operatorname{rk} C = 3$ *и при этом* p *не делит* n_2n_3. *Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^1$ *допускает в качестве* K-*базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big(a_{31}\beta_1^{n_2-1}, \mathrm{O}_5\Big), \tag{4.19}$$

$$\Big(0, a_{12}\beta_2^{n_3-1}, \mathrm{O}_4\Big), \Big(\mathrm{O}_2, a_{23}\beta_3^{n_1-1}, \mathrm{O}_3\Big). \tag{4.20}$$

(б) *Пусть теперь* $\operatorname{rk} C = 2$ *и при этом* p *делит* n_1 *и* n_3. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо в множестве,* *указанном в части* (а), *элементы из* (4.20) *заменить на элемент* $\Big(0, a_{12}\beta_2^{n_3-1}, a_{23}\beta_3^{n_1-1}, \mathrm{O}_3\Big)$.

(в) *Пусть* $\operatorname{rk} C = 1$. *Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^1$ *порождается элементом*

$$\Big(a_{31}\beta_1^{n_2-1}, a_{12}\beta_2^{n_3-1}, a_{23}\beta_3^{n_1-1}, \mathrm{O}_3\Big).$$

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть значения δ^1 на наборах вида $(r_{21}, r_{32}, r_{13}, r_{31}, r_{12}, r_{23})$, где ровно один из r_{ij} ненулевой и пробегает подмножество $\mathcal{B}_{ij}$ стандартного базиса алгебры R (см. (3.1)), а затем с помощью полученного множества значений выделить для каждого из рассматриваемых выше случаев базис пространства $\operatorname{Im}\delta^1$. □

Следствие 4.7. *Пусть* C – *матрица из* (2.2). *Тогда*:

$$\begin{aligned} \dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 &= 2N - \operatorname{rk} C; \\ \dim_K \operatorname{Im}\delta^1 &= \operatorname{rk} C; \\ \dim_K \mathrm{HH}^1(R) &= N + 1 - \operatorname{rk} C. \end{aligned}$$

Теперь мы исследуем второй дифференциал

$$\delta^2\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R).$$

Ввиду сделанных выше соглашений он описывается формулой: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{1,2,3\})$ имеем

$$\delta^2(r_{31}, r_{12}, r_{23}, r_{21}, r_{32}, r_{13}) = (t_{31}, t_{12}, t_{23}, t_{11}, t_{22}, t_{33}),$$

где

$$\begin{aligned} t_{11} &= a_{12}r_{21} - r_{13}a_{31}, \quad t_{22} = -r_{21}a_{12} + a_{23}r_{32}, \\ t_{33} &= -\, r_{32}a_{23} + a_{31}r_{13}, \end{aligned}$$

а также, как показывает прямая проверка, $t_{31} = 0 = t_{12} = t_{23}$.

Предложение 4.8. *При любых* n_1, n_2, n_3 (*все* $n_i \geqslant 2$) *пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из* *следующих элементов*:

$$\Big(a_{31}\beta_1^i, \mathrm{O}_5\Big) \ \textit{для} \ 0 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.21}$$

$$\Big(0, a_{12}\beta_2^i, \mathrm{O}_4\Big) \ \textit{для} \ 0 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.22}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, a_{23}\beta_3^i, \mathrm{O}_3\Big) \ \textit{для} \ 0 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.23}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}\Big). \tag{4.24}$$

Доказательство. Пусть $q = (r_{31}, r_{12}, r_{23}, r_{21}, r_{32}, r_{13}) \in \operatorname{Ker} \delta^2$. Представим компоненты этого 2-коцикла в виде (4.7) и (4.6). Тогда условие $t_{11} = 0$ равносильно системе следующих уравнений для координат соответствующих разложений:

$$\lambda_{a_{21}\alpha_1^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant n_3 - 2; \tag{4.25}$$

$$\nu_{a_{13}\alpha_3^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant n_2 - 2; \tag{4.26}$$

$$\lambda_{a_{21}\alpha^{n_3-1}} = \nu_{a_{13}\alpha_3^{n_2-1}}. \tag{4.27}$$

Условие $t_{22} = 0$ равносильно следующим соотношениям:

$$\mu_{a_{32}\alpha_2^i} = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant n_1 - 2; \tag{4.28}$$

$$\lambda_{a_{21}\alpha^{n_3-1}} = \mu_{a_{32}\alpha_2^{n_1-1}}, \tag{4.29}$$

а также соотношениям (4.25). Наконец, из соображений симметрии, ясно, что условие $t_{33} = 0$, приводит к соотношениям, которые следуют из (4.25)–(4.29).

Теперь простой анализ соотношений (4.25)–(4.29) приводит к доказательству требуемого утверждения. □

Предложение 4.9. *При любых* n_1, n_2, n_3 (*все* $n_i \geqslant 2$) *пространство* $\operatorname{Im} \delta^2$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^i, -\beta_2^i, 0\Big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant n_3;$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, \alpha_2^i, -\beta_3^i\Big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant n_1;$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, -\beta_1^i, 0, \alpha_3^i\Big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 4.6. □

Следствие 4.10. *Пусть C – матрица из* (2.2). *Тогда*:

$$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^2 = N + 1;$$
$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^2 = N - 1;$$
$$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = N + 1 - \operatorname{rk} C.$$

Дифференциал

$$\delta^3 \colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ имеем

$$\begin{aligned}\delta^3&(r_{31}, r_{12}, r_{23}, r_{11}, r_{22}, r_{33})\\ &= (t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{21}, t_{32}, t_{13}, t_{31}, t_{12}, t_{23}),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
t_{11} &= \sum_{i=0}^{n_2-1} a_{13}\alpha_3^i \cdot r_{31} \cdot \beta_1^{n_2-1-i} + \sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \cdot r_{12} \cdot a_{21}\alpha_1^{n_3-1-i},\\
t_{22} &= \sum_{i=0}^{n_3-1} a_{21}\alpha_1^i \cdot r_{12} \cdot \beta_2^{n_3-1-i} + \sum_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \cdot r_{23} \cdot a_{32}\alpha_2^{n_1-1-i},\\
t_{33} &= \sum_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \cdot r_{31} \cdot a_{13}\alpha_3^{n_2-1-i} + \sum_{i=0}^{n_1-1} a_{32}\alpha_2^i \cdot r_{23} \cdot \beta_3^{n_1-1-i},\\
t_{21} &= -a_{21}\alpha_1^{n_3-1} r_{11} + r_{22} a_{21}\alpha_1^{n_3-1},\\
t_{32} &= -a_{32}\alpha_2^{n_1-1} r_{22} + r_{33} a_{32}\alpha_2^{n_1-1},\\
t_{13} &= r_{11} a_{13}\alpha_3^{n_2-1} - a_{13}\alpha_3^{n_2-1} r_{33},\\
t_{31} &= a_{31} r_{11} + r_{33} a_{31}, t_{12} = r_{11} a_{12} + a_{12} r_{22},\\
t_{23} &= r_{22} a_{23} + a_{23} r_{33}.
\end{aligned}$$

Предположим, что $q = (r_{31}, r_{12}, r_{23}, r_{11}, r_{22}, r_{33}) \in \operatorname{Ker} \delta^3$. Первые три компоненты этого коцикла представим в виде (4.7) и аналогично последние три компоненты представим в виде

$$r_{11} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{11}} \sigma_w w, \quad r_{22} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{22}} \tau_w w, \quad r_{33} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{33}} \rho_w w; \tag{4.30}$$

$(\sigma_w, \tau_w, \rho_w \in K)$. Тогда условие $t_{11} = 0$ равносильно следующему уравнению для координат соответствующих разложений:

$$n_2 \lambda'_{a_{31}} + n_3 \mu'_{a_{12}} = 0. \tag{4.31}$$

По симметрии из условий $t_{22}=0$, $t_{33}=0$ получаем уравнения

$$n_3\mu'_{a_{12}}+n_1\nu'_{a_{23}}=0, \tag{4.32}$$

$$n_2\lambda'_{a_{31}}+n_1\nu'_{a_{23}}=0. \tag{4.33}$$

Далее, условия $t_{21}=0, t_{32}=0$ и $t_{13}=0$ приводят к соотношению

$$\sigma_{e_1}=\tau_{e_2}=\rho_{e_3}. \tag{4.34}$$

Наконец, условия $t_{31}=0, t_{12}=0$ и $t_{23}=0$ приводят к следующим соотношениям:

$$\sigma_{\beta_1^i}+\rho_{\alpha_3^i}=0 \ \text{ для } \ 1\leqslant i\leqslant n_2-1; \tag{4.35}$$

$$\sigma_{\alpha_1^i}+\tau_{\beta_2^i}=0 \ \text{ для } \ 1\leqslant i\leqslant n_3-1; \tag{4.36}$$

$$\tau_{\alpha_2^i}+\rho_{\beta_3^i}=0 \ \text{ для } \ 1\leqslant i\leqslant n_1-1; \tag{4.37}$$

$$\sigma_{e_1}+\rho_{e_3}=0,\ \sigma_{e_1}+\tau_{e_2}=0,\ \tau_{e_2}+\rho_{e_3}=0. \tag{4.38}$$

Замечание 4.11. Заметим, что уравнения (4.31)–(4.33) показывают, что $\dim_K \operatorname{Ker}\delta^3$ зависит в частности от ранга матрицы $\widetilde{C}$ из (2.3). Используя симметрию в описании соотношений в рассматриваемых алгебрах, в случае, когда $\operatorname{rk}\widetilde{C}=2$, будем дополнительно предполагать, что p не делит n_2n_3 , а в случае, когда $\operatorname{rk}\widetilde{C}=1$, дополнительно предполагаем, что p делит n_1 и n_3 (но $p\nmid n_2$); ср. замечание 4.4.

Теперь анализ соотношений (4.31)–(4.38), который удобно вести отдельно для $p=2$ и для $p\neq 2$, даёт следующее описание базиса в $\operatorname{Ker}\delta^3$.

Предложение 4.12. (I) *Пусть* $p=2$.

(Ia) *Предположим дополнительно, что* $\operatorname{rk}\widetilde{C}=2$ (*при этом* n_2 *и* n_3 *нечётны*). *Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big(a_{31}\beta_1^i, \mathrm{O}_5\Big) \ \textit{для} \ 1\leqslant i\leqslant n_2-1; \tag{4.39}$$

$$\Big(0, a_{12}\beta_2^i, \mathrm{O}_4\Big) \ \textit{для} \ 1\leqslant i\leqslant n_3-1; \tag{4.40}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, a_{23}\beta_3^i, \mathrm{O}_3\Big) \ \textit{для} \ 1\leqslant i\leqslant n_1-1; \tag{4.41}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, \beta_1^i, 0, \alpha_3^i\Big) \ \textit{для} \ 1\leqslant i\leqslant n_2-1; \tag{4.42}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^i, \beta_2^i, 0\Big) \ \textit{для} \ 1\leqslant i\leqslant n_3-1; \tag{4.43}$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, \alpha_2^i, \beta_3^i\Big) \ \textit{для} \ 1\leqslant i\leqslant n_1-1; \tag{4.44}$$

$$\Big(n_1n_3a_{31}, n_1n_2a_{12}, n_2n_3a_{23}, \mathrm{O}_3\Big), \ \Big(\mathrm{O}_3, e_1, e_2, e_3\Big), \tag{4.45}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_2\Big), \ \Big(\mathrm{O}_4, \alpha_2^{n_1}, 0\Big), \ \Big(\mathrm{O}_5, \alpha_3^{n_2}\Big). \tag{4.46}$$

(Iб) *Пусть теперь* $\operatorname{rk}\widetilde{C} = 1$ *и при этом* n_1 *и* n_3 *чётны* (*и, следовательно,* n_2 *нечётно*). *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо в множество, описанное в части* (Iа), *вместо элемента* $\Big(n_1n_3a_{31}, n_1n_2a_{12}, n_2n_3a_{23}, \mathrm{O}_3\Big)$ *из* (4.45) *включить элементы*

$$\Big(\mathrm{O}_2, a_{23}, \mathrm{O}_3\Big), \ \Big(0, a_{12}, \mathrm{O}_4\Big).$$

(Iв) *Наконец, пусть* $\operatorname{rk}\widetilde{C} = 0$. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо к множеству, описанному в части* (Iб), *добавить элемент* $\Big(a_{31}, \mathrm{O}_5\Big)$.

(II) *Пусть* $p \neq 2$.

(IIа) *Предположим дополнительно, что* $\operatorname{rk}\widetilde{C} = 3$. *Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов, указанных в* (4.39), (4.40), (4.41), (4.46), *а также из следующих элементов*:

$$\Big(\mathrm{O}_3, -\beta_1^i, 0, \alpha_3^i\Big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.47}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^i, -\beta_2^i, 0\Big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.48}$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, \alpha_2^i, -\beta_3^i\Big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1. \tag{4.49}$$

(IIб) *Пусть теперь* $\operatorname{rk}\widetilde{C} = 2$ *и при этом* p *делит* n_1. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо к множеству, описанному в части* (IIа), *добавить элемент* $\Big(\mathrm{O}_2, a_{23}, \mathrm{O}_3\Big)$.

(IIв) *Пусть теперь* $\operatorname{rk}\widetilde{C} = 1$ *и при этом* p *делит* n_1 *и* n_3 (*и, следовательно,* n_2 *не делится на* p). *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо к множеству, описанному в части* (IIб), *добавить элемент* $\Big(0, a_{12}, \mathrm{O}_4\Big)$.

(IIг) *Наконец, пусть* $\operatorname{rk}\widetilde{C} = 0$. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо к множеству, описанному в части* (IIв), *добавить элемент* $\Big(a_{31}, \mathrm{O}_5\Big)$.

Предложение 4.13. (I) *Пусть* $p=2$.

(Ia) *Предположим дополнительно, что* $\operatorname{rk}\widetilde{C}=2$ (*при этом* n_2 *и* n_3 *нечётны*). *Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^3$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big(\,\mathrm{O}_7, \alpha_1^i a_{12}, 0\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3-1; \tag{4.50}$$

$$\Big(\,\mathrm{O}_8, \alpha_2^i a_{23}\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1-1; \tag{4.51}$$

$$\Big(\,\mathrm{O}_6, \alpha_3^i a_{31}, \mathrm{O}_2\,\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2-1; \tag{4.52}$$

$$\Big(\alpha_1^{n_3}, 0, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_6\,\Big),\ \Big(\alpha_1^{n_3}, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_7\,\Big), \tag{4.53}$$

$$\Big(\,\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, 0, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, a_{31}, a_{12}, 0\Big), \tag{4.54}$$

$$\Big(\,\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, \mathrm{O}_2, a_{12}, a_{23}\Big). \tag{4.55}$$

(Iб) *Пусть теперь* $\operatorname{rk}\widetilde{C}=1$ *и при этом* n_1 *и* n_3 *чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо из множества, описанного в части* (Ia), *удалить элемент* $\Big(\alpha_1^{n_3}, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_7\,\Big)$ (*см.* (4.53)).

(Iв) *Наконец, пусть* $\operatorname{rk}\widetilde{C}=0$. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо из множества, описанного в части* (Ia), *удалить элементы, указанные в* (4.53).

(II) *Пусть* $p\neq 2$.

(IIa) *Предположим дополнительно, что* $\operatorname{rk}\widetilde{C}=3$. *Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^3$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее элементов, указанных в* (4.50), (4.51), (4.52), *а также из следующих элементов*:

$$\begin{gathered}\Big(\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_8\,\Big),\ \Big(0, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_7\,\Big),\ \Big(\,\mathrm{O}_2, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_6\,\Big),\\ \Big(\,\mathrm{O}_3, -a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, 0, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, a_{31}, a_{12}, 0\Big),\\ \Big(\,\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, -a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, \mathrm{O}_2, a_{12}, a_{23}\Big),\\ \Big(\,\mathrm{O}_4, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, -a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, a_{31}, 0, a_{23}\Big).\end{gathered} \tag{4.56}$$

(IIб) *Пусть теперь* $\operatorname{rk}\widetilde{C}=2$ *и при этом* p *делит* n_1. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо в множестве, описанном в части* (IIa), *тройку элементов, указанных в* (4.56), *заменить на* *пару следующих элементов*

$$\left(\alpha_1^{n_3}, 0, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_6\right),\ \left(\alpha_1^{n_3}, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_7\right).$$

(IIв) *Пусть теперь* $\operatorname{rk}\widetilde{C} = 1$ *и при этом* p *делит* n_1 *и* n_3 (*и, следовательно,* n_2 *не делится на* p). *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо в множестве, описанном в части* (IIа), *тройку элементов, указанных в* (4.56), *заменить на элемент* $\left(\alpha_1^{n_3}, 0, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_6\right)$.

(IIг) *Наконец, пусть* $\operatorname{rk}\widetilde{C} = 0$. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо из множества, описанного в части* (Iа), *удалить элементы, указанные в* (4.56).

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 4.6. □

Следствие 4.14.

$$\text{(а)}\qquad \dim_K \operatorname{Ker}\delta^3 = \begin{cases} 2N + 1 - \operatorname{rk}\widetilde{C}, & \text{если } p = 2\,,\\ 2N - \operatorname{rk}\widetilde{C}, & \text{если } p \neq 2\,; \end{cases}$$

$$\text{(б)}\qquad \dim_K \operatorname{Im}\delta^3 = \begin{cases} N - 1 + \operatorname{rk}\widetilde{C}, & \text{если } p = 2\,,\\ N + \operatorname{rk}\widetilde{C}, & \text{если } p \neq 2\,; \end{cases}$$

$$\text{(в)}\qquad \dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} N + 2 - \operatorname{rk}\widetilde{C}, & \text{если } p = 2\,,\\ N + 1 - \operatorname{rk}\widetilde{C}, & \text{если } p \neq 2\,. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение о размерности группы $\mathrm{HH}^3(R)$ следует из соответствующего описания размерности $\dim\operatorname{Ker}\delta^3$, а также из следствия 4.10. □

Аналогично предыдущему осуществляется описание ядра дифференциала

$$\delta^4\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_5, R).$$

Используя вид дифференциала d_4^Q из бимодульной резольвенты, построенной в разделе 3, приходим к системе из двенадцати уравнений (над R), при этом последние три из них, которые соответствуют последним трём столбцам матрицы дифференциала d_4^Q, не накладывают никаких ограничений на параметры. Анализ системы из оставшихся девяти уравнений (с использованием разложений по стандартному базису алгебры R) приводит к следующему утверждению; детали соответствующих вычислений мы предоставляем провести читателю.

Предложение 4.15. (I) *Пусть* $p=2$. *Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^4$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big(\alpha_1^i, \beta_2^i, \mathrm{O}_7\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_3-1; \tag{4.57}$$

$$\Big(0, \alpha_2^i, \beta_3^i, \mathrm{O}_6\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_1-1; \tag{4.58}$$

$$\Big(\beta_1^i, 0, \alpha_3^i, \mathrm{O}_6\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_2-1; \tag{4.59}$$

$$\Big(\mathrm{O}_6, a_{31}\beta_1^i, \mathrm{O}_2\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_2-1; \tag{4.60}$$

$$\Big(\mathrm{O}_7, a_{12}\beta_2^i, 0\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_3-1; \tag{4.61}$$

$$\Big(\mathrm{O}_8, a_{23}\beta_3^i\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_1-1; \tag{4.62}$$

$$\Big(e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_6\Big),\ \Big(\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_8\Big), \tag{4.63}$$

$$\Big(0, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_7\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_6\Big), \tag{4.64}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, \mathrm{O}_3\Big), \tag{4.65}$$

$$\Big(\mathrm{O}_5, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, a_{31}, \mathrm{O}_2\Big),\ \Big(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, \mathrm{O}_3, a_{12}, 0\Big), \tag{4.66}$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, \mathrm{O}_3, a_{23}\Big). \tag{4.67}$$

(II) *Пусть* $p\neq 2$.

Тогда пространство $\operatorname{Ker}\delta^4$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов, указанных в* (4.57)–(4.59), (4.63), (4.64), *а также из следующих элементов*:

$$\Big(\mathrm{O}_6, a_{31}\beta_1^i, \mathrm{O}_2\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_2-1;$$

$$\Big(\mathrm{O}_7, a_{12}\beta_2^i, 0\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_3-1;$$

$$\Big(\mathrm{O}_8, a_{23}\beta_3^i\Big) \ \text{для}\ 1\leqslant i\leqslant n_1-1;$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, -a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, 0, a_{31}, \mathrm{O}_2\Big),$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, -a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, 0, a_{12}, 0\Big),$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, 0, -a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, \mathrm{O}_2, a_{23}\Big).$$

Следствие 4.16.

$$\text{(а)}\qquad \dim_K \operatorname{Ker}\delta^4 = \begin{cases} 2N+2, & \textit{если } p=2\,,\\ 2N+1, & \textit{если } p\neq 2\,; \end{cases}$$

$$\text{(б)}\qquad \dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} N+3-\operatorname{rk}\widetilde{C}, & \textit{если } p=2\,,\\ N+1-\operatorname{rk}\widetilde{C}, & \textit{если } p\neq 2\,. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение о размерности группы $\mathrm{HH}^4(R)$ следует из описания размерности $\dim\operatorname{Ker}\delta^4$, а также из следствия 4.14. □

Пусть $\mathcal{X}^\bullet := \operatorname{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$, где $X_\bullet$ – комплекс из предложения 3.3. Как и выше, мы отождествляем элементы

$$f\in\operatorname{Hom}_\Lambda(X_n,R)\subset\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n,R)$$

с соответствующими наборами значений $f(e_i\otimes e_j)$ (см. замечание 4.1).

Из описания бимодульной резольвенты алгебры R, построенной в разделе 3, вытекает что, комплекс $\mathcal{X}^\bullet$ в больших степенях 6-периодичен; более точно, при $n\geqslant 9$

$$\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}=\delta^{n-6}_{\mathcal{X}^\bullet},$$

и следовательно,

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)\simeq\mathrm{H}^{n-6}(\mathcal{X}^\bullet) \tag{4.68}$$

при $n\geqslant 10$. Кроме того, при $p=2$ комплекс $\mathcal{X}^\bullet$ 3-периодичен, и потому

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)\simeq\mathrm{H}^{n-3}(\mathcal{X}^\bullet) \tag{4.69}$$

при $n\geqslant 7$.

В следующем предложении мы опишем $\dim_K\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$.

Предложение 4.17. (I) *Пусть $p\neq 2$. Тогда при $n\geqslant 4$*

$$\dim_K\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)=\begin{cases}0, & \textit{если } n\equiv 4\,(\mathrm{mod}\,6)\,,\\ 1, & \textit{если } n\equiv 3 \textit{ или } 5\,(\mathrm{mod}\,6)\,,\\ 2 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

(II) *Пусть $p=2$. Тогда при $n\geqslant 4$*

$$\dim_K\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)=\begin{cases}2, & \textit{если } n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\\ 3 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. (I) Предположим, что $p \neq 2$.

(Iа) Мы сначала вычислим $\dim_K \mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet)$. Аналогично доказательству предложений 4.5 и 4.6 устанавливаем, что в качестве базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов

$$\Big(\mathrm{O}_3, a_{31}\beta_1^i, \mathrm{O}_2\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.70}$$

$$\Big(\mathrm{O}_7, a_{12}\beta_2^i, 0\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.71}$$

$$\Big(\mathrm{O}_8, a_{23}\beta_3^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.72}$$

$$\Big(-a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, 0, a_{31}, \mathrm{O}_2\Big), \tag{4.73}$$

$$\Big(0, -a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, 0, a_{12}, 0\Big), \tag{4.74}$$

$$\Big(a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, 0, -a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, \mathrm{O}_2, a_{23}\Big). \tag{4.75}$$

а для пространства $\operatorname{Im}\delta^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ в качестве базиса можно взять множество, состоящее из элементов

$$\Big(\alpha_1^i, \beta_2^i, \mathrm{O}_4\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.76}$$

$$\Big(0, \alpha_2^i, \beta_3^i, \mathrm{O}_3\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.77}$$

$$\Big(\beta_1^i, 0, \alpha_3^i, \mathrm{O}_3\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.78}$$

$$\Big(\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_5\Big), \ \Big(0, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_4\Big), \ \Big(\mathrm{O}_2, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_3\Big). \tag{4.79}$$

Также прямыми вычислениями показывается, что в качестве базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^3_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов, указанных в (4.70)–(4.75), и таким образом сразу получаем, что $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) = 0$.

(Iб) Вновь прямыми вычислениями показывается, что базисом для пространства $\operatorname{Ker}\delta^5_{\mathcal{X}^\bullet}$ служит множество, состоящее из элементов, указанных в (4.76)–(4.79), и дополненное элементом

$$\Big(e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_3\Big), \tag{4.80}$$

и следовательно, класс элемента (4.80) образует базис $\mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet)$.

(Iв) Аналогичные вычисления, – детальное проведение которых мы оставляем читателю, – показывают, что классы элементов

$$\Big(a_{31}, \mathrm{O}_5\Big),\ \Big(\mathrm{O}_3, e_1, e_2, e_3\Big) \tag{4.81}$$

образуют базис пространства $\mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$, классы элементов

$$\Big(a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, \mathrm{O}_3\Big),\ \Big(-a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, \mathrm{O}_3, a_{12}, 0\Big) \tag{4.82}$$

образуют базис пространства $\mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet)$, классы элементов

$$\Big(\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_5\Big),\ \Big(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}\Big), \tag{4.83}$$

образуют базис $\mathrm{H}^8(\mathcal{X}^\bullet)$, и, наконец, класс элемента

$$\Big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_2\Big) \tag{4.84}$$

образует базис $\mathrm{H}^9(\mathcal{X}^\bullet)$. С учётом соотношения (4.68) получаем первую часть доказываемого предложения.

(II) Теперь предположим, что $p = 2$. Для этого случая мы лишь опишем базисные элементы соответствующих пространств когомологий; подробные вычисления мы вновь предоставляем проделать читателю.

Для $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet)$ в качестве базиса можно взять классы элементов вида (4.82), в качестве базисных элементов для $\mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet)$ берём классы элементов

$$\Big(e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_3\Big),\ \Big(\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_5\Big),\ \Big(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}\Big), \tag{4.85}$$

наконец, для $\mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$ в качестве базисных элементов берём классы элементов из (4.81), а также класс элемента

$$\Big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_2\Big). \tag{4.86}$$

Остаётся учесть соотношение (4.69). □

Предложение 4.18. (I) *Пусть $p \neq 2$. Тогда при $n \geqslant 5$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 6, \\ 1, & \text{если } n \equiv 1 \ \text{ или } \ 3 \pmod 6, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(II) *Пусть $p = 2$. Тогда при $n \geqslant 5$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & \textit{если } n \equiv 1 \pmod 3, \\ 3 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Короткая точная последовательность (3.4) после применения функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(\,-\,, R)$ даёт короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{\imath^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

(где $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$) которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots . \tag{4.87}$$

Из точности этой последовательности получаем соотношение

$$\begin{aligned} \dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) \\ = \dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n - \dim_K \operatorname{Im} \Delta^{n-1}. \end{aligned} \tag{4.88}$$

Таким образом, нам достаточно описать ядра и образы связывающих гомоморфизмов из последовательности (4.87).

Лемма 4.19. (I) *Пусть $p \neq 2$. Тогда при $n \geqslant 4$*

(I.1) $$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = \begin{cases} 1, & \textit{если } n \equiv 0\,, 2 \textit{ или } 5 \pmod 6, \\ 0 & \textit{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(I.2) $$\dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = \begin{cases} 2, & \textit{если } n \equiv 1 \textit{ или } 2 \pmod 6, \\ 1, & \textit{если } n \equiv 0 \textit{ или } 3 \pmod 6, \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(II) *Пусть $p = 2$. Тогда для любого $n \geqslant 4$*

$$\Delta^n = 0.$$

Доказательство. Мы будем использовать следующие обозначения, соответствующие описанию связывающего гомоморфизма. Пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$, и пусть $\widetilde{f} := (\mathrm{O}, f) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ – доопределение f нулём на всё $Q_n = Q_{n-4} \oplus X_n$. Так как $\imath^*(\widetilde{f}) = f$, то существует $g \in$

$\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ такой, что $\pi^*(g) = \delta^n(\widetilde{f})$, при этом g – коцикл, и тогда $\Delta^n(\operatorname{cl} f) := \operatorname{cl} g$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R) & \xrightarrow{\iota^*} & \mathcal{X}^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^{n-4}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}} & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n+1}, R) & \xrightarrow{\iota^*} & \mathcal{X}^{n+1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

(I) Пусть $p \neq 2$.

(Ia) Предположим, что $n \equiv 0 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$. Пусть $f = (s_1, \ldots, s_6) \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ (здесь s_t, $1 \leqslant t \leqslant 6$, принадлежат подходящим P_{ij}). Введём сокращенное обозначение $S_f := (s_1, s_2, s_3)$. Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 4.17, можем считать, что f – один из элементов, приведённых в (4.81). Заметим, что дифференциал $d_n^{Q_\bullet}$ имеет следующий блочно-треугольный вид:

$$d_n^{Q_\bullet} = \left(\begin{array}{c|c} d_{n-4}^{Q_\bullet} & \mathrm{O} \\ \hline \begin{matrix} \mathrm{O} & \sigma_4' \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{matrix} & d_n^{X_\bullet} \end{array} \right).$$

При этом в матрице дифференциала $d_{n-4}^{Q_\bullet}$ в правом нижнем углу стоит 3х3-блок, равный τ_2. Тогда (в предыдущих обозначениях) имеем

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \Big(\mathrm{O}, (\sigma_4')^*(S_f), \mathrm{O}_6 \Big).$$

Для $f_1 = \Big(a_{31}, \mathrm{O}_5\Big)$

$$\delta^n(\widetilde{f_1}) = \Big(\mathrm{O}, -\beta_1^{n_2}, 0, -\alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_6 \Big) = \pi^*(g_1),$$

где $g_1 = \Big(\mathrm{O}, -\beta_1^{n_2}, 0, -\alpha_3^{n_2} \Big)$. Но легко видеть, что $\Big(-\beta_1^{n_2}, 0, -\alpha_3^{n_2} \Big)$ не лежит в $\operatorname{Im}(\tau_2^*)$, тогда $g_1 \notin \operatorname{Im} \delta^{n-4}$, и потому $\Delta^n(\operatorname{cl} f_1) \neq 0$. Кроме того, ясно, что другой элемент из (4.81) лежит в $\operatorname{Ker} \Delta^n$. Таким образом, в этом случае

$$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = \dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = 1.$$

(Iб) Предположим, что $n \equiv 1 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$. Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 4.17, можем считать, что f – один из элементов, приведённых в (4.82). Сейчас дифференциал $d_n^{Q_\bullet}$ имеет следующий вид:

$$d_n^{Q_\bullet} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}^{Q_\bullet}} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & -\sigma_2' & \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & d_n^{X_\bullet} \end{array}\right).$$

Тогда

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \Big(\mathrm{O}, -(\sigma_2')^*(S_f), \mathrm{O}_6\Big).$$

Но сразу ясно, что для любого f из (4.82) имеем $(\sigma_2')^*(S_f) = 0$, и потому в этом случае $\Delta^n = 0$.

(Iв) Предположим, что $n \equiv 2 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$. Сейчас дифференциал $d_n^{Q_\bullet}$ имеет следующий вид:

$$d_n^{Q_\bullet} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}^{Q_\bullet}} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & -\sigma_3' & \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & d_n^{X_\bullet} \end{array}\right).$$

Пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$. Можем считать, что f – один из элементов, приведённых в (4.83). Тогда

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \Big(\mathrm{O}, -(\sigma_3')^*(S_f), \mathrm{O}_6\Big).$$

Но сразу ясно, что $(\sigma_3')^*(S_f) = 0$ для любого f из (4.82). Потому и в этом случае $\Delta^n = 0$.

(Iг) Для случаев, когда $n \equiv 3$ или $4 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, из тех же соображений, что использовались в пункте (Iв), получаем $\Delta^n = 0$.

(Iд) Предположим, что $n \equiv 5 \pmod 6$. Сейчас дифференциал $d_n^{Q_\bullet}$ имеет следующий вид

$$d_n^{Q_\bullet} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}^{Q_\bullet}} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \sigma_3' & \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & d_n^{X_\bullet} \end{array}\right).$$

При этом в матрице дифференциала $d^{Q_\bullet}_{n-4}$ в правом нижнем углу стоит 3x3-блок, равный τ_1. Пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$; можно считать, что f – это элемент из (4.80). Тогда

$$\delta^n(\widetilde{f}) = \Big(\, \mathrm{O}, (\sigma_3')^*(S_f), \mathrm{O}_6 \,\Big),$$

где

$$(\sigma_3')^*(S_f) = 2\Big(a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}\Big).$$

Но $(\tau_1)^* = 0$, поэтому $\Delta^n(\operatorname{cl} f) \neq 0$. Таким образом,

$$\dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = 1,\ \dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = 0.$$

(II) Пусть $p = 2$.

(IIа) Предположим сначала, что $n \equiv 0 \pmod 3$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$; можно считать, что f – один из элементов, указанных в (4.81) или в (4.86). Но тогда ясно, что применимы рассуждения из пункта (Iа) доказательства, и потому в этом случае $\Delta^n = 0$.

(IIб) Если же $n \equiv 1$ или $2 \pmod 3$ $(n \geqslant 4)$, то для любого f из (4.82) или из (4.85) соответственно получаем $\delta^n(\widetilde{f}) = 0$, следовательно, и для этих случаев $\Delta^n = 0$. □

Теперь из леммы 4.19 при $p \neq 2$ следует, что для всех $n \geqslant 5$

$$\dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n - \dim_K \operatorname{Im} \Delta^{n-1} = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod 6, \\ 1, & \text{если } n \equiv 0 \text{ или } 3 \pmod 6, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и остаётся использовать соотношение (4.88). Если же $p = 2$, то вновь с использованием леммы 4.19 получаем, что при $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet),$$

и требуемое утверждение вытекает из предложения 4.17,(II). Это завершает доказательство предложения 4.18. □

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

Следствие 4.20. *Для любого* $n \geqslant 13$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-12}(R) = \begin{cases} 2, & \textit{если } p \neq 2. \\ 8, & \textit{если } p = 2. \end{cases} \tag{4.89}$$

Доказательство. Соотношение (4.89) вытекает из предложения 4.18 с помощью последовательного рассмотрения нескольких случаев. □

Литература

1. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lect. Notes Math., **1428** (1990).
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ, **16**, No. 6 (2004), 53–122.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 92–129.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон., Вып.1 (2010), 28–38.
5. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 67–104.
6. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ, **21**, No. 2 (2009), 1–51.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 144–202.
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **400** (2012), 133–157.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IV. *Алгебра когомологий для серии* $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ *при* $c=0$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **413** (2013), 45–92.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ, **18**, No. 1 (2006), 55–107.
11. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II.*Серия* $Q(2\mathcal{B})_1$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **349** (2007), 53–134.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III.*Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **356** (2008), 46–84.
13. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия* $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ *над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 63–72.
14. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **321** (2005), 36–66.
15. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **330** (2006), 173–200.
16. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 210–246.
17. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **343** (2007), 121–182.

18. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
19. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 100–128.
20. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 48–99.
21. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Алгебра и анализ, **23** (2011), No. 5, 99–139.
22. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 100–118.
23. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **394** (2011), 140–173.
24. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* E_6. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 205–243.
25. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ, **18**, No. 4 (2006), 39–82.
26. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 61–70.
27. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* III. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **305** (2003), 84–100.

Generalov A. I., Zilberbord I. M. Hochschild cohomology for algebras of semidihedral type. V. The family $SD(3\mathcal{K})$.

We compute the Hochschild cohomology groups for algebras of semidihedral type from the family $SD(3\mathcal{K})$ (within the famous K.Erdmann's classification). Our calculation relies on "a bimodule resalution" for algebras of the above family.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com
E-mail: igorr-5@yandex.ru

Поступило 3 июля 2015 г.