Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

Д. М. Столяров

ТЕОРЕМА ДОРРОНСОРО И ЕЁ НЕБОЛЬШОЕ ОБОБЩЕНИЕ

§1. Введение

Теорема 1 (Теорема Дорронсоро, теорема 2 работы [4])**.** *Для всякой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 2$, найдётся вещественнозначная функция $F \in \mathcal{H}_1$, такая что*

$$I_1[F] \geqslant f; \quad \|F\|_{\mathcal{H}_1} \lesssim \|\nabla f\|_{L_1}.$$

Символом C_0^∞ мы обозначили пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на пространстве $\mathbb{R}^d$, а символом $\mathcal{H}_1$ – вещественный класс Харди (читатель может найти всю необходимую информацию о классе $\mathcal{H}_1$ и пространстве BMO в книге [12]). Символом I_a обозначен потенциал Рисса порядка a, заданный согласно формуле

$$I_a[f] = f * c_a|\cdot|^{a-d}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ a \in (0,d).$$

Константа c_a подбирается таким образом, чтобы оператор I_a был мультипликатором Фурье с символом $|\xi|^{-a}$. Нетрудно видеть, что потенциалы Рисса можно применять к функциям пространства $\mathcal{H}_1$. Здесь и далее запись “$a \lesssim b$” есть сокращение утверждения “существует константа c, такая что $a \leqslant cb$”. Кроме того, будем всегда предполагать, что $d \geqslant 2$.

Отметим, что в оригинальной формулировке теоремы 1 функция f принадлежит однородному пространству BV функций ограниченной вариации (и стало быть, в оценке стоит не норма градиента, а его полная вариация). Нетрудно видеть, что это более общее утверждение получается из теоремы 1 аппроксимацией. Смысл и важность теоремы 1 становятся более ясными в свете приведённого ниже следствия.

Следствие 1. $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_{\frac{d}{d-1},1}(\mathbb{R}^d)$.

Ключевые слова: пространства Соболева, пространства Харди.
Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 14-41-00010.

Символом $\dot{W}_1^1$ мы обозначили однородное пространство Соболева, которое есть замыкание множества C_0^∞ по норме

$$\|f\|_{\dot{W}_1^1} = \|\nabla f\|_{L_1}.$$

Нам будет удобно работать также и с комплекснозначными функциями; вообще, функции пространства $\dot{W}_1^1$ будем считать комплекснозначными. Символ $L_{\frac{d}{d-1},1}$ обозначает пространство Лоренца (подробное изучение этих пространств читатель может найти в книге [7]). Следствие 1 впервые было получено в работе [5], также упомянем работу [1], где доказано вложение более общего (по ещё одному интерполяционному параметру) вида. Следствие 1 вытекает из теоремы 1, так как потенциал Рисса I_1 отображает класс $\mathcal{H}_1$ в пространство $L_{\frac{d}{d-1},1}$ (это легко следует из интерполяции классов $\mathcal{H}_p$, см. работу [6]; иным образом это вложение можно получить, используя атомарное разложение).

Доказательство теоремы 1 изложено в следующем разделе. Оно отличается от оригинального доказательства работы [4] тем, что оно, в некотором смысле, конструктивно (то есть, функция F может быть построена по функции f), оригинальное доказательство использовало двойственность несколько раз. Кроме того, предложенное нами рассуждение может показаться более прозрачным, так как мы пользуемся лишь базовыми геометрическими фактами (такими как неравенство Гастина и формула коплощади), не углубляясь в подробное изучение максимальных операторов дробного порядка. Тем не менее, "механика" нашего доказательства та же самая, что и оригинального.

В разделе 3 мы покажем, что в более общей постановке утверждения типа теоремы 1 равносильны соответствующему аналогу неравенства Гастина.

В последнем разделе собраны утверждения, которыми мы пользуемся без доказательства.

Автор благодарен А. И. Назарову и анонимному рецензенту за советы по изложению материала и исправление неточностей.

§2. Доказательство теоремы 1

Начнём с простой леммы, являющейся ядром доказательства. Через $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ мы обозначаем мультипликатор Фурье с символом $|\xi|$.

Лемма 1. *Для всякой функции* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, *функция* $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi$ *принадлежит классу* $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Рассуждение состоит из нескольких простых шагов.

Во-первых, покажем что $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Действительно, преобразование Фурье этой функции принадлежит пространству L_1, так как является ограниченной быстро убывающей на бесконечности функцией.

Во-вторых, покажем, что $|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x)| \lesssim (1 + |x|)^{-d-1}$. Так как $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi \in L_\infty$, достаточно доказать неравенство лишь для случая $x \notin \operatorname{supp}\varphi$. Для таких значений x допустимо интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = I_1[-\Delta\varphi](x) &= -c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Delta\varphi(x-t)|t|^{1-d} \\ &= -c_1' \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-t)c|t|^{-1-d}, \quad x \notin \operatorname{supp}\varphi,\end{aligned}$$

символом c_1' обозначена константа, возникающая при дифференцировании потенциала.

В-третьих, имеет место оценка

$$\Big|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Big[t^{-d}\varphi\Big(\frac{\cdot}{t}\Big)\Big]\Big|(x) \lesssim (t + |x|)^{-d-1}, \quad t > 0, \tag{1}$$

равномерно по параметру t.

Пусть теперь ψ есть произвольная C_0^∞-функция с единичным интегралом. Согласно определению,

$$\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi\|_{\mathcal{H}_1} \asymp \Big\|\sup_{t>0}\Big|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi * t^{-d}\psi\Big(\frac{\cdot}{t}\Big)\Big|\Big\|_{L_1}.$$

Таким образом, нам достаточно ограничить супремум в правой части (как функцию от x) величиной $(1 + |x|)^{-d-1}$. Опять же, так как $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi \in L_\infty$, то

$$\sup_{t>0}\Big|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi * t^{-d}\psi\Big(\frac{\cdot}{t}\Big)\Big| \lesssim 1.$$

Следовательно, достаточно получить оценку далеко от носителя функции φ (скажем, для точек x, таких что $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}\varphi) \geqslant 1$). Тогда мы можем воспользоваться неравенством (1) (для функции ψ вместо φ):

$$\begin{aligned}\Big|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi * t^{-d}\psi\Big(\frac{\cdot}{t}\Big)\Big|(x) &= \Big|\varphi * (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Big[t^{-d}\psi\Big(\frac{\cdot}{t}\Big)\Big]\Big|(x)\\ &\lesssim \Big|\varphi * (t+|\cdot|)^{-d-1}\Big|(x)\\ &\leqslant \Big|\varphi * |\cdot|^{-d-1}\Big|(x) \lesssim |x|^{-d-1}. \qquad \square\end{aligned}$$

Отметим, что лемма 1 не нова. Например, её утверждение является частным случаем более общего утверждения работы [13].

Зафиксируем функцию-"шапочку" θ (функцию класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, которая неотрицательна и принимает значение 1 на единичном шаре с центром в нуле). Пусть R – положительное вещественное число, определим функцию θ_R согласно правилу $\theta_R(x) = \theta(\frac{x}{R})$. Применяя лемму 1 к функции $\varphi = \theta$ и пользуясь растяжением, мы получаем следствие.

Следствие 2. *Для всякого числа $R > 0$ существует вещественнозначная функция $\Theta_R \in \mathcal{H}_1$, такая что*

$$I_1[\Theta_R] \geqslant \chi_{B_R(0)}; \quad \|\Theta_R\|_{\mathcal{H}_1} \lesssim R^{d-1}$$

равномерно по параметру R.

Символом χ_ω мы обозначили характеристическую функцию измеримого множества ω; запись $B_r(z)$ обозначает шар радиуса r с центром в точке z. Например, в следствии 2 функция Θ_R может быть выбрана по правилу $\Theta_R = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta_R$. Также ясно, что шар с центром в нуле можно заменить любым другим шаром такого же радиуса. Таким образом, мы доказали теорему 1 "для случая характеристической функции шара". Дальнейшие рассуждения стандартны (например, применение тех же рассуждений приводит к характеризации мер μ, для которых имеет место вложение $\dot{W}_1^1 \hookrightarrow L_q(\mu)$, см. работу [2]). Идея состоит в том, чтобы разбить функцию f на характеристические функции шаров, не потеряв контроля над $\dot{W}_1^1$-нормой. Для этой цели нам понадобится понятие ёмкости Хаусдорфа.

Определение 1. *Пусть $\alpha \in [0, d]$ есть вещественное число, α-ёмкостью Хаусдорфа множества $\omega \subset \mathbb{R}^d$ назовём величину*

$$H_\infty^\alpha(\omega) = \inf_{\mathcal{B}} \sum r_j^\alpha, \tag{2}$$

где инфимум берётся по всем покрытиям $\mathcal{B}$ множества ω замкнутыми шарами (через r_j обозначены радиусы шаров).

Следующее предложение можно интерпретировать как "случай характеристической функции множества" в теореме 1.

Предложение 1. *Пусть ω – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$. Существует вещественнозначная функция $\Omega \in \mathcal{H}_1$, такая что*

$$I_1[\Omega] \geqslant \chi_\omega; \quad \|\Omega\|_{\mathcal{H}_1} \lesssim H_\infty^{d-1}(\omega).$$

Для доказательства предложения достаточно рассмотреть почти оптимальное (в смысле формулы (2)) покрытие множества ω шарами $B_{r_j}(x_j)$ и положить функцию Ω равной $\sum \Theta_{r_j,x_j}$, где символом Θ_{r_j,x_j} обозначена функция Θ_{r_j} из следствия 2, соответствующая шару $B_{r_j}(x_j)$.

Доказательство теоремы 1. Используя растяжения, мы можем сделать так, чтобы носитель функции f лежал в единичном кубе с центром в нуле, а используя умножения на константу, мы можем добиться выполнения условия $\|\nabla f\|_{L_1} = 1$. Для всякого числа $j \in \mathbb{Z}_+$ определим множества $\omega_j = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > j\}$. Для каждого такого множества ω_j построим вещественнозначную $\mathcal{H}_1$-функцию Ω_j, такую что

$$I_1[\Omega_j] \geqslant \chi_{\omega_j}; \quad \|\Omega_j\|_{\mathcal{H}_1} \lesssim H_\infty^{d-1}(\omega_j).$$

Такие функции Ω_j существуют по предложению 1. Зададим искомую функцию F формулой

$$F = \sum_{j \geqslant 0} \Omega_j.$$

В таком случае,

$$f \leqslant \sum_{j \geqslant 0} \chi_{\omega_j} \leqslant \sum_{j \geqslant 0} I_1[\Omega_j] = I_1[F].$$

Кроме того,

$$\|F\|_{\mathcal{H}_1} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|\Omega_j\|_{\mathcal{H}_1} \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} H_\infty^{d-1}(\omega_j) \lesssim 1 + \int\limits_0^\infty H_\infty^{d-1}(\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > t\})$$
$$\lesssim 1 + \int\limits_{\mathbb{R}} H^{d-1}(f^{-1}(t)) = 2\|\nabla f\|_{L_1}.$$

Символом H^{d-1} обозначена мера Хаусдорфа размерности $(d-1)$. Предпоследнее неравенство следует из теоремы 4 (отметим, что по теореме

Сарда, почти все множества $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > t\}$ имеют гладкую границу), последнее же равенство есть формула коплощади. $\square$

§3. Вложения векторных полей

Мы приведем общее утверждение, включающее в себя теорему 1. Пусть E и F – два конечномерных векторных пространства над полем $\mathbb{C}$. Рассмотрим функцию $A : \mathbb{R}^d \times E \mapsto F$, которая есть однородный полином порядка m по первой переменной и линейное отображение по второй. Тогда функция A порождает дифференциальный оператор, отображающий E-значные векторные поля на $\mathbb{R}^d$ в F-значные по правилу

$$A(\partial)f = \mathcal{F}^{-1}\Big[A\big(i\xi, \mathcal{F}[f](\xi)\big)\Big], \quad f : \mathbb{R}^d \to E,$$

символ $\mathcal{F}$ обозначает преобразование Фурье. Естественно, поле f должно быть достаточно гладким (например, принадлежать классу Шварца). К примеру, дифференциальный оператор ∇ соответствует функции A_∇, заданной по правилу

$$\mathbb{R}^d \ni A_\nabla(\xi, e) = \xi e, \quad e \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Теорема 2 (Теорема ван Шафтингена, [10]). *Неравенство*

$$\|\nabla^{m-1} f\|_{L_{\frac{d}{d-1}}} \lesssim \|A(\partial)f\|_{L_1}$$

имеет место тогда и только тогда, когда оператор A эллиптичный (то есть, равенство $A(\xi, e) = 0$ влечет $e = 0$ или $\xi = 0$) и сокращающий, то есть

$$\cap_{\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} A(\xi, E) = \{0\}.$$

Может показаться удивительным, что результата, подобного следствию 1, в такой общности не известно (замена нормы Лебега $L_{\frac{d}{d-1}}$ на норму Лоренца $L_{\frac{d}{d-1},1}$ есть открытая проблема; см. недавний обзор [11]). Тем не менее, мы приведем некоторые факты в этом направлении. Введем важное определение.

Определение 2. *Пусть $a \in [0, d)$ – вещественное число. Для функции f, локально суммируемой на пространстве $\mathbb{R}^d$ (или меры локально ограниченной вариации), определим дробный максимальный оператор порядка a согласно формуле*

$$M_a[f](x) = \sup_{r>0} r^{a-d} \int\limits_{|x-y| \leqslant r} |f|(y)\, dy.$$

Для случая меры интеграл по шару следует заменить на вариацию меры по тому же шару. В частности, M_0 есть классический максимальный оператор Харди–Литтлвуда.

Теорема 3. *Пусть функция A такова как сказано выше, пусть l – ненулевой элемент пространства E^*, а $j = 1, 2, \ldots, d$ – натуральное число. Приведенные ниже утверждения эквивалентны.*

(1) *Для всякого векторного поля φ с компактным носителем найдётся вещественнозначная функция Φ, такая что*
$$I_1[\Phi] \geqslant \mathrm{Re}\langle \partial_j^{m-1}\varphi, l\rangle; \quad \|\Phi\|_{\mathcal{H}_1} \lesssim \|A(\partial)\varphi\|_{L_1}.$$

(2) *Для всякого векторного поля φ с компактным носителем и всякой неотрицательной борелевской меры μ верно неравенство*
$$\mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle \partial_j^{m-1}\varphi, l\rangle \, d\mu \lesssim \|A(\partial)\varphi\|_{L_1} \|M_1[\mu]\|_{L_\infty}.$$

Доказательство. Наше рассуждение основано на применении теоремы Ки Фана о минимаксе (теорема 5). В качестве множества X выберем единичный шар пространства BMO, это множество выпукло и компактно (в топологии $\sigma(\mathrm{BMO}, \mathcal{H}_1)$, мы пользуемся тем, что BMO двойственно $\mathcal{H}_1$). Множество Y зададим по формуле
$$Y = \{g \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^d) \mid g \text{ вещественнозначна}, I_1[g] \geqslant \mathrm{Re}\langle \partial_j^{m-1}\varphi, l\rangle\}.$$
Функция $L : X \times Y \to \mathbb{R}$ определена по правилу
$$L(f, g) = \mathrm{Re}\langle f, g\rangle.$$
Функция L непрерывна и билинейна. Таким образом, по теореме 5 (мы переставили минимум и максимум, что не меняет сути дела в нашем случае, так как мы можем применять теорему к функции $-L$, ввиду того, что функция L билинейна),
$$\max_{f\in X}\min_{g\in Y} \mathrm{Re}\langle f, g\rangle = \min_{g\in Y}\max_{f\in X} \mathrm{Re}\langle f, g\rangle.$$
Выражение справа можно переписать (пользуясь двойственностью пространств $\mathcal{H}_1$ и BMO):
$$\min\{\|g\|_{\mathcal{H}_1} \mid g \text{ вещественнозначна}, I_1[g] \geqslant \mathrm{Re}\langle \partial_j^{m-1}\varphi, l\rangle\}.$$

Таким образом, первое утверждение из формулировки теоремы 3 эквивалентно неравенству

$$\max_{f\in X}\min_{g\in Y}\mathrm{Re}\langle f,g\rangle \lesssim \|A(\partial)\varphi\|_{L_1}.$$

Теперь преобразуем выражение в левой части (временно зафиксируем функцию f):

$$\mathrm{Re}\langle f,g\rangle = \langle I_1[g],\mathrm{Re}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}[f]\rangle.$$

Эта формула имеет смысл, например, когда $I_1[g]\in C_0^\infty$. Если обобщенная функция $\mathrm{Re}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}[f]$ не является неотрицательной, то

$$\min_{g\in Y}\mathrm{Re}\langle f,g\rangle = -\infty.$$

Действительно, это следует из леммы 1: если

$$\langle \phi,\mathrm{Re}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}[f]\rangle < 0$$

для некоторой неотрицательной функции ϕ класса C_0^∞, то значение

$$\Big\langle \mathrm{Re}\langle\partial_j^{m-1}\varphi,l\rangle+\lambda\phi,\mathrm{Re}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}[f]\Big\rangle$$

может быть сколь угодно малым, когда λ – большое (и согласно лемме 1, $\mathrm{Re}\langle\partial_j^{m-1}\varphi,l\rangle+\lambda\phi = I_1[g_\lambda]$ для некоторого элемента $g_\lambda\in Y$). По теореме Шварца, неотрицательные обобщенные функции суть вещественные неотрицательные меры локально ограниченной вариации. Но если

$$\mathrm{Re}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}[f] = \mu_f$$

есть мера, то

$$\min_{g\in Y}\mathrm{Re}\langle f,g\rangle = \min_{g\in Y}\langle I_1[g],\mathrm{Re}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}[f]\rangle = \int \mathrm{Re}\langle\partial_j^{m-1}\varphi,l\rangle\,d\mu_f,$$

где μ_f есть неотрицательная мера локально ограниченной вариации, такая что $\|I_1[\mu_f]\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant 1$; эта формула очевидна в случае $I_1[g]\in C_0^\infty$, остальные случаи могут быть рассмотрены при помощи приближения. Таким образом, по теореме Адамса (теорема 6),

$$\max_{f\in X}\min_{g\in Y}\mathrm{Re}\langle f,g\rangle \asymp \max\Big(\Big\{\,\mathrm{Re}\langle\int\partial_j^{m-1}\varphi\,d\mu,l\rangle \mid \mu$$

$$\text{есть неотрицательная мера,такая что } \|M_1[\mu]\|_{L_\infty}\leqslant 1\Big\}\Big).$$

Следовательно, второе из утверждений теоремы 3 эквивалентно неравенству

$$\max_{f\in X}\min_{g\in Y}\mathrm{Re}\langle f,g\rangle \lesssim \|A(\partial)\varphi\|_{L_1}. \qquad \square$$

Теорема 3 показывает, что утверждения в духе теоремы Дорронсоро, в некотором смысле, эквивалентны тому, что класс мер μ, допускающих вложение

$$\|\nabla^{m-1}f\|_{L_1(\mu)} \lesssim \|A(\partial)[f]\|_{L_1},$$

не зависит от функции A.

§4. Инструментарий

Теорема 4 (Неравенство Гастина, [8]). *Пусть ω – открытое ограниченное подмножество пространства $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей. Тогда*

$$H_\infty^{d-1}(\omega) \lesssim H^{d-1}(\partial\omega).$$

Теорема 5 (Теорема Ки Фана о минимаксе). *Пусть X и Y – выпуклые подмножества линейного топологического пространства, предположим, что множество X компактно. Если непрерывная функция $L : X\times Y \to \mathbb{R}$ выпукла по первой и вогнута по второй переменной, то*

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} L(x,y) = \max_{y\in Y}\min_{x\in X} L(x,y).$$

Мы сформулировали нужное нам упрощение теоремы Ки Фана, оригинальную версию читатель может найти в статье [9][1].

Теорема 6 (Теорема Адамса). *Пусть $a \in (0,d)$ – фиксированное число. Тогда*

$$\|I_a[f]\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|M_a[f]\|_{L_\infty}.$$

Если функция f неотрицательна и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1+|x|)^{-a-d} I_a[f](x)\,dx < \infty,$$

то

$$\|M_a[f]\|_{L_\infty} \lesssim \|I_a[f]\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Эта теорема была получена в работе [3] (естественно, аналогичная теорема верна и для случая меры локально ограниченной вариации).

[1] Не исключено, что это упрощение встречалось в литературе ранее.

Литература

1. В. И. Коляда, *О вложении пространств Соболева.* — Мат. Зам. **54**, No. 3 (1993), 48–71.
2. В. Г. Мазья, Т. О. Шапошникова, *Теория мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций.* — УМН **38**, No. 3(231) (1983), 23–86.
3. D. Adams, *A note on Riesz potentials.* — Duke Math. J. **42** (1975), 765–778.
4. J. R. Dorronsoro, *Differentiability properties of functions with bounded variation.* — Indiana Univ. Math. J. **38**, No. 4 (1989), 1027–1045.
5. W. G. Faris, *Weak Lebesgue spaces and quantum mechanical binding.* — Duke Math. J. **43**, No. 2 (1976), 365–373.
6. C. Fefferman, N. M. Riviere, and Y. Sagher, *Interpolation between H^p spaces: the real method.* — Trans. Amer. Math. Soc. **191** (1974), 71–81.
7. L. Grafakos, *Classical Fourier analysis.* Springer (2008).
8. W. Gustin, *Boxing inequalities.* — J. Math. Mech. **9** (1960), 229–239.
9. Ky Fan, *Minimax theorems.* — Proc. N.A.S. **39**, No. 1 (1953), 42–47.
10. J. van Schaftingen, *Limiting Sobolev inequalities for vector fields and cancelling linear differential operators.* — J. EMS **15**, No. 3 (2013), 877–921.
11. J. van Schaftingen, *Limiting Bourgain–Brezis inequalities for systems of linear differential equations: Theme and variations.* — J. fixed point th. appl. (2014), 1–25.
12. E. M. Stein, *Harmonic analysis, real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals.* Princeton University press (1993).
13. R. Strichartz, *H^p Sobolev spaces.* — Colloq. Math. **60/61** (1990), 129–139.

Stolyarov D. M. Dorronsoro's theorem and a slight generalization.

We give a simple proof of a theorem by Dorronsoro and use similar ideas to establish the equivalence of certain embeddings results for vector fields.

Институт Математики,
Польская Академия Наук (ИМПАН),
Варшава, Польша,
Исследовательская Лаборатория
им. П. Л. Чебышёва, СПбГУ;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: dms@pdmi.ras.ru,
dstolyarov@impan.pl

Поступило 1 июня 2015 г.