Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

А. Пышкин

МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РЯДА ФУРЬЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ АЗОФФА–ШЕХАДЫ

§1. Введение

Исследование свойств полноты и базисности систем векторов в гильбертовом пространстве представляет собой одну из классических задач функционального анализа. Важную роль при этом играет свойство *наследственной полноты* системы векторов. Систему векторов $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в гильбертовом пространстве называют *наследственно полной*, если она полна и минимальна, ее биортогональная система $\{f_n^*\}$ полна и, более того, любая "смешанная" система $\{f_n\}_{n\in N_1}\cup\{f_n^*\}_{n\in N_2}$, где $N_1\sqcup N_2=\mathbb{N}$, также полна.

В статье [5] Э. Азофф и Х. Шехада рассмотрели один специальный пример полной минимальной системы векторов $\{f_n\}$, заданной в некотором ортонормированном базисе трехдиагональной матрицей так, что биортогональная система $\{f_n^*\}$ обладает тем же свойством. Для этого примера ими был найден критерий наследственной полноты в зависимости от коэффициентов матрицы. Позднее А. Катаволос, М. Ламбру и М. Пападакис [9] изучили алгебру операторов, связанную с системой Азоффа–Шехады, и, в частности, описали системы, для которых обобщенный ряд Фурье (по системе $\{f_n\}$) допускает линейный метод суммирования. В настоящей заметке получены некоторые уточнения результатов статей [5, 9], а именно, построены явные линейные методы суммирования рядов Фурье.

1.1. Предварительные сведения и обозначения. Всюду в дальнейшем символ $\mathcal{H}$ будет обозначать сепарабельное гильбертово пространство.

Ключевые слова: полная минимальная система векторов, биортогональная система, наследственная полнота, сильный M-базис, метод суммирования.

Работа поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки молодых российских учёных – докторов наук МД-5758.2015.1.

Определение 1. Последовательность векторов $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называют *минимальной*, если $f_j \notin \overline{\mathrm{Lin}}(f_k \mid k \neq j)$, где $\overline{\mathrm{Lin}}(X)$ обозначает замыкание линейной оболочки множества X.

Как известно, последовательность $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ является минимальной тогда и только тогда, когда существует биортогональная последовательность $\{f_j^*\}_{j=1}^{\infty}$, то есть такая система, что $\langle f_j, f_k^* \rangle = \delta_{jk}$.

Определение 2. Будем называть полную минимальную последовательность $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *наследственно полной*, если и только если для любого разбиения натурального ряда $\mathbb{N} = N_1 \sqcup N_2$ последовательность векторов $\{f_j\}_{j \in N_1} \cup \{f_j^*\}_{j \in N_2}$ полна в $\mathcal{H}$.

Это условие равносильно следующему свойству: для всякого вектора $x \in \mathcal{H}$ справедливо включение

$$x \in \overline{\mathrm{Lin}}\left(\langle x, f_j^* \rangle f_j\right) = \overline{\mathrm{Lin}}\left(f_j \mid \langle x, f_j^* \rangle \neq 0\right).$$

Таким образом, свойство наследственной полноты можно воспринимать как самую слабую из возможных форм восстановления вектора x по его формальному ряду Фурье:

$$x \leftrightsquigarrow \sum_j \langle x, f_j^* \rangle f_j. \tag{1.1}$$

Наследственно полные системы называют также *сильными базисами Маркушевича* (или просто *сильными М-базисами*).

Первые примеры полных минимальных систем с полной биортогональной системой, но без свойства наследственной полноты, были построены в работах А.С. Маркуса [3] и Н.К. Никольского [4]. Более того, в [3] показано, что компактный оператор с полной системой $\{f_n\}$ собственных и корневых векторов допускает спектральный синтез (то есть любое его инвариантные подпространство порождается лежащими в нем корневыми векторами) в том и только том случае, когда система $\{f_n\}$ наследственно полна. В дальнейшем свойство наследственной полноты подробно изучалось в [1, 2].

Э. Азофф и Х. Шехада [5] построили пример “трехдиагональной” системы векторов (то есть заданной трехдиагональной матрицей в некотором ортонормированном базисе), обладающей полной биортогональной системой с тем же свойством (см. раздел 2). Эта система может быть или не быть наследственно полной в зависимости от определяющих ее коэффициентов. Этот пример возник при исследовании рефлексивности операторных алгебр и представляет собой расширение и модификацию одной конструкции Д. Ларсона и У. Вогена [10].

Отметим также, что в недавней серии работ [6, 7, 8] исследовалась наследственная полнота специальных функциональных систем (включая системы экспонент) и связанная с ней задача о спектральном синтезе для одномерных возмущений самосопряженных операторов.

1.2. Сильная полнота и k-полнота для систем векторов в гильбертовом пространстве. Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\{f_n\}$ – полная минимальная система векторов, а $\{f_n^*\}$ – биортогональная к ней. Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру операторов, для которых все векторы f_n – собственные. Сразу заметим, что множество операторов ранга один из алгебры $\mathcal{A}$ имеет вид

$$R_1(\mathcal{A}) = \{af_n^* \otimes f_n \mid a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

Теперь дадим несколько определений.

Определение 3. Будем называть систему $\{f_n\}$ *k-полной*, если для любых векторов $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой оператор $R \in \mathrm{Lin}(R_1(\mathcal{A}))$, что $\|Rx_s - x_s\| < \varepsilon$, $1 \leqslant s \leqslant k$.

Замечание 1.1. В случае $k = 1$ мы получаем определение свойства наследственной полноты.

Определение 4. Будем называть систему $\{f_n\}$ *сильно полной*, если множество $\mathrm{Lin}(R_1(\mathcal{A}))$ плотно в $\mathcal{A}$ в сильной операторной топологии.

Замечание 1.2. Заметим, что *сильно полная* система является *k-полной* для любого k.

1.3. Полнота систем векторов и линейные методы суммирования в гильбертовом пространстве. Определения k-полной и сильно полной системы можно переформулировать в терминах существования методов суммирования ряда Фурье (1.1), пользуясь явным видом операторов из $R_1(\mathcal{A})$. А именно, система $\{f_n\}$ k-полна тогда и только тогда, когда для любых векторов $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$ существуют такие коэффициенты $\{\alpha_m^N\}_{m,N=1}^{\infty}$ (зависящие только от этих k векторов), что

$$\lim_{N\to\infty} \sum_m \alpha_m^N \langle x_l, f_m^* \rangle f_m = x_l, \qquad 1 \leqslant l \leqslant k.$$

Заметим, что это равносильно существованию такого линейного метода суммирования $\{\gamma_m^N\}_{m,N=1}^{\infty}$ (зависящего только от k векторов x_1, $\ldots, x_k \in \mathcal{H}$), что

$$\lim_{N\to\infty}\sum_m \gamma_m^N \mathcal{F}_m(x_l) = x_l, \qquad 1 \leqslant l \leqslant k,$$

где $\mathcal{F}_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle x, f_k^*\rangle f_k$ – частичные суммы ряда Фурье вектора x. Аналогично, система $\{f_n\}$ является сильно полной в том и только в том случае, когда существует универсальный метод суммирования $\{\gamma_m^N\}$, не зависящий от конкретных векторов и работающий для любого вектора $x \in \mathcal{H}$, то есть $\lim_{N\to\infty}\sum\limits_m \gamma_m^N \mathcal{F}_m(x) = x$ для любого вектора $x \in \mathcal{H}$.

1.4. Структура статьи. В разделе 2 обсуждаются известные результаты о связи сильной полноты и k-полноты для примера Азоффа–Шехады. В разделе 3 предлагается явное построение линейных методов суммирования для примера Азоффа–Шехады. Основные результаты заметки заключаются в теоремах 3.1 и 3.2. В теореме 3.1 предложен явный метод суммирования ряда Фурье индивидуального вектора в случае 1-полноты, в то время как в теореме 3.2 приводится построение универсального метода суммирования. Этот результат существенно упрощает доказательство критерия сильной полноты системы Азоффа–Шехады из статьи [5].

§2. Пример Азоффа–Шехады и его полнота

В статье [5] приводится пример системы, которая при определенных значениях параметров не обладает свойством наследственной полноты. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}$. Зададим $\{f_j\}$, $\{f_j^*\}$ при $j \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
f_1 &= e_1 + a_2 e_2, & f_{2j} &= e_{2j}, \quad j \geqslant 1,\\
f_{2j-1} &= -a_{2j-1}e_{2j-2} + e_{2j-1} + a_{2j}e_{2j}, & & \quad j \geqslant 2,\\
f_{2j}^* &= -a_{2j}e_{2j-1} + e_{2j} + a_{2j+1}e_{2j+1}, & f_{2j-1}^* &= e_{2j-1}, \quad j \geqslant 1
\end{aligned} \tag{2.1}$$

для некоторых коэффициентов $a_k > 0$, где $k \geq 2$.

В дальнейшем $\{f_j\}$ всюду будет обозначать последовательность вида (2.1).

Теорема 2.1. (см. [5]) *Последовательности* $\{f_j\}$, $\{f_j^*\}$ *биортогональны друг другу и полны в* $\mathcal{H}$. *Они не являются наследственно полными тогда и только тогда, когда обе последовательности*

$$\lambda_k = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k}}{a_3 a_5 \dots a_{2k+1}}, \qquad \mu_k = \frac{a_3 a_5 \dots a_{2k-1}}{a_4 a_6 \dots a_{2k}}$$

принадлежат пространству ℓ^2.

Пример 1. Положив в утверждении $a_j = 2^j$, мы получим пример системы, не обладающей свойством наследственной полноты. Также для $a_j = j^p$ в случае $p > 1$ система не будет наследственно полной, а для $p \leqslant 1$ система $\{f_j\}$ будет наследственно полной.

Таким образом, Азофф и Шехада получили критерий наследственной полноты для систем такого “трехдиагонального” типа. Катаволос, Ламбру и Пападакис [9] продолжили исследование этого класса систем и нашли критерий сильной полноты в терминах величин a_k.

Теорема 2.2. (см. [9]) *Пусть* $\mathcal{A}$ – *алгебра, построенная по системе Азоффа–Шехады* (2.1). *Тогда следующие утверждения равносильны*:

- *ряд* $\sum a_k^{-1}$ *расходится*;
- *линейная оболочка* $\mathrm{Lin}(R_1(\mathcal{A}))$ *плотна в* $\mathcal{A}$ *в сильной топологии*;
- *система* $\{f_n\}$ *является* 2*-полной.*

Таким образом, для системы Азоффа–Шехады 2-полнота оказывается эквивалентной значительно более сильному свойству сильной полноты. Было бы интересно найти конкретные методы суммирования для случая наследственной полноты (то есть 1-полноты) и для случая сильной полноты системы (2.1).

§3. Методы суммирования для примера Азоффа–Шехады

Пусть $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle x, f_k^* \rangle f_k$ – частичная сумма ряда Фурье вектора x относительно системы $\{f_k\}$, а $S_m = S_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k e_k$, $x_k = \langle x, e_k \rangle$ – частичная сумма ряда Фурье относительно канонического базиса $\{e_k\}$. Заметим, что

$$\langle x, f^*_{2k-1}\rangle f_{2k-1} = x_{2k-1}(-a_{2k-1}e_{2k-2} + e_{2k-1} + a_{2k}e_{2k}),$$
$$\langle x, f^*_{2k}\rangle f_{2k} = e_{2k}(-a_{2k}x_{2k-1} + x_{2k} + a_{2k+1}x_{2k+1}).$$

Отсюда легко получаются выражения для частичных сумм ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2k-1} &= S_{2k-1} + a_{2k}x_{2k-1}e_{2k}, \\ \mathcal{F}_{2k} &= S_{2k} + a_{2k+1}x_{2k+1}e_{2k}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Аналогично определим и вычислим $\mathcal{F}^*_m = \mathcal{F}^*_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle x, f_k\rangle f^*_k$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*_{2k-1} &= S_{2k-1} + a_{2k}x_{2k}e_{2k-1}, \\ \mathcal{F}^*_{2k} &= S_{2k} + a_{2k+1}x_{2k}e_{2k+1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Распишем выражение частичной суммы $\sum\limits_{m=1}^{N} \gamma^N_m \mathcal{F}_m$ для метода суммирования $\{\gamma^N_m\}$ при четном $N = 2M$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N} \gamma^N_m \mathcal{F}_m = \sum_{k=1}^{M} e_{2k}\big((\gamma^N_{2k} + \ldots + \gamma^N_N)x_{2k} \\ + \gamma^N_{2k-1}a_{2k}x_{2k-1} + \gamma^N_{2k}a_{2k+1}x_{2k+1}\big) \\ + \sum_{k=1}^{M} e_{2k-1}\big((\gamma^N_{2k-1} + \ldots + \gamma^N_N)x_{2k-1}\big). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Напишем аналогичное выражение для частичной суммы $\sum\limits_{m=1}^{N} \gamma^N_m \mathcal{F}^*_m$ при нечетном $N = 2M - 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N} \gamma^N_m \mathcal{F}^*_m = \sum_{k=1}^{M} e_{2k-1}\big((\gamma^N_{2k-1} + \ldots + \gamma^N_N)x_{2k-1} \\ + \gamma^N_{2k-1}a_{2k}x_{2k} + \gamma^N_{2k-2}a_{2k-1}x_{2k-2}\big) \\ + \sum_{k=1}^{M-1} e_{2k}\big((\gamma^N_{2k} + \ldots + \gamma^N_N)x_{2k}\big). \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.1. Наследственная полнота для примера Азоффа–Шехады. Рассмотрим систему уравнений на коэффициенты $\{\gamma_k^N\}$:

$$\begin{aligned}
&\gamma_k^N = 0, \quad k \neq N, N-1,\\
&\gamma_N^N + \gamma_{N-1}^N = 1,\\
&\gamma_N^N x_N + \gamma_{N-1}^N a_N x_{N-1} + \gamma_N^N a_{N+1} x_{N+1} = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Следующая теорема показывает, что решения такой системы задают линейный метод суммирования для ряда $\sum\limits_k \langle x, f_k^*\rangle f_k$ в случае четного N или для ряда $\sum\limits_k \langle x, f_k\rangle f_k^*$ в случае нечетного N. Таким образом, в случае наследственной полноты существует метод суммирования, матрица которого содержит только два ненулевых элемента в каждой строке.

Теорема 3.1. *Следующие утверждения равносильны*:

(a) *система векторов* (2.1) *из примера Азоффа–Шехады наследственно полна*;

(b) *последовательность вещественных чисел* v_n, *заданная рекурсивно*: $v_1 \neq 0$, $v_1 + a_2 v_2 = 0$ *и* $-a_n v_{n-1} + v_n + a_{n+1} v_{n+1} = 0$, $n \geq 2$, *не принадлежит* ℓ^2;

(c) *для любого вектора* x *существует последовательность* N_s *такая, что для каждого* s *система* (3.5) *разрешима относительно* $\{\gamma_k^{N_s}\}$ *и задает метод суммирования ряда* $\sum\limits_k \langle x, f_k^*\rangle f_k$ *или ряда* $\sum\limits_k \langle x, f_k\rangle f_k^*$.

Доказательство. Равносильность пунктов (a) и (b) доказана в [9, теорема 2.1].

(b) $\Rightarrow$ (c). Решение системы (3.5) имеет следующий вид:

$$\gamma_{N-1}^N = \frac{a_{N+1}x_{N+1} + x_N}{a_{N+1}x_{N+1} + x_N - a_N x_{N-1}},$$
$$\gamma_N^N = \frac{-a_N x_{N-1}}{a_{N+1}x_{N+1} + x_N - a_N x_{N-1}}.$$

Пусть условие (c) не выполнено. Это означает, что начиная с некоторого N_1 знаменатели равны нулю, то есть

$$a_{N+1}x_{N+1} + x_N - a_N x_{N-1} = 0 \tag{3.6}$$

для любых $N > N_1$. Решая последовательно уравнения $-a_n v_{n-1} + v_n + a_{n+1}v_{n+1} = 0$ для $n \leq N_1$ (двигаясь от больших номеров к меньшим), мы построим последовательность $\{v_k\}_{k\geq 1} \in \ell^2$, для которой

$$v_1 \neq 0, \quad v_1 + a_2 v_2 = 0, \quad -a_n v_{n-1} + v_n + a_{n+1}v_{n+1} = 0,\ n \geq 2.$$

Тем самым мы придем к противоречию с пунктом (b). Значит, условие (c) выполнено.

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть для любого вектора x существует такая последовательность N_s. Предположим, что эта последовательность содержит бесконечно много четных чисел N_s. Тогда решения системы (3.5) задают метод суммирования $\{\gamma_m^N\}$, для которого сумма $\sum\limits_m \gamma_m^N \mathcal{F}_m$ будет сходиться к вектору x. В самом деле, пусть $\{\gamma_m^N\}$ – решение системы (3.5), где $N = 2M$ для некоторого натурального M. Тогда, используя равенство (3.3), получим:

$$\sum_{m=1}^{N} \gamma_m^N \mathcal{F}_m = \sum_{k=1}^{M-1} e_{2k}x_{2k} + \sum_{k=1}^{M} e_{2k-1}x_{2k-1} = \sum_{k=1}^{N-1} e_k x_k \to x$$

при $N \to \infty$.

Теперь разберем случай, когда в последовательности N_s содержится бесконечно много нечетных членов. Тогда решения системы (3.5) задают метод суммирования $\{\gamma_m^N\}$, для которого выражение $\sum\limits_m \gamma_m^N \mathcal{F}_m^*$ будет сходиться к вектору x. В самом деле, пусть $\{\gamma_m^N\}$ – решение системы (3.5), где $N = 2M-1$ для некоторого M. Воспользуемся равенством (3.4) и получим:

$$\sum_{m=1}^{N} \gamma_m^N \mathcal{F}_m^* = \sum_{k=1}^{M-1} e_{2k-1}x_{2k-1} + \sum_{k=1}^{M-1} e_{2k}x_{2k} = \sum_{k=1}^{N-1} e_k x_k \to x$$

при $N \to \infty$. □

3.2. Сильная полнота.

Теорема 3.2. *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k^{-1}$ *расходится. Тогда система* $\{f_k\}$ *сильно полна, а коэффициенты*

$$\gamma_k^N = \frac{a_{k+1}^{-1}}{A_N}, \quad k \geqslant 1,$$

где $A_N = \sum\limits_{k=2}^{N+1} a_k^{-1}$, *задают метод суммирования ряда Фурье для любого вектора по системе* $\{f_k\}$.

Доказательство. Подставим указанные $\{\gamma_k^N\}$ в (3.1). Не умаляя общности, будем считать, что $N = 2M$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{N} \gamma_m^N \mathcal{F}_m = \sum_{m=1}^{N} \gamma_m^N S_m + \sum_{k=1}^{N} \bigl(\gamma_{2k-1}^N a_{2k} x_{2k-1} + \gamma_{2k}^N a_{2k+1} x_{2k+1}\bigr) e_{2k}.$$

Заметим, что так как $A_N \to \infty$, то $\{\gamma_m^N\}$ – перманентный метод суммирования. Так как S_m – частичные суммы ряда Фурье для вектора x, то $S_m \to x$. Поэтому справедливо соотношение

$$\sum_{m=1}^{N} \gamma_m^N S_m \longrightarrow x.$$

Остаток стремится к нулю, так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \bigl(\gamma_{2k-1}^N a_{2k} x_{2k-1} + \gamma_{2k}^N a_{2k+1} x_{2k+1}\bigr)\, e_{2k} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{N} (x_{2k-1} + x_{2k})\, A_N^{-1} e_{2k} \right\| \leqslant 2\|x\| A_N^{-1} \to 0. \qquad \square$$

Замечание 3.1. Теорема 3.2 дает простое и конструктивное (без применения двойственности) доказательство того, что из условия

$$\sum_k a_k^{-1} < \infty$$

вытекает *сильная полнота* (см. теорему 2.2). Оригинальное доказательство в [9] основано на анализе плотности множества $\mathrm{Lin}(R_1(\mathcal{A}))$ в $\mathcal{A}$ в ультраслабой топологии и вычислении следов ядерных операторов.

Благодарность.

Автор выражает благодарность А. Д. Баранову за постановку задачи и постоянную поддержку в ходе работы над статьей.

Литература

1. Л. Н. Довбыш, Н. К. Никольский, В. Н. Судаков, *Насколько хорошим может быть ненаследственно полное семейство?* — Зап. научн. сем. ЛОМИ, **73** (1977), 52–69
2. Л. Н. Довбыш, Н. К. Никольский, *Два способа избежать наследственной полноты.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ, **65** (1976), 183–188.
3. А. С. Маркус, *Задача спектрального синтеза для операторов с точечным спектром.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **34** (1970), 662–668.
4. Н. К. Никольский, *Полные расширения вольтерровых операторов.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **33** (1969), 1349–1355.
5. E. Azoff, H. Shehada, *Algebras generated by mutually orthogonal idempotent operators.* — J. Oper. Theory, **29**, No. 2 (1993), 249–267.
6. A. Baranov, Yu. Belov, A. Borichev, *Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels.* — Adv. Math., **235**, No. 1 (2013), 525–554.
7. A. Baranov, Yu. Belov, A. Borichev, *Spectral synthesis in de Branges spaces.* — Geom. Funct. Anal. (GAFA), **25**, No. 2 (2015), 417–452.
8. A. D. Baranov, D. V. Yakubovich, *Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators.* — `arXiv:1212.5965 [math.FA]`.
9. A. Katavolos, M. Lambrou, M. Papadakis, *On some algebras diagonalized by M-bases of ℓ^2.* — Integr. Equat. Oper. Theory, **17**, No. 1 (1993), 68–94.
10. D. Larson, W. Wogen, *Reflexivity properties of $T \bigoplus 0$.* — J. Funct. Anal., **92** (1990), 448–467.

Pyshkin A. Summation methods for Fourier series with respect to the Azoff–Shehada system.

A special class of complete minimal systems with complete biorthogonal system in a Hilbert space is considered. This class was introduced by Azoff and Shehada. The paper studies conditions under which there exists a linear summation method for Fourier series with respect to the Azoff–Shehada system. A construction of a linear summation method of the Fourier series for a given vector is presented, as well as a construction of a universal linear summation method.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `aapyshkin@gmail.com`

Поступило 3 августа 2015 г.