Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

А. Н. Медведев

ПАДЕНИЕ ГЛАДКОСТИ ВНЕШНЕЙ ФУНКЦИИ В СРАВНЕНИИ С ГЛАДКОСТЬЮ ЕЕ МОДУЛЯ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВЕЛИЧИНУ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ

§1. Введение

Функция Φ на полуоси $[0,\infty)$ называется *квазивогнутой*, если выполнены следующие условия: 1) $\Phi(0)=0$; 2) $\Phi(t)$ положительна и возрастает при $t>0$; 3) $\Phi(t)/t$ убывает при $t>0$. Для всякой квазивогнутой функции найдется вогнутая мажоранта Φ_0 такая, что $\Phi_0(t)/2 \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0(t)$ при всех $t>0$.

1.1. Симметричные пространства функций. Банахово пространство $\mathbb{X}$ измеримых функций на окружности $\mathbb{T}=\{e^{i\theta} : \theta\in[0,2\pi)\}$ называется *симметричным*, если для любых измеримых функций f,g выполнены следующие два свойства:

(S1) $|f|\leqslant|g|$ п.в., $g\in\mathbb{X}\Rightarrow f\in\mathbb{X}, \|f\|_{\mathbb{X}}\leqslant\|g\|_{\mathbb{X}}$;
(S2) $f\in\mathbb{X}$, f и g равноизмеримы $\Rightarrow g\in\mathbb{X}$, $\|f\|_{\mathbb{X}}=\|g\|_{\mathbb{X}}$.

В дальнейшем мы, как правило, отождествляем окружность с отрезком $(-\pi,\pi]$, а функции на окружности – с функциями на этом отрезке, которые мы обычно считаем продолженными на вещественную прямую 2π-периодически. Рассмотрим *фундаментальную функцию* $\Phi_{\mathbb{X}}(t)=\|\chi_{[0,t)}\|_{\mathbb{X}}$ симметричного пространства $\mathbb{X}$. Согласно свойству (S2), норма всех характеристических функций χ_E измеримых множеств $E\subset\mathbb{T}$ фиксированной меры $|E|=t$ равна $\Phi_X(t)$. Более того, фундаментальная функция $\Phi_{\mathbb{X}}(\cdot)$ будет квазивогнутой (см. [6], стр. 137)

Симметричному пространству $\mathbb{X}$ можно поставить в соответствие ассоциированное пространство (двойственное по Кёте) $\mathbb{X}'$, состоящее

Ключевые слова: внешняя функция, оператор гармонического сопряжения, симметричное пространство, невозрастающая перестановка, средние осцилляции.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, гранта Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026 и ОАО "Газпром нефть", и гранта РФФИ 14-01-00198-а.

из всех измеримых функций g, для которых

$$\|g\|_{\mathbb{X}'} := \sup_{f\in\mathbb{X},\ \|f\|_{\mathbb{X}}\leqslant 1} \int\limits_{\mathbb{T}} |fg| < \infty.$$

Ассоциированное пространство $\mathbb{X}'$ тоже будет симметричным. Кроме того, пара $(\mathbb{X},\ \mathbb{X}')$ обладает следующими свойствами:

$$f \in \mathbb{X}, g \in \mathbb{X}' \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{T}} |fg| \leqslant \|f\|_{\mathbb{X}}\|g\|_{\mathbb{X}'}, \tag{1}$$

$$\Phi_{\mathbb{X}}(t)\Phi_{\mathbb{X}'}(t) = t \quad \text{при всех } t \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

Разумеется, свойство (1) – просто следствие определения ассоциированной нормы. Доказательство соотношения (2) можно найти в [6], стр. 144.

Простейшими примерами симметричных пространств являются пространства Лебега $L^p(\mathbb{T})$ с фундаментальной функцией $\Phi_{L^p}(t) = t^{1/p}$. В целом, симметричные пространства образуют весьма обширную пространственную шкалу между $L^1(\mathbb{T})$ и $L^\infty(\mathbb{T})$.

1.2. Гладкость в терминах средних осцилляций. Рассмотрим измеримую на окружности $\mathbb{T}$ функцию f и некоторое симметричное пространство $\mathbb{W}$. Зафиксируем постоянную c и дугу окружности $I \subset \mathbb{T}$. Положим

$$\Omega_{\mathbb{W}}(f, I, c) := \frac{\||f - c|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}.$$

Средней осцилляцией функции f по дуге I относительно нормы симметричного пространства $\mathbb{W}$ назовем число $\Omega_{\mathbb{W}}(f, I) := \inf_c \Omega_{\mathbb{W}}(f, I, c)$. Описанные выше свойства симметричных пространств позволяют получить следующие оценки:

$$\Omega_{L^1}(f, I, c) = \frac{\||f - c|\chi_I\|_{L^1}}{|I|} \leqslant \frac{\||f - c|\chi_I\|_{\mathbb{W}}\|\chi_I\|_{\mathbb{W}'}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}\|\chi_I\|_{\mathbb{W}'}} = \Omega_{\mathbb{W}}(f, I, c); \tag{3}$$

$$\Omega_{L^1}(f, I) \leqslant \Omega_{\mathbb{W}}(f, I) \leqslant \Omega_{L^\infty}(f, I). \tag{4}$$

Нами будут рассматриваться условия типа

$$\Omega_{\mathbb{W}}(f, I) \leqslant \omega(|I|),\ I \in \mathcal{I}, \tag{SC}$$

по всем дугам $I \in \mathcal{I}$ набора $\mathcal{I}$, с некоторой квазивогнутой мажорантой ω, удовлетворяющей стандартным условиям регулярности

$$\int\limits_0^\delta \frac{\omega(u)}{u} du \leqslant C_1^\omega \omega(\delta); \ \delta \int\limits_\delta^{2\pi} \frac{\omega(u)}{u^2} du \leqslant C_2^\omega \omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta \in (0, 2\pi). \tag{RG}$$

Возьмем в качестве набора $\mathcal{I}$ все дуги окружности. Тогда условие (SC) влечет $\Omega_{L^1}(f, I) \leqslant \omega(|I|)$ на всех дугах окружности. Согласно результату работы [8], это означает, что мы можем исправить функцию f на множестве меры ноль до непрерывной, причем ее модуль непрерывности допускает оценку $\omega_f(\delta) \leqslant C\omega(\delta)$, при малых δ. Последнее обстоятельство позволяет нам считать соотношения типа (SC) условиями на гладкость функции порядка меньше 1.

1.3. Оператор гармонического сопряжения на симметричных пространствах. Рассмотрим некоторое симметричное пространство $\mathbb{W}$. Зададимся вопросом: когда оператор гармонического сопряжения $\mathcal{H}$, с помощью которого определяются граничные значения внешней функции (см. п. 1.4 ниже), будет ограничен из $\mathbb{W}$ в $\mathbb{W}$. Введем обозначение D_t для оператора растяжения, чьи значения задаются по формуле $D_t f = f(t\cdot)$. Также обозначим через

$$\alpha_{\mathbb{W}} := \lim_{t \to \infty} \frac{\log \|D_t\|_{\mathbb{W} \to \mathbb{W}}}{\log t}, \ \beta_{\mathbb{W}} := \lim_{t \to 0} \frac{\log \|D_t\|_{\mathbb{W} \to \mathbb{W}}}{\log t}$$

верхний и нижний *индексы Бойда* соответственно. Рассмотри условие

$$\alpha_{\mathbb{W}} < 1, \quad \beta_{\mathbb{W}} > 0. \tag{B}$$

Согласно результату работы [3], условие (B) эквивалентно ограниченности оператора $\mathcal{H} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$.

1.4. Постановка задачи. Рассмотрим 2π-периодическую неотрицательную функцию φ, для которой $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Построим внешнюю функцию $\mathcal{O}_\varphi$ с граничными значениями, равными $\varphi \exp(\mathcal{H}(\log \varphi))$, где $\mathcal{H}$ – оператор гармонического сопряжения. Как отмечалось выше, гладкость мы задаем в форме условий на средние пространственные осцилляции по наборам дуг. Мы будем рассматривать лишь два типа таких наборов: $\mathcal{I}_{\mathbb{T}}$ – набор, состоящий из всех дуг окружности; $\mathcal{I}_{x_0}$ – набор дуг, содержащих фиксированную точку x_0. Считаем, что выполнено условие

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \omega_{SCM}(|I|),\ x \in I, \quad I \in \mathcal{I}_{x_0}, \tag{SCM}$$

где $\omega_{SCM}(|I|)$ – квазивогнутая мажоранта, удовлетворяющая условиям регулярности (RG). Собственно, под связью между гладкостью внешней функции и ее модуля подразумевается, что из условия (SCM) следует условие подобного типа для средних осцилляций, но, возможно, с другой мажорантой:

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_{\varphi}, I) \leqslant \omega_{SCF}(|I|), \quad I \in \mathcal{I}_{x_0}. \tag{SCF}$$

Результаты такого рода и были получены в статье [9]. Одним из известных эффектов является так называемое уполовинивание гладкости, т.е. без каких-либо дополнительных ограничений всегда верно соотношение $\omega_{SCF}(\cdot) = \omega_{SCM}(\sqrt{\cdot})$ и ничего лучше ожидать нельзя. Однако удалось также установить, что если $\log \varphi \in L^p$, то можно добиться улучшения данного соотношения, а именно $\omega_{SCF}(\cdot) = \omega_{SCM}((\cdot)^{\frac{p}{p+1}})$. Это позволяет начать поиск соотношений типа $\omega_{SCF} = \omega_{SCM} \circ \mathcal{R}$, где вид функции $\mathcal{R}$ зависит от поведения функции $\log \varphi$. Для выявления подобного типа зависимости мы рассматриваем условия типа $\log \varphi \in \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ – некоторое симметричное пространство. Нами будут установлены соотношения вышеописанного вида с функцией $\mathcal{R}$, зависящей только от $\Phi_{\mathbb{X}}$. Более того, мы приведем примеры, обосновывающие неулучшаемость найденного нами показателя, а также опишем все симметричные пространства, для которых $\mathcal{R}$ имеет фиксированный вид.

§2. Показатель падения гладкости при условии $\log \varphi \in \mathbb{X}$

Зафиксируем точку $x_0 \in [0, 2\pi)$ и рассмотрим набор $\mathcal{I}_{x_0}$. Кроме того, как отмечалось выше, мы можем считать все квазивогнутые функции, фигурирующие в условиях, вогнутыми и непрерывными (достаточно заменить их на их наименьшие вогнутые мажоранты). Сформулируем основную теорему.

Теорема 2.1. *Пусть дана неотрицательная 2π-периодическая функция φ, которая удовлетворяет условию* (SCM) *с мажорантой ω_{x_0}, удовлетворяющей условию* (RG). *Пусть выполнено условие* $\log \varphi \in \mathbb{X}$.

Фиксируем симметричное пространство $\mathbb{W}$, *удовлетворяющее условию* (B). *Тогда найдутся такие постоянные*

$$C_i = C_i(\omega_{x_0}, C_{\varphi(x_0)}, C_{\log}, (RG), \mathbb{X}, (B)), \quad i = 1, 2,$$

и граница $\mathcal{A}$, *зависящая только от* ω_{x_0} *и* $\varphi(x_0)$, *что для всякого промежутка* $I \in \mathcal{I}_{x_0}$ *выполнены следующие утверждения.*

1) *Если* $\varphi(x_0) = 0$, *то* $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant \omega_{x_0}(|I|)$. *В противном случае, верны два оставшихся утверждения.*
2) *Если* $|I| > \mathcal{A}$, *то* $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C_1\omega_{x_0}(|I|)$.
3) *Если* $|I| \leqslant \mathcal{A}$, *то* $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C_2(\omega_{x_0}(|I|) + \omega_{x_0}(\psi_{\mathbb{X}}(|I|))$,

где функция $\psi_{\mathbb{X}}$ *– обратная к функции* $R_{\mathbb{X}}(u) = u^2/\Phi_{\mathbb{X}'}(u) = u\Phi_{\mathbb{X}}(u)$.

Следствие 2.1 (глобальная гладкость). *Предположим, что неравенство* $\omega_\varphi(\delta) \leqslant \omega(\delta)$ *выполнено при всех* δ *с регулярной (см.* (RG)) *вогнутой мажорантой* ω. *Предположим, что для некоторого симметричного пространства* $\mathbb{X}$ *выполнено условие* $\log\varphi \in \mathbb{X}$. *Тогда для достаточно малых* δ *верна оценка*

$$\omega_{\mathcal{O}_\varphi}(\delta) \leqslant C(\omega, \|\log\varphi\|_{\mathbb{X}})(\omega(\delta) + \omega(\psi_{\mathbb{X}}(\delta))),$$

где $\psi_{\mathbb{X}}$ *– обратная к функции* $R_{\mathbb{X}}(u) = u^2/\Phi_{\mathbb{X}'}(u) = u\Phi_{\mathbb{X}}(u)$.

Доказательство. По теореме 2.1 условие (SCF) с мажорантой

$$C(\omega, \|\log\varphi\|_{\mathbb{X}})(\omega + \omega \circ \psi_{\mathbb{X}})$$

и пространством $\mathbb{W}$ выполнено равномерно по всем точкам x. Отсюда, согласно результату работы [8],

$$\omega_{\mathcal{O}_\varphi}(\delta) \leqslant C\Big(\int\limits_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}du + \int\limits_0^\delta \frac{\omega(\psi_{\mathbb{X}}(u))}{u}du\Big) \leqslant C\Big(\omega(\delta) + \int\limits_0^\delta \frac{\omega(\psi_{\mathbb{X}}(u))}{u}du\Big)$$

при достаточно малых δ. Заметим, что

$$\int\limits_0^\delta \frac{\omega(\psi_{\mathbb{X}}(u))}{u}du = \int\limits_0^{\psi_{\mathbb{X}}(\delta)} \omega(v)\frac{(\psi_{\mathbb{X}}^{-1}(v))'}{\psi_{\mathbb{X}}^{-1}(v)}dv = \int\limits_0^{\psi_{\mathbb{X}}(\delta)} \omega(v)(\log R_{\mathbb{X}}(v))'dv$$
$$= \int\limits_0^{\psi_{\mathbb{X}}(\delta)} \omega(v)\Big(\frac{1}{v} + (\log\Phi_{\mathbb{X}}(v))'dv\Big) \leqslant 2\int\limits_0^{\psi_{\mathbb{X}}(\delta)} \frac{\omega(v)}{v}dv \leqslant C\omega(\psi_{\mathcal{X}}(\delta)).$$

В предпоследнем неравенстве мы воспользовались тем, что функция $\Phi_{\mathcal{X}}(t)/t$, а вместе с ней и $\log\Phi_{\mathcal{X}}(t) - \log t$, убывает, стало быть, ее производная неположительна. Как легко заметить, условие Дини, необходимое, чтобы применить результат статьи [8], выполнено. $\square$

Замечание 2.1 (о количественных параметрах $\psi_{\mathbb{X}}$ и $R_{\mathbb{X}}$)**.** Отметим, что при малых v выполнены неравенства $c_1 v^2 \leqslant R_{\mathbb{X}} \leqslant c_2 v$ и $c_3 v \leqslant \psi_{\mathbb{X}} \leqslant c_4\sqrt{v}$. Границы в этих неравенствах соответствуют известным случаям: при $\log\varphi \in L^1$ падение гладкости максимально, а при $\log\varphi \in L^\infty$ оно не наблюдается вовсе. Ниже мы построим пример функции φ, для которой $\omega_{\mathcal{O}_\varphi} \geqslant C(\omega_\varphi + \omega_\varphi \circ \psi_{\mathbb{X}})$ и $\log\varphi$ "почти лежит" в $\mathbb{X}$, что сделает нашу оценку неулучшаемой. Но прежде введем для удобства еще один параметр. Обозначим через $\mathcal{I}_{\mathbb{X}}(v) = 1 + \log\Phi_{\mathbb{X}}(v)/\log v,\ v < 1$, *показатель падения гладкости* в задаче. Прежде чем построить обещанный пример, обсудим пространства с заданным показателем падения гладкости.

2.1. Пространства с заданным показателем падения гладкости. Итак, параметры падения гладкости зависят *только* от фундаментальной функции. Хорошо известно описание *всех* симметричных пространств с заданной фундаментальной функцией. А именно, пусть пространство $\mathbb{X}$ обладает вогнутой фундаментальной функцией $\Phi_{\mathbb{X}}$. Определим пространства Лоренца $\Lambda(\mathbb{X})$ и $M(\mathbb{X})$ при помощи следующих функциональных норм:

$$\|f\|_{M(\mathbb{X})} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\Phi_{\mathbb{X}}(t)\},\ \|f\|_{\Lambda(\mathbb{X})} = \int\limits_0^\infty f^*(s)d\Phi_{\mathbb{X}}(s).$$

Оба этих пространства имеют фундаментальную функцию, равную $\Phi_{\mathbb{X}}$. Кроме того, имеют место вложения

$$\Lambda(\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{X} \hookrightarrow M(\mathbb{X}).$$

Тем самым, пространства Лоренца $\Lambda(\mathbb{X})$ и $M(\mathbb{X})$ –*наименьшее* и *наибольшее* соответственно симметричные пространства с фундаментальной функцией $\Phi_{\mathbb{X}}$.

2.2. Точность оценок падения гладкости. Мажоранта в приведенных выше оценках средних осцилляций (а как следствие, и модуля непрерывности, если перейти к глобальному случаю) внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ хуже, чем у исходной функции φ. Пример В. П. Хавина (см. [5]) показывает, что в случае $\log\varphi \in L^1$ результат неулучшаем. Оказывается, что тот же пример демонстрирует точность результата и в нашем случае.

Рассмотрим некоторое симметричное пространство $\mathbb{X}$ и соответствующую функцию падения гладкости $R_{\mathbb{X}}$. Сейчас мы построим пример функции $\varphi \in \mathrm{Lip}_\omega$, с логарифмом из $\mathbb{X}$, и соответствующую ей внешнюю функцию $\mathcal{O}_\varphi$, для которой

$$\omega_{\mathcal{O}_\varphi}(\delta) \geqslant C\omega(R_{\mathbb{X}}^{-1}(\delta)).$$

Некоторые детали мы опустим, но их можно восстановить из статьи [5]. Введем ограничения, ставшие уже стандартными по ходу статьи. Будем считать, что фундаментальная функция $\Phi_{\mathbb{X}}$ вогнута. Кроме того, вместо пространства $\mathbb{X}$ будем рассматривать пространство $M(\mathbb{X})$ (так как оно наибольшее с данной фундаментальной функцией, а только она и играет роль в задаче). Функцию φ будем искать в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} \omega(|x|), & -\frac{\pi}{4} < x \leqslant 0 \\ \exp(-\nu(x)), & 0 < x < -\frac{\pi}{4} \end{cases},$$

где ν – некоторая (пока неизвестная) неотрицательная убывающая дифференцируемая функция. Отметим, что значения функции ν на остальной части отрезка $[-\pi,\pi]$ нам не сильно важны. Из дальнейших рассуждений будет легко усмотреть, что $\varphi \in \mathrm{Lip}_\omega$. С условием $\log\varphi \in M(\mathbb{X})$ ситуация более сложная. Будем подбирать параметры конструкции так, чтобы и левая и правая части (относительно точки 0) функции $\log\varphi$ принадлежали пространству $M(\mathbb{X})$.

1) Условие $\nu \in M(\mathbb{X})$ означает, что $\sup_u \nu^{**}(u)\Phi_{\mathbb{X}}(u) < \infty$. Отметим, что $\nu^* = \nu$ и перепишем это условие в виде

$$\sup_u \frac{\Phi_{\mathbb{X}}(u)}{u}\Big(\int_0^u \nu(v)dv\Big) < \infty. \qquad (5)$$

2) Второе условие $\log\omega \in M(\mathbb{X})$ внесет некоторое ограничения на пространство $\mathbb{X}$. Отметим, что оно следует из условия

$$(\chi_{(0,1)}\log x) \in \mathbb{X}.$$

Поскольку $(\log x)^{**} = 1 + \log(1/x)$, это условие принимает вид

$$\sup_u \Phi_{\mathbb{X}}(u)\Big(1 + \log\frac{1}{u}\Big) < \infty.$$

Иначе его можно переписать так:

$$\boxed{\Phi_{\mathbb{X}}(u) = O\Big(\Big(1 + \log\frac{1}{u}\Big)^{-1}\Big),\ u \to 0+}.$$

Отметим, что справа стоит фундаментальная функция пространства $L_{\exp}$, которая вскоре понадобится нам по другому поводу.

Воспользовавшись рассуждениями из [5], произвольной точке x сопоставим точку x' так, чтобы $\mathcal{H}\log\varphi(x) = \pi + \mathcal{H}\log\varphi(x')$ и

$$x - x' \leqslant Cx^2\Big(\int\limits_0^x \nu(s)ds\Big)^{-1}.$$

Для этого потребуется, согласно [5], ужесточить требования на ν, а именно $\nu(x) > x^{-1/2}$, $\nu'(x) = o(x^{-2})$, $x \to 0+$. Теперь комбинируем эту оценку с условием (5). Но прежде отбросим случай L^1, который нам не интересен (в нем уже все построено). Т.е. $M(\mathbb{X}) \neq L^1$, что на языке фундаментальных функций (например, см. [1]) означает $\lim_{t\to 0+} t/\Phi_{\mathbb{X}}(t) = 0$. Легко понять, что тогда найдется функция ν, удовлетворяющая *всем* ограничениям, такая, что

$$\frac{u}{\Phi_{\mathbb{X}}(u)} = o\Big(\int\limits_0^u \nu(v)dv\Big),\ u \to 0+\,.$$

Значит,

$$x - x' \leqslant Cx^2\frac{\Phi_{\mathbb{X}}(x)}{x} = CR_{\mathbb{X}}(x).$$

Отсюда

$$\frac{|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(x')|}{\omega(R_{\mathbb{X}}(|x-x'|))} \geqslant \frac{\omega(x)}{\omega(Cx)} \geqslant \frac{1}{C},$$

для достаточно малых $x > 0$. Таким образом, пример построен.

На самом деле (см. [5]) построенная функция допускает более точную оценку снизу, а именно

$$\omega_{\mathcal{O}_\varphi}(\delta) \geqslant C\Big(\omega(R_{\mathbb{X}}^{-1}(\delta)) + \int\limits_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}du + \delta\int\limits_\delta \frac{\omega(u)}{u^2}du\Big).$$

2.3. Примеры симметричных пространств. Приведем примеры вычисления показателя падения гладкости для конкретных симметричных пространств (помимо пространств $\Lambda(\Phi)$).

Пространства Лоренца $L^{p,q}$.

Определение 2.1. Пусть заданы параметры $0 < p, q \leqslant \infty$. *Пространство Лоренца* $L^{p,q}$ состоит из всех измеримых функций f, для которых конечны

$$\|f\|_{p,q} = \Big(\int\limits_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}, \ 0 < q < \infty; \ \|f\|_{p,\infty} = \sup_{0<t<\infty} (t^{1/p} f^*(t)).$$

При $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ или $p = q = \infty$ пространство $L^{p,q}$ будет симметричным. Заметим, что $L^{p,p} = L^p$ и $L^{p,q} \hookrightarrow L^{p,r}$, $q \leqslant r$. Кроме того, при $p > 1$ пространства Лоренца $\Lambda(L^p)$ и $M(L^p)$ совпадают с $L^{p,1}$ и $L^{p,\infty}$ соответственно. Стало быть, показатель падения гладкости для этого пространства – такой же, как у L^p.

Пространства Зигмунда $L\log L$ и $L_{\exp}$.

Нормируем меру Лебега на $[-\pi, \pi]$, превратив ее в вероятностную. Тогда мы можем определить пространства Зигмунда.

Определение 2.2. *Пространства Зигмунда* $L\log L$ и $L_{\exp}$ состоят из измеримых функций f, для которых конечна соответствующая норма

$$\|f\|_{L\log L} = \int\limits_0^1 f^*(t) \log\Big(\frac{1}{t}\Big) dt; \ \|f\|_{L_{\exp}} = \sup_{0<t<1} \frac{f^{**}(t)}{1 + \log\frac{1}{t}}.$$

В такой нормировке имеют место вложения

$$L^\infty \hookrightarrow L_{\exp} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L\log L \hookrightarrow L^1.$$

Пространство $L\log L$ является Λ-пространством Лоренца с выпуклой фундаментальной функцией $\Phi_{L\log L}(u) = u(1 + \log(1/u))$, а пространство $L_{\exp}$ является M-пространством Лоренца с квазивогнутой фундаментальной функцией $\Phi_{L_{\exp}}(u) = (1 + \log(1/u))^{-1}$. Поэтому мы можем вычислить для этих пространств показатели падения гладкости, введенные в замечании 2.1:

$$\mathcal{I}_{L\log L}(u) = 2 - \frac{\log\Big(1 + \log\frac{1}{u}\Big)}{\log u}, \ \mathcal{I}_{L_{\exp}}(u) = 1 + \frac{\log\Big(1 + \log\frac{1}{u}\Big)}{\log u}, \ u < 1.$$

Заметим, что $\lim\limits_{u\to 0+} \mathcal{I}_{L\log L}(u) = 2$, $\lim\limits_{u\to 1-} \mathcal{I}_{L\log L}(u) = 1$, $\lim\limits_{u\to 0+} \mathcal{I}_{L_{\exp}}(u) = 1$, $\lim\limits_{u\to 1-} \mathcal{I}_{L_{\exp}}(u) = 2$.

§3. Доказательство основных результатов

Рассуждения будут похожи на некоторые вычисления из [9], §§1,2.

3.1. Подготовка. Среднее функции f по промежутку J будем обозначать символом $\langle f\rangle_J$. Без ограничения общности считаем, что точка, в которой измеряется гладкость, есть точка 0 (как и раньше, мы перешли с окружности на прямую). Рассмотрим мажоранту ω из условия (SCM) на гладкость функции φ. Обозначим через $\widetilde{\omega}$ функцию, почти обратную к ω, т.е. $\widetilde{\omega}(s)=\inf\{t\colon \omega(t)=s\}$. Полезно отметить, что $\omega\circ\widetilde{\omega}=id$. Далее, если $\varphi(0)\neq 0$, то

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)\left(1-\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\varphi(0)}\right)\geqslant\frac{\varphi(0)}{2}$$

всякий раз, когда x принадлежит промежутку $J\in\mathcal{I}_0$, длина которого не превосходит некоторого порога $\mathcal{A}\asymp\widetilde{\omega}(\varphi(0))$. Отсюда следует, что значение $\varphi(0)$ ограниченно сверху постоянной, которая зависит только от условий (SCM) и пространства $\mathbb{X}$. Поделив на эту постоянную, мы можем считать, что $\boxed{\varphi(0)\leqslant 1}$.

Более того, всякий раз, когда $|J|\leqslant\mathcal{A}$, имеют место следующие оценки:

$$|\log\varphi(x)-\log\varphi(0)|\leqslant C\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\varphi(0)}\leqslant C\frac{\omega(|J|)}{\varphi(0)},\quad x\in J,\tag{L1}$$

$$\langle|\log\varphi-\log\varphi(0)|\rangle_J\leqslant C\frac{\langle|\varphi-\varphi(0)|\rangle_J}{\varphi(0)}\leqslant C\frac{\omega(|J|)}{\varphi(0)}.\tag{L2}$$

3.2. Оценки средних осцилляций. Фиксируем промежуток $I\in\mathcal{I}_0$. Положим $u(s)=\log\varphi(s)-\log\varphi(0)$. Заметим, что $\mathcal{H}(\log\varphi)=\mathcal{H}(u)$, так как оператор $\mathcal{H}$ обнуляется на постоянных функциях. В качестве постоянной приближения внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ возьмем $c_I=\varphi(0)\exp(ic_{0,I})$, где $c_{0,I}=\int\limits_{\mathbb{T}\setminus 2I}K(s,0)u(s)ds$, а $K(s,t)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}$ – ядро оператора гармонического сопряжения. Имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi,I,c_I)&\leqslant\Omega_{\mathbb{W}}(\varphi,I,\varphi(0))+\varphi(0)\frac{\|v_1\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}+\varphi(0)\frac{\|v_2\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}\\&\leqslant\omega(|I|)+\varphi(0)\frac{\|v_1\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}+\varphi(0)\frac{\|v_2\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}},\end{aligned}\tag{6}$$

где $v_1(x)=|\exp(i\mathcal{H}(u\chi_{2I})(x))-1|$ и $v_2(x)=|\exp(i(\mathcal{H}(u\chi_{\mathbb{T}\setminus 2I})-c_{0,I}))-1|$. "Простое" неравенство

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \leqslant \omega(|I|) + 4\varphi(0) \tag{7}$$

мы можем получить уже сейчас, так как $|v_1|, |v_2| \leqslant 2$. Это неравенство позволяет нам исключить из рассмотрения случай $\varphi(0)=0$, ибо тогда $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \leqslant \omega(|I|)$, что и требовалось в этом случае.

Оценим теперь два последних слагаемых справа в (6) другим способом. Эти слагаемые суть не что иное, как средние по промежутку I в норме пространства $\mathbb{W}$ (с точностью до множителя $\varphi(0)$). Каждое из них будет оценено по-своему. Однако прежде мы отметим, что если $|I| \geqslant \mathcal{A}$ (величину $\mathcal{A}$ мы выбрали достаточно малой), то оценка (7) позволяет нам утверждать, что $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \leqslant C(\varphi(0),\omega)\omega(|I|)$. Таким образом нам осталось лишь рассмотреть случай $\boxed{|I| \leqslant \mathcal{A}}$.

Оценка пространственного среднего функции v_1. Заметим, что $|v_1(x)| \leqslant C|\mathcal{H}(u\chi_{2I})|$. Кроме того, согласно оценке (L1), $u\chi_{2I} \in L^\infty$ и $\|u\chi_{2I}\|_{L^\infty} \leqslant C(\varphi(0))^{-1}\omega(2|I|)$. В частности, последнее позволяет утверждать, что $u\chi_{2I} \in \mathbb{W}$, что делает дальнейшие рассуждения корректными.

Итак, пространство $\mathbb{W}$ удовлетворяет условию (B), а значит оператор $\mathcal{H} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ ограничен. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(0)\frac{\|v_1\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} &\leqslant C(\mathcal{H})\varphi(0)\frac{\|u\chi_{2I}\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} \\ &\leqslant C(\mathcal{H})\omega(2|I|)\frac{\|\chi_{2I}\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} \leqslant 2C(\mathcal{H})\omega(2|I|).\end{aligned} \tag{8}$$

Оценка пространственного среднего функции v_2. Фиксируем точку $x \in I$. Применим стандартные рассуждения, связанные с сингулярным интегральным оператором $\mathcal{H}$. А именно, пусть L – наибольшее натуральное число, для которого $2^L I \subset [-\pi,\pi]$. Разобьем множество $\mathbb{T} \setminus 2I$ на множества вида $2^{j+1}I \setminus 2^j I$, $j = 1 \dots L-1$, и остаток $\mathcal{R} = [-\pi,\pi] \setminus 2^L I$. Далее воспользуемся тем, что

$$\left|\operatorname{ctg}\Big(\frac{s-t}{2}\Big) - \operatorname{ctg}\Big(\frac{s}{2}\Big)\right| \leqslant C\frac{|t|}{s^2}, \text{ при } s \notin 2I,\ t \in I, \tag{9}$$

с постоянной C, не зависящей от промежутка I. Тогда

$$|v_2(x)| \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{L-1} \int\limits_{2^{j+1}I\setminus 2^j I} \frac{|x|}{s^2}|u(s)|ds + \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{|x|}{s^2}|u(s)|ds\Big)$$
$$\leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{L} \int\limits_{2^{j+1}I\setminus 2^j I} \frac{|x|}{s^2}|u(s)|ds\Big);$$

последняя оценка верна ввиду периодичности функции φ. Мы пришли к следующей промежуточной оценке:

$$|v_2(x)| \leqslant C\sum_{j=1}^{L} \frac{|I|}{2^j|I|}\langle|u|\rangle_{2^{j+1}I}.$$

Неравенство (L2) позволяет нам оценить средние $\langle|u|\rangle_{2^{j+1}I}$ должным образом на тех промежутках, что не достигли порога $\mathcal{A}$. В связи с этим, разобьем множество индексов, по которому ведется суммирование, на две части: $j = 1\ldots K$, где $K \asymp \log_2(\mathcal{A}/|I|)$ – наибольший номер, для которого $2^{K+1}|I| \leqslant \mathcal{A}$, и остаток – $j = K+1\ldots L$. Так первая часть суммы, согласно (L2), допускает оценку

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|I|}{2^j|I|}\langle|u|\rangle_{2^{j+1}I} \leqslant C(\varphi(0))^{-1}|I|\sum_{j=1}^{K}\frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|}.$$

Для оценки второй части суммы, разобьем каждый из промежутков на два множества: “хорошее” $G := \{\ s \mid \varphi(s) \geqslant \varphi(0)\ \}$ и “плохое” $B := \{\ s \mid \varphi(s) < \varphi(0)\ \}$. На множествах $2^{j+1}I \cap G$ по-прежнему верна оценка (L2), что просто добавит слагаемых в написанную выше оценку первой части суммы (суммирование распространится до L вместо K). На “плохом” подмножестве имеет место оценка $|u(s)| \leqslant |\log\varphi(s)|$, что позволяет, используя (1) и (2), написать

$$\frac{1}{2^{j+1}|I|}\int\limits_{2^{j+1}I\cap B}|u| \leqslant \frac{1}{2^{j+1}|I|}\int\limits_{2^{j+1}I}|\log\varphi|$$
$$\leqslant \|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}\frac{\|\chi_{2^{j+1}I}\|_{\mathbb{X}'}}{2^{j+1}|I|} = \frac{\|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}}{\|\chi_{2^{j+1}I}\|_{\mathbb{X}}}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|v_2(x)| \leqslant C(\omega, \|\log\varphi\|_{\mathbb{X}})\Big(\frac{|I|}{\varphi(0)}\sum_{j=1}^{L}\frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|} + \frac{|I|}{\mathcal{A}\Phi_{\mathbb{X}}(\mathcal{A})}\sum_{j=K+1}^{L}\frac{1}{2^{j-K}}\Big).$$

Первая сумма в скобках справа мажорируется должным образом в силу условия регулярности (RG). Действительно,

$$|I|\int\limits_{2^j|I|}^{2^{j+1}|I|}\frac{\omega(u)}{u^2}\,du \geqslant |I|\omega(2^j|I|)\frac{1}{u}\Big|_{2^{j+1}|I|}^{2^j|I|} = C\;|I|\frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|};$$

$$|I|\sum_{j=1}^{L}\frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|} \leqslant C|I|\int\limits_{|I|}^{2\pi}\frac{\omega(u)}{u^2}\,du \leqslant C_{(RG)}\omega(|I|).$$

Таким образом, окончательная оценка среднего функции v_2 примет вид

$$\varphi(0)\frac{\|v_2\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} \leqslant C(\omega, \|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}, (RG))\Big(\omega(|I|) + \frac{\varphi(0)|I|}{\mathcal{A}\Phi_{\mathbb{X}}(\mathcal{A})}\Big). \tag{10}$$

Собрав все оценки воедино, получаем промежуточную оценку

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \leqslant C(\omega, \|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}, (RG), (B))\Big(\omega(|I|) + \frac{\varphi(0)|I|}{\mathcal{A}\Phi_{\mathbb{X}}(\mathcal{A})}\Big). \tag{11}$$

3.3. Анализ оценок (7) и (11). Выделим слагаемое $\boxed{\varphi(0)}$ из оценки (7) и слагаемое $\boxed{\varphi(0)|I|/\mathcal{A}\Phi_{\mathbb{X}}(\mathcal{A})}$ из оценки (11). Введем промежуточную функцию ψ, которая будет играть роль кандидата на показатель падения гладкости. Возможны два случая.

1) Если $\psi(|I|) > \mathcal{A}$, то из оценки (7) получаем

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \leqslant \omega(|I|) + C\omega(\psi(|I|)).$$

2) Если $\psi(|I|) \leqslant \mathcal{A}$, то в этом случае ключевую роль сыграет выделенное слагаемое из оценки (11). Действительно, вспомнив, что $\varphi(0) \leqslant C\omega(\mathcal{A})$, напишем

$$|I|\frac{\varphi(0)}{\mathcal{A}}\frac{1}{\Phi_{\mathbb{X}}(\mathcal{A})} \leqslant C|I|\frac{\omega(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}\frac{1}{\Phi_{\mathbb{X}}(\mathcal{A})} \leqslant C\frac{|I|}{\psi(|I|)\Phi_{\mathbb{X}}(\psi(|I|))}\omega_{\mathbb{X}}(\psi(|I|))\boxed{\leqslant}.$$

Рассмотрим функцию $R(v) := v\Phi_{\mathbb{X}}(v)$. Легко заметить, что она обратима и непрерывна. Тогда, если взять $\psi = R^{-1}$, то можно продолжить начатую выше оценку следующим образом: $\boxed{\leqslant} C\omega(\psi(|I|))$.

Таким образом, доказательство теоремы 2.1 завершено.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. В. Кислякову за многочисленные плодотворные обсуждения задачи и помощь при составлении текста данной работы.

Литература

1. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators.* — Academic Press, (1988).
2. Г. Я. Бомаш, *Множества пика для аналитических классов Гельдера.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **17** (1987), 129–136.
3. D. W. Boyd, *A class of operators on the Lorentz spaces* $M(\Phi)$. — Canad. J. Math. **19** (1967), 839–841.
4. K. M. Dyakonov, *Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions.* — Acta Mathematica, **178**, No. 2 (1997), 143–167.
5. В. П. Хавин, *Обобщение теоремы Привалова–Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции.* — Изв. Акад. наук Армянской ССР, серия Математика **6** (1971), 252–258, 265–287.
6. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семёнов, *Интерполяция линейных операторов.* — М., (1978).
7. Н. А. Широков, *Достаточные условия для гельдеровской гладкости функции.* — Алгебра и анализ, **25**, No. 3 (2013).
8. S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes.* — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, **19**, No. 4 (1965), 593–608.
9. А. В. Васин, С. В. Кисляков, А. Н. Медведев, *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля.* — Алгебра и анализ, **25**, No. 3 (2013).

Medvedev A. N. Drop of the smoothness of an outer function compared to the smoothness of its modulus, under restrictions on the size of boundary values.

Let F be an outer function on the unit disk. It is well known that its smootheness properties may be two times worse that those of the modulus of its boundary values, but under some restrictions on $\log|F|$ this gap becomes smaller. It is shown that the smoothness decay admits a convenient description in terms of a rearrangement invariant Banach function space containing $\log |F|$. All results are of pointwise nature.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
191023, наб. р. Фонтанки, 27,
Санкт-Петербург, Россия,
Санкт-Петербургский
электротехнический университет,
197376, ул. проф. Попова, д.5,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alkomedvedev@gmail.com

Поступило 31 августа 2015 г.