Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

А. Б. Зайцев

О ВЗАИМНОЙ ОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ НА ПЛОСКОСТИ

§1. Введение

Пусть
$$L = \overline{\partial}\partial_\beta, \tag{1}$$
где $\overline{\partial}$ — оператор Коши–Римана, а $\partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x} + \beta i \frac{\partial}{\partial y}$, $-1 < \beta < 0$. В данной работе исследуются свойства решений задачи Дирихле для уравнения
$$Lu = 0 \tag{2}$$
в единичном круге на плоскости $\mathbb{C}$.

Рассматривается следующая задача.

Задача 1. *Пусть функция Φ непрерывна на границе ∂B открытого единичного круга B и отображает ∂B на некоторый замкнутый контур Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации. Найти условия на функцию Φ, при которых решение задачи Дирихле для уравнения (2) в B с граничной функцией Φ взаимно однозначно отображает B на область D, ограниченную контуром Γ.*

Необходимо отметить, что задача Дирихле для уравнения (2) разрешима для любой функции Φ, непрерывной на ∂B ([1, теорема 7.4]).

Для гармонических функций имеет место следующая теорема Радо–Кнезера–Шоке ([2, с. 33]).

Пусть функция Φ непрерывна на ∂B и отображает ∂B на некоторый выпуклый замкнутый контур Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации. Тогда гармоническое продолжение функции Φ в B взаимно однозначно отображает B на область D, ограниченную контуром Γ.

Ключевые слова: эллиптический оператор, единичный круг, задача Дирихле, взаимно однозначное отображение.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 12-01-00434-а).

Из ([3, теорема 1.4]) следует, что при $\beta \neq -1$ для любого замкнутого контура Γ существует функция Φ, непрерывная на ∂B и отображающая ∂B на Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации, для которой решение задачи Дирихле для уравнения (2) не является взаимно однозначным в B.

В работе автора [4, теорема 2] доказано, что если функция Φ непрерывно дифференцируема на ∂B, отображает ∂B на гладкий жорданов контур Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации, и при этом коэффициенты Фурье функции Φ относительно системы функций $\{e^{int}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют некоторому специальному условию, то решение задачи Дирихле для уравнения (2) в B с граничной функцией Φ взаимно однозначно отображает B на область D, ограниченную контуром Γ.

§2. Основные результаты и их доказательство

Введем следующие обозначения. Пусть $z_\beta = x + \frac{i}{\beta}y = \frac{\beta+1}{2\beta}z + \frac{\beta-1}{2\beta}\overline{z}$. Определим линейное отображение T_β плоскости $\mathbb{C}$ по формуле $T_\beta(z) = z_\beta$.

Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2) в единичном круге B, непрерывна на $\overline{B}$, $\Phi(t) = u(e^{it}), t \in [0; 2\pi]$. Тогда при $z \in B$ имеет место следующее интегральное представление функции $u(z)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\left(z\int_0^{2\pi}\frac{\Phi(t)((\beta-1)-(\beta+1)e^{2it})dt}{(e^{it}-z)((\beta-1)-(\beta+1)e^{it}z)} - \int_0^{2\pi}\frac{\Phi(t)((\beta+1)e^{it}-(\beta-1)e^{-it})dt}{(\beta+1)e^{it}+(\beta-1)e^{-it}-2\beta z_\beta}\right). \tag{3}$$

Приведем схему доказательства формулы (3). Предположим сначала, что $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2) в замкнутом круге $\overline{B}$. Тогда

$$u(z) = f(z) + f_\beta(z_\beta), \tag{4}$$

где функции f и f_β голоморфны в некоторых окрестностях замкнутых областей $\overline{B}$ и $T_\beta(\overline{B})$ соответственно, $f(0) = 0$.

Формула (3) следует из разложения

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^n c_{-n}\right)z^n$$

при $z \in B$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(t)e^{-int}dt, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

([4, с. 724]) и из равенств

$$f_\beta(z_\beta) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f_\beta(T_\beta(e^{it}))dT_\beta(e^{it})}{T_\beta(e^{it}) - z_\beta}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})dT_\beta(e^{it})}{T_\beta(e^{it}) - z_\beta} = 0$$

при $z \in B$.

В общем случае формула (3) следует из слабого принципа максимума для решений данного уравнения в единичном круге ([1, теорема 7.4]).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть функция $u(e^{it})$ отображает единичную окружность ∂B на замкнутую спрямляемую жорданову кривую Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существует $\sigma > 0$, такое, что, если $|e^{it_2} - e^{it_1}| \leqslant \sigma$, то $|u(e^{it_2}) - u(e^{it_1})| \geqslant |e^{it_2} - e^{it_1}|$,*

2) $\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} \frac{du(e^{it})}{e^{it}-z}\right| < \frac{\beta^2}{2}$ *при всех $z \notin \overline{B}$.*

Тогда, если функция $u(z)$ — решение задачи Дирихле для уравнения (2) в единичном круге B с граничной функцией $u(e^{it})$, то $u(z)$ взаимно однозначно отображает B на область D, ограниченную кривой Γ.

Доказательство. Из [4, предложение 1] и условия теоремы следует, что достаточно доказать, что $I_u(z) = |\frac{\partial u(z)}{\partial z}|^2 - |\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}}|^2 > 0$ при всех $z \in B$. Представляя $u(z)$ в виде (4), аналогично [4, стр. 720] получаем, что последнее условие эквивалентно неравенству

$$\left|\frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} + \frac{1+\beta}{2}\right| < \frac{1-\beta}{2}.$$

Для доказательства данного неравенства, в свою очередь, достаточно доказать, что $|f'(z)| > \frac{1}{1-\beta}$, $|f'_\beta(z_\beta)| < \frac{\beta^2}{1-\beta}$ при всех $z \in B$.

Обозначим $\Phi(t) = u(e^{it}), t \in [0; 2\pi]$. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *При введенных выше обозначениях функции $f'(z)$ и $f'_\beta(z_\beta)$ имеют почти всюду на ∂B некасательные предельные значения, которые мы обозначим соответственно через $f'(e^{it_0})$ и $f'_\beta(T_\beta(e^{it_0}))$. При этом почти всюду на ∂B имеют место равенства*

$$ie^{it_0} f'(e^{it_0}) + i\left(\frac{\beta+1}{2\beta}e^{it_0} - \frac{\beta-1}{2\beta}e^{-it_0}\right) f'_\beta(T_\beta(e^{it_0})) = \Phi'(t_0), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\beta+1}{2\beta}e^{it_0} - \frac{\beta-1}{2\beta}e^{-it_0}\right) f'_\beta(T_\beta(e^{it_0})) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{1-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{i(t+t_0)}} \\ = \lim_{\substack{z\to e^{it_0},\\ z\notin \overline{B}}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{z-e^{it}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Из формулы (3) следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} z \int\limits_0^{2\pi} \frac{\Phi(t)((\beta-1)-(\beta+1)e^{2it})dt}{(e^{it}-z)((\beta-1)-(\beta+1)e^{it}z)},$$

$$f_\beta(z_\beta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Phi(t)((\beta+1)e^{it}-(\beta-1)e^{-it})dt}{(\beta+1)e^{it}+(\beta-1)e^{-it}-2\beta z_\beta}.$$

Найдем производные данных функций:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Phi(t)e^{it}dt}{(e^{it}-z)^2} - \frac{\beta+1}{\beta-1}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Phi(t)e^{it}dt}{(1-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{it}z)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(-\int\limits_0^{2\pi} \Phi(t) d\frac{1}{e^{it}-z} - \frac{1}{z}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(t) d\frac{1}{1-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{it}z}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{e^{it}-z} + \frac{1}{z}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{1-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{it}z}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_\beta(z_\beta) &= -\frac{\beta}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\Phi(t)((\beta+1)e^{it}-(\beta-1)e^{-it})dt}{((\beta+1)e^{it}+(\beta-1)e^{-it}-2\beta z_\beta)^2} \\
&= \frac{\beta}{\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(t)d\frac{1}{(\beta+1)e^{it}+(\beta-1)e^{-it}-2\beta z_\beta} \\
&= -\frac{\beta}{\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{(\beta+1)e^{it}+(\beta-1)e^{-it}-2\beta z_\beta}.
\end{aligned}$$

Так как функция

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{e^{it}-z}$$

принадлежит классу H_p ([5, стр. 94]) при $0 < p < 1$, то она почти всюду на ∂B имеет некасательные предельные значения ([5, стр. 82]), при этом для почти всех $t_0 \in [0, 2\pi]$ имеет место равенство (см. [5, стр. 194])

$$\begin{aligned}
f'(e^{it_0}) &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{e^{it}-e^{it_0}}+\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-it_0}d\Phi(t)}{1-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{i(t+t_0)}}\right)-\frac{i}{2}e^{-it_0}\Phi'(t_0) \\
&= \frac{(e^{i(t-t_0)}-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{i(t+t_0)})d\Phi(t)}{(e^{it}-e^{it_0})(1-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{i(t+t_0)})}-\frac{i}{2}e^{-it_0}\Phi'(t_0) \\
&= \frac{((\beta+1)e^{it_0}-(\beta-1)e^{-it_0})}{2\pi i} \\
&\quad\times\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-it_0}d\Phi(t)}{(\beta+1)(e^{it}-e^{it_0})+(\beta-1)(e^{-it}-e^{-it_0})}-\frac{i}{2}e^{-it_0}\Phi'(t_0).
\end{aligned}$$

Так как сингулярный интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{(\beta+1)(e^{it}-e^{it_0})+(\beta-1)(e^{-it}-e^{-it_0})}$$

сходится при почти всех $t_0 \in [0,2\pi]$, то, снова используя [5, стр.194], для почти всех $t_0 \in [0,2\pi]$ имеем

$$f'_\beta(T_\beta(e^{it_0})) = -\frac{\beta}{\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{(\beta+1)(e^{it}-e^{it_0})+(\beta-1)(e^{-it}-e^{-it_0})} + \frac{\beta}{i((\beta+1)e^{it_0}-(\beta-1)e^{-it_0})}\Phi'(t_0).$$

Из двух последних равенств получаем (5).

Из (5) следует, что

$$\frac{e^{it_0}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{e^{it}-e^{it_0}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{1-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{i(t+t_0)}} + \frac{1}{2}\Phi'(t_0) + i\left(\frac{\beta+1}{2\beta}e^{it_0} - \frac{\beta-1}{2\beta}e^{-it_0}\right) f'_\beta(T_\beta(e^{it_0})) = \Phi'(t_0).$$

Так как

$$\lim_{\substack{z\to e^{it_0},\\ z\notin \overline{B}}} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{e^{it}-z} = e^{it_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{e^{it}-e^{it_0}} - \frac{\Phi'(t_0)}{2}$$

для почти всех $t_0 \in [0,2\pi]$, то получаем (6). Лемма доказана. □

Оценим функции $f'(e^{it_0})$ и $f'_\beta(T_\beta(e^{it_0}))$.

Так как $\int_0^{2\pi} d\Phi(t) = 0$, то существует конечный предел

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^2}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{z-e^{it}}.$$

Отсюда и из условия теоремы выводим, что

$$\left|\frac{z^2}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{z-e^{it}}\right| < \frac{\beta^2}{2}$$

при всех $z \notin \overline{B}$.

Поэтому

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{1-\frac{\beta+1}{\beta-1}e^{i(t+t_0)}}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\frac{\beta-1}{\beta+1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{e^{it}-\frac{\beta-1}{\beta+1}e^{-it_0}}\right| < \frac{\beta^2}{2}\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем:

$$\left|\frac{\beta+1}{2\beta}e^{it_0}-\frac{\beta-1}{2\beta}e^{-it_0}\right| |f'_\beta(T_\beta(e^{it_0}))| < \frac{\beta^2}{1-\beta}$$

для почти всех $t_0 \in [0, 2\pi]$.

Так как $1 \leqslant \left|\frac{\beta+1}{2\beta}e^{it_0}-\frac{\beta-1}{2\beta}e^{-it_0}\right| \leqslant -\frac{1}{\beta}$, то $|f'_\beta(T_\beta(e^{it_0}))| < \frac{\beta^2}{1-\beta}$ для почти всех $t_0 \in [0, 2\pi]$.

Из условия теоремы вытекает, что $|\Phi'(t_0)| \geqslant 1$. Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned}|f'(e^{it_0})| &\geqslant |\Phi'(t_0)| - \left|\frac{\beta+1}{2\beta}e^{it_0}-\frac{\beta-1}{2\beta}e^{-it_0}\right| |f'_\beta(T_\beta(e^{it_0}))| \\ &> 1+\frac{1}{\beta}\frac{\beta^2}{1-\beta} = \frac{1}{1-\beta}\end{aligned}$$

для почти всех $t_0 \in [0, 2\pi]$.

Докажем, что полученные оценки функций f' и f'_β сохраняются при всех $z \in B$. Так как функция f'_β принадлежит классу $E_p(T_\beta(B))$, где $0 < p < 1$, то $|f'_\beta(z_\beta)| < \frac{\beta^2}{1-\beta}$ при $z \in B$.

Следовательно, функция f_β непрерывна на $T_\beta(\overline{B})$, и кроме того, $|f_\beta(z_\beta) - f_\beta(z'_\beta)| \leqslant \frac{\beta^2}{1-\beta}|z_\beta - z'_\beta|$ при $z, z' \in B$. Отсюда и из условия теоремы следует, что функция $f(z)$ непрерывна на $\overline{B}$ и абсолютно непрерывна на ∂B.

Рассмотрим функцию $f(z) - f(e^{i\tau}z)$, где τ выбрано так, что $|1 - e^{i\tau}| \leqslant \sigma$. Имеем

$$\begin{aligned}|f(e^{it})-f(e^{i(t+\tau)})| &\geqslant |u(e^{it})-u(e^{i(t+\tau)})|-|f_\beta(T_\beta(e^{it}))-f_\beta(T_\beta((e^{i(t+\tau)}))| \\ &\geqslant \frac{1}{1-\beta}|1-e^{i\tau}|.\end{aligned}$$

Итак, при всех t имеет место неравенство

$$|f(e^{it}) - f(e^{i(t+\tau)})| > |f_\beta(T_\beta(e^{it})) - f_\beta(T_\beta((e^{i(t+\tau)}))|.$$

Обозначим через $\Delta_\gamma \arg(\cdot)$ приращение аргумента соответствущей функции при полном обходе замкнутого жорданова контура γ против часовой стрелки. В силу последнего неравенства имеем

$$\Delta_{\partial B}\arg(f(z)-f(e^{i\tau}z))=\Delta_{\partial B}\arg(u(z)-u(e^{i\tau}z))=2\pi.$$

Следовательно, функция $f(z)-f(e^{i\tau}z)$ имеет в B единственный ноль первого порядка в точке $z=0$. Поэтому при $0<r<1$ имеет место неравенство

$$|f(re^{it})-f(re^{i(t+\tau)})|>\frac{r}{1-\beta}|1-e^{i\tau}|.$$

Но тогда $\left|\frac{\partial f(re^{it})}{\partial t}\right|\geqslant\frac{r}{1-\beta}$ при $0<r<1$. Отсюда следует, что $|f'(re^{it})|\geqslant\frac{r}{1-\beta}$ при $0<r<1$, $t\in[0,2\pi]$. Так как функция $f(z)-f(e^{i\tau}z)$ имеет в точке $z=0$ ноль первого порядка, то $f'(0)\neq 0$.

Так как функция $f(z)$ абсолютно непрерывна на ∂B, то $f'(z)$ принадлежит классу H_1. Из доказанных выше оценок $|f'(e^{it})|\geqslant\frac{1}{1-\beta}$ для почти всех $t\in[0,2\pi]$, $|f'(z)|\geqslant\frac{|z|}{1-\beta}$ при $z\in B\setminus\{0\}$ и того, что $f'(0)\neq 0$, заключаем, что $|f'(z)|\geqslant\frac{1}{1-\beta}$ внутри круга B.

Таким образом, в круге B имеет место неравенство $\left|\frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}\right|<\beta^2$. Но тогда $\left|\frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)}+\frac{1+\beta}{2}\right|<\frac{1-\beta}{2}$ при $z\in B$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что $I_u(z)>0$ в круге B ([4, стр.720]). Итак, u отображает B на D взаимно однозначно. Теорема доказана. □

Приведем пример использования теоремы 1. Пусть

$$u(e^{it})=5(\sqrt{e^{it}-1}-i)+\frac{\beta^2}{4}e^{-it},$$

причем ветвь функции $\sqrt{z-1}$ берется та, для которой $\sqrt{-1}=i$. Так как

$$u(e^{it_2})-u(e^{it_1})=\frac{5(e^{it_2}-e^{it_1})}{\sqrt{e^{it_1}-1}+\sqrt{e^{it_2}-1}}+\frac{\beta^2(e^{it_1}-e^{it_2})}{4e^{i(t_1+t_2)}},$$

то $|u(e^{it_2})-u(e^{it_1})|\geqslant|e^{it_2}-e^{it_1}|$. Кроме того, $|5(\sqrt{e^{it}-1}-i)|\geqslant 5(\sqrt{2}-1)>|\frac{\beta^2}{4}e^{-it}|$. Поэтому приращение аргумента функции $u(z)$ при полном обходе переменной z вдоль ∂B против часовой стрелки равно 2π. Итак, $u(z)$ отображает ∂B взаимно однозначно и с сохранением ориентации. Далее, при всех $z \notin \overline{B}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{du(e^{it})}{e^{it}-z}\right| = \left|-\frac{\beta^2}{4z}\right| < \frac{\beta^2}{4}.$$

По теореме 1 функция $u(z)$, являющаяся решением задачи Дирихле для уравнения (2) в круге B, взаимно однозначно отображает B на некоторую область D.

Приведем пример, показывающий, что условие 2) теоремы 1 является существенным. Пусть $\beta = -\frac{1}{3}$,

$$u(z) = \frac{1}{\frac{1}{5}-\varepsilon}\left(x - \varepsilon iy + \frac{1}{10}(z^3 + \frac{1}{9}z^3_{-\frac{1}{3}})\right),$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{5}$. Тогда $u(z)$ взаимно однозначна и сохраняет ориентацию на ∂B, но не является взаимно однозначной в B (см. [4, пример 1]). При $|z| = 1$ имеем $u(z) = \frac{\frac{2}{5}x + \frac{32}{45}x^3}{\frac{1}{5}-\varepsilon} + iy$. Нетрудно показать, что функция $u(z)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1. В то же время она не удовлетворяет условию 2). Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{du(e^{it})}{e^{it}-z} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{5}-\varepsilon}\left((\frac{1+\varepsilon}{2} - \frac{2}{45})\int\limits_0^{2\pi}\frac{de^{-it}}{e^{it}-z} + \frac{4}{45}\int\limits_0^{2\pi}\frac{de^{-3it}}{e^{it}-z}\right)$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{5}-\varepsilon}\left((\frac{1+\varepsilon}{2} - \frac{2}{45})\frac{1}{z^2} + \frac{4}{15}\frac{1}{z^4}\right)$$

при всех $z \notin \overline{B}$. Если при этом точка z расположена достаточно близко к 1, то данный интеграл по модулю больше $\frac{5}{2}$.

Автор выражает искреннюю благодарность П. В. Парамонову и К. Ю. Федоровскому за внимание к работе и ценные указания.

Литература

1. G. C. Verchota, A. L. Vogel, *Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains.* — Trans. Amer. Math. Soc. **349**, No. 11 (1997), 4501–4535.
2. P. Duren, *Harmonic mappings in the plane.* Cambridge University Press, 2004.
3. G. Alessandrini, V. Nesi, *Elliptic systems and material interpretation.* — Funct. Approx. Comment. Math. **40**, No. 1 (2009), 105–115.
4. А. Б. Зайцев, *Об отображениях решениями эллиптических уравнений второго порядка.* — Матем. заметки **95**, No. 5 (2014), 718–733.

5. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* М.-Л., Гостехиздат, 1950.

Zaitsev A. B. On the univalence of solutions of second order elliptic equations in the unit disk on the plane.

Sufficient conditions on a function continuous on the unit circle are found ensuring that the solution of the Dirichlet problem in the unit disk for a certain second order partial differential equation with this boundary function is a homeomorphism of the unit disk onto a simply connected Jordan domain.

Московский государственный
технический университет радиотехники,
электроники и автоматики.
119454 г. Москва,
Проспект Вернадского, д. 78
E-mail: abzai75@mail.ru

Поступило 20 апреля 2015 г.