Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

О. Л. Виноградов

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СПЛАЙНОВ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ МЕТРИКЕ

§1. Введение

Далее L_2 – пространство измеримых 2π-периодических функций с суммируемым квадратом, $L_2(\mathbb{R})$ – пространство измеримых на $\mathbb{R}$ функций с суммируемым квадратом; нормы в этих пространствах равны

$$\|f\|_2 = \left(\int\limits_E |f|^2\right)^{1/2},$$

где E равно $[-\pi,\pi]$ или $\mathbb{R}$ соответственно. Пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. При $r \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ через $\mathbf{S}_{\lambda r}$ обозначается пространство сплайнов порядка r минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\lambda}$ $(j \in \mathbb{Z})$, то есть таких $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, сужение которых на каждый интервал $\left(\frac{j\pi}{\lambda}, \frac{(j+1)\pi}{\lambda}\right)$ есть многочлен степени не выше r; $\widetilde{\mathbf{S}}_{nr}$ при $n \in \mathbb{N}$ есть пространство 2π-периодических сплайнов из $\mathbf{S}_{nr}$. Центральные разности с шагом h для функции f определяются равенствами

$$\delta_h f(x) = \delta_h^1 f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right), \quad \delta_h^r = \delta_h \circ \delta_h^{r-1};$$

$$\mathcal{K}_m = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(m+1)}}{(2\nu+1)^{m+1}}$$

– константы Фавара.

В работе рассматривается неравенство Бернштейна для сплайнов в пространствах L_2 и $L_2(\mathbb{R})$ с точной постоянной M:

$$\|f'\|_2 \leqslant M\|f\|_2 \tag{1}$$

Ключевые слова: неравенство Бернштейна, экспоненциальные сплайны.

и его усиление

$$\|f'\|_2 \leqslant \frac{M}{2}\|\delta_{\frac{\pi}{n}} f\|_2, \tag{2}$$

а также обобщение этих неравенств на старшие производные и разности.

Точное неравенство (2) для сплайнов в пространстве L_2 установлено В. Ф. Бабенко и С. А. Пичуговым [1, теорема 6.3.6]. Оно было выведено из аналогичного неравенства в пространстве с равномерной нормой. Последнее, в свою очередь, имеет более тонкий характер и опирается на теоремы сравнения и неравенства Колмогорова для производных. В [1] также содержатся другие точные неравенства для производных и разностей периодических сплайнов и исторические комментарии.

В данной работе в §2 дается прямое доказательство неравенства (2). Прямой способ состоит в построении ортогональных базисов в пространствах сплайнов, так чтобы операторы дифференцирования и разности переводили базисные сплайны в базисные. Такие базисы строятся на основе хорошо известных экспоненциальных сплайнов [2, 3]. После этого остается сравнить отношения коэффициентов разложений, для чего удается использовать известные свойства нулей многочленов Эйлера–Фробениуса.

В §3 устанавливается аналогичный результат для сплайнов в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, который, по-видимому, нов. Неравенство (1) для пространств $L_p(\mathbb{R})$ без точной постоянной содержится в [4].

§2. Неравенство типа Бернштейна для периодических сплайнов

Теорема 1. *Пусть n, r, $s \in \mathbb{N}$, $s \leqslant r$, $f \in \widetilde{\mathbf{S}}_{nr}$. Тогда*

$$\|f^{(s)}\|_2 \leqslant \frac{n^s}{2^s}\left(\frac{\mathcal{K}_{2r+1-2s}}{\mathcal{K}_{2r+1}}\right)^{1/2}\|\delta^s_{\frac{\pi}{n}} f\|_2, \tag{3}$$

причем равенство достигается, лишь если $f = \alpha\varphi_{nr} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, где

$$\varphi_{nr}(x) = \frac{2}{\pi n^r}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(2\nu+1)nx}}{(i(2\nu+1))^{r+1}}.$$

Замечание 1. Неравенство (3) можно записать в виде

$$\frac{\|f^{(s)}\|_2}{\|\varphi^{(s)}_{nr}\|_2} \leqslant \frac{\|\delta^s_{\frac{\pi}{n}} f\|_2}{\|\delta^s_{\frac{\pi}{n}}\varphi_{nr}\|_2}.$$

Доказательство. Достаточно доказать неравенство при $s = 1$, после чего общий случай получается по индукции. Как известно (см., например, [1, теорема 6.1.1]), всякий сплайн $f \in \widetilde{\mathbf{S}}_{nr}$ имеет вид

$$f = \beta + \sum_{j=0}^{2n-1} b_j d_{r+1}\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right), \qquad \sum_{j=0}^{2n-1} b_j = 0, \tag{4}$$

где d_{r+1} – ядра Бернулли:

$$d_{r+1}(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ilt}}{(il)^{r+1}}.$$

Перейдя к дискретному преобразованию Фурье, получим

$$f = \beta + \sum_{k=1}^{2n-1} c_k G_k,$$

где

$$c_k = \sum_{j=0}^{2n-1} b_j e^{-\frac{ikj\pi}{n}}, \qquad b_j = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} c_k e^{\frac{ikj\pi}{n}} \quad (c_0 = 0),$$

$$G_k(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(k+2n\nu)x}}{(i(k+2n\nu))^{r+1}}$$

(параметры r и n в обозначениях этих и похожих функций опускаются).

Разность и производная функции f записываются в виде

$$\delta_{\frac{\pi}{n}} f = \sum_{k=1}^{2n-1} c_k \varphi_k, \qquad f' = \sum_{k=1}^{2n-1} c_k \psi_k,$$

где

$$\varphi_k(x) = \delta_{\frac{\pi}{n}} G_k(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{2i\sin\frac{\pi(k+2n\nu)}{2n}}{(i(k+2n\nu))^{r+1}} e^{i(k+2n\nu)x},$$

$$\psi_k(x) = G_k'(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(k+2n\nu)x}}{(i(k+2n\nu))^{r}}.$$

Ввиду ортогональности экспонент, системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{2n-1}$ и $\{\psi_k\}_{k=1}^{2n-1}$ также ортогональны в L_2. Поэтому из равенства Парсеваля сразу следует неравенство

$$\|f'\|_2 \leqslant M\|\delta_{\frac{\pi}{n}} f\|_2$$

с точной константой

$$M = \max_{k\in[1:2n-1]} \frac{\|\psi_k\|_2}{\|\varphi_k\|_2}.$$

Остается доказать, что максимум достигается при $k = n$ (и только при этом k).

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\|\varphi_k\|_2^2 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{4\sin^2\frac{\pi(k+2n\nu)}{2n}}{(k+2n\nu)^{2r+2}} = \frac{4}{n^{2r+2}}\sin^2\frac{k\pi}{2n}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\frac{k}{n}+2\nu)^{2r+2}},$$

$$\frac{1}{2\pi}\|\psi_k\|_2^2 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(k+2n\nu)^{2r}} = \frac{1}{n^{2r}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\frac{k}{n}+2\nu)^{2r}}.$$

Ясно, что нормы не меняются при замене k на $2n-k$. Далее,

$$\frac{\|\psi_k\|_2^2}{\|\varphi_k\|_2^2} = F_r\left(1-\frac{k}{n}\right), \quad \text{где} \quad F_r(u) = \frac{\sum\limits_{\mu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(u+2\mu+1)^{2r}}}{4\cos^2\frac{\pi u}{2}\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(u+2\nu+1)^{2r+2}}}. \tag{5}$$

Функция F_r четна и 2-периодична. Достаточно проверить ее строгое убывание на $[0,1]$. Для этого мы докажем более сильное утверждение.

Лемма 1. *Функция F_r раскладывается в ряд по степеням функции $u \mapsto \cos^2\frac{\pi u}{2}$ с положительными коэффициентами:*

$$F_r(u) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(r)}\cos^{2j}\frac{\pi u}{2}, \quad a_j^{(r)} > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$g_m(y) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(iy+2\nu+1)^m}, \quad m-1\in\mathbb{N}.$$

Легко доказать по индукции, что $g_m(y) = P_m(w)$, где P_m – многочлен степени m относительно переменной $w = \operatorname{th}\frac{\pi y}{2}$, все корни которого простые и лежат на отрезке $[-1,1]$, причем числа -1 и 1 – корни многочлена P_m. Действительно,

$$g_2(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi y}{2}} = 1-w^2,$$

а индукционный переход от m к $m+1$ делается так:

$$g_{m+1}(y) = \frac{i}{m}g_m'(y) = \frac{i}{m}P_m'(w)w_y' = \frac{\pi i}{2m}(1-w^2)P_m'(w).$$

Остается положить

$$P_{m+1}(w) = \frac{\pi i}{2m}(1-w^2)P'_m(w).$$

Утверждение о нулях следует из теоремы Ролля. □

Многочлены $w \mapsto \frac{P_m(w)}{1-w^2}$ (а также некоторые родственные им) называются *многочленами Эйлера–Фробениуса.* Их нули исследовались во многих работах. Нам понадобится следующий факт, установленный в [5]. Обозначим через $w_l^{(r)}$ нули многочленов P_{2r}, лежащие на $(0,1)$:

$$0 < w_1^{(r)} < \ldots < w_{r-1}^{(r)} < 1.$$

Тогда $w_l^{(r+1)} < w_l^{(r)}$ при всех $l \in [1:r-1]$. В силу строгого возрастания y по w то же верно и для нулей $y_l^{(r)}$ функции g_{2r}.

Поэтому

$$\operatorname{ch}^{2r}\frac{\pi y}{2}\, g_{2r}(y) = C_r \prod_{l=1}^{r-1}\left(A_l^{(r)} - \operatorname{ch}^2\frac{\pi y}{2}\right),$$

где $A_l^{(r)} = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi y_l^{(r)}}{2}$, $C_r \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$F_r(u) = \frac{C_r}{4C_{r+2}}\frac{1}{A_r^{(r+1)} - \cos^2\frac{\pi u}{2}}\prod_{l=1}^{r-1}\frac{A_l^{(r)} - \cos^2\frac{\pi u}{2}}{A_l^{(r+1)} - \cos^2\frac{\pi u}{2}},$$

причем $1 < A_l^{(r+1)} < A_l^{(r)}$, а $\frac{C_r}{C_{r+2}} > 0$ в силу положительности функции F_r. Остается учесть, что если $|z| < a < b$, то коэффициенты разложений

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{a^j}, \qquad \frac{b-z}{a-z} = 1 + \frac{b-a}{a-z} = 1 + \frac{b-a}{a}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{a^j}$$

положительны, а произведение степенных рядов с положительными коэффициентами снова есть ряд с положительными коэффициентами.

Применение леммы 1 завершает доказательство теоремы 1. □

Замечание 2. Вместо разложения сплайна по сдвигам ядра Бернулли (4) с одним условием связи можно использовать разложение по сдвигам периодического B-сплайна (ядра Стеклова) или любой другой функции, сдвиги которой на $\frac{j\pi}{n}$ ($j \in [0:2n-1]$) образуют базис пространства $\widetilde{\mathbf{S}}_{nr}$.

§3. Неравенство типа Бернштейна для сплайнов в $L_2(\mathbb{R})$

Для доказательства неравенства (2) в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ мы используем разложение по сдвигам B-сплайна. Небольшое изменение в рассуждении по сравнению с периодическим случаем вызвано тем, что мы не предполагаем включения $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda > 0$, r, $s \in \mathbb{N}$, $s \leqslant r$, $f \in \mathbf{S}_{\lambda r}$, $\delta^s_{\frac{\pi}{\lambda}} f \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда* $f^{(s)} \in L_2(\mathbb{R})$ *и*

$$\|f^{(s)}\|_2 \leqslant \frac{\lambda^s}{2^s} \left(\frac{\mathcal{K}_{2r+1-2s}}{\mathcal{K}_{2r+1}} \right)^{1/2} \|\delta^s_{\frac{\pi}{\lambda}} f\|_2.$$

Неравенство точное.

Доказательство. Как и в теореме 1, достаточно доказать неравенство при $s = 1$, после чего общий случай получается по индукции. Не уменьшая общности, можно считать, что $\lambda = 1$. Общий случай сводится к этому сжатием. Кроме того, для более симметричной записи сделаем сдвиг и будем считать, что узлы сплайна равны $\frac{r\pi}{2} + j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$.

Разложим f по сдвигам симметричного B-сплайна:

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j B_r(x - j\pi),$$

$$B_r(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{2 \sin \frac{\pi y}{2}}{y} \right)^{r+1} e^{iyx}\, dy.$$

Напомним, что $\operatorname{supp} B_r = \left[-\frac{(r+1)\pi}{2}, \frac{(r+1)\pi}{2} \right]$, и потому при каждом x лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Таким образом, оправданы преобразование Абеля, почленное интегрирование и дифференцирование ряда.

Имеем

$$\begin{aligned} \delta_\pi f(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j \left(B_r\left(x + \frac{\pi}{2} - j\pi\right) - B_r\left(x - \frac{\pi}{2} - j\pi\right) \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta b_j B_r\left(x + \frac{\pi}{2} - j\pi\right), \end{aligned}$$

где $\Delta b_j = b_{j+1} - b_j$. Согласно [2, лекция 2, теорема 3], включения $\delta_\pi f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\{\Delta b_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ равносильны. По теореме Рисса–Фишера

существует такая функция $\gamma \in L_2[-1,1]$, что

$$\Delta b_j = \int\limits_{-1}^{1} \gamma(y) e^{-ij\pi y}\, dy, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$\delta_\pi f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \gamma(y) \Phi_y(x)\, dy, \tag{6}$$

где

$$\Phi_y(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2\sin\frac{\pi}{2}(y+2\nu)}{y+2\nu} \right)^{r+1} e^{i(y+2\nu)(x+\frac{\pi}{2})}.$$

Верно и обратное: всякая функция $\gamma \in L_2[-1,1]$ по формуле (6) определяет сплайн $f \in \mathbf{S}_{\lambda r}$, для которого $\delta_\pi f \in L_2(\mathbb{R})$.

Для записи производной f' отметим, что

$$B_r(x) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} B_{r-1}(x-t)\, dt, \quad B_r'(x) = \delta_\pi B_{r-1}(x).$$

Поэтому

$$f'(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j B_r'(x-j\pi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j\, \delta_\pi B_{r-1}(x-j\pi)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta b_j\, B_{r-1}\left(x+\frac{\pi}{2}-j\pi\right) = \int\limits_{-1}^{1} \gamma(y)\, \Psi_y(x)\, dy,$$

где

$$\Psi_y(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2\sin\frac{\pi}{2}(y+2\nu)}{y+2\nu} \right)^{r} e^{i(y+2\nu)(x+\frac{\pi}{2})}.$$

По теореме Планшереля $f' \in L_2(\mathbb{R})$,

$$\|\delta_\pi f\|_2^2 = 2\int\limits_{-1}^{1} |\gamma(y)|^2 \left(2\sin\frac{\pi y}{2}\right)^{2r+2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(y+2\nu)^{2r+2}}\, dy,$$

$$\|f'\|_2^2 = 2\int_{-1}^{1} |\gamma(y)|^2 \left(2\sin\frac{\pi y}{2}\right)^{2r} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(y+2\nu)^{2r}}\, dy.$$

Отсюда следует точное неравенство

$$\|f'\|_2 \leqslant \left(\max_{y\in[\,0,1]} F_r(y)\right)^{1/2} \|\delta_\pi f\|_2,$$

где функция F_r определена формулой (5). Остается воспользоваться леммой 1. □

Замечание 3. Функции Ψ_y и Φ_y суть (с точностью до замены переменных) экспоненциальные сплайны [2, 3].

Замечание 4. Неравенство (3) для периодических сплайнов можно вывести и из теоремы 2.

Покажем это. Пусть $f \in \widetilde{\mathbf{S}}_{nr}$, $N \in \mathbb{N}$, N четно. Тогда существует сплайн $f_N \in \mathbf{S}_{nr}$ со свойствами:

$$f_N|_{[-N\pi,N\pi]} = f, \quad \operatorname{supp} f_N \subset [-N\pi - h, N\pi + h];$$

при этом число $h > 0$ и продолжения $f_N(N\pi + t)$ и $f_N(-N\pi - t)$ при $t \in [0, h]$ можно выбрать не зависящими от N. Существование такого продолжения следует из разложения сплайна по базисным сплайнам на отрезке. Обозначая $K = \frac{n^{2s}}{2^{2s}} \frac{\mathcal{K}_{2r+1-2s}}{\mathcal{K}_{2r+1}}$ и пользуясь теоремой 2, имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f^{(s)}|^2 = \frac{1}{N}\int_{-N\pi}^{N\pi} |f^{(s)}|^2 \leqslant \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}} |f_N^{(s)}|^2$$

$$\leqslant \frac{K}{N}\int_{\mathbb{R}} |\delta^s_{\frac{\pi}{n}} f_N|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} K\int_{-\pi}^{\pi} |\delta^s_{\frac{\pi}{n}} f|^2.$$

Мы учли, что разности f и f_N совпадают на $\left[-N\pi + \frac{s\pi}{2n}, N\pi - \frac{s\pi}{2n}\right]$.

Литература

1. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов.* Киев. Наукова думка, 1992.
2. I. J. Schoenberg, *Cardinal spline intepolation.* Philadelphia, SIAM, 2 ed., 1993.
3. V. A. Zheludev, *Integral representation of slowly growing equidistant splines.* — Approximation and its applications **14**, No. 4 (1998), 66–88.
4. Fang Gensun, *Approximating properties of entire functions of exponential type.* — J. Math. Anal. Appl. **201** (1996), 642–659.
5. F. Dubeau, J. Savoie, *On the roots of orthogonal polynomials and Euler–Frobenius polynomials.* – J. Math. anal. Appl. **196** (1995), 84–98.

Vinogradov O. L. Sharp Bernstein type inequalities for splines in the mean square metrics.

We give an elementary proof of the sharp Bernstein type inequality

$$\|f^{(s)}\|_2 \leqslant \frac{n^s}{2^s}\left(\frac{\mathcal{K}_{2r+1-2s}}{\mathcal{K}_{2r+1}}\right)^{1/2}\|\delta^s_{\frac{\pi}{n}} f\|_2.$$

Here $n, r, s \in \mathbb{N}$, f is a 2π-periodic spline of order r and of minimal defect with nodes $\frac{j\pi}{n}$ $(j \in \mathbb{Z})$, δ^s_h is the difference operator of order s with step h, and the $\mathcal{K}_m$ are the Favard constants. A similar inequality for the space $L_2(\mathbb{R})$ is also established.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Россия, 198504, Санкт-Петербург,
Университетский пр., д.28
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 20 апреля 2015 г.