Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

И. В. Виденский

ПРОИЗВЕДЕНИЕ БЛЯШКЕ ДЛЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА С ЯДРОМ ШВАРЦА–ПИКА

1. Введение

Развивая операторный подход Сарасона к проблеме Неванлинны–Пика, Аглер [1] и Маршалл и Сандберг [6] заложили основы теории функциональных гильбертовых пространств с ядром Неванлинны-Пика (кратко (NP)-ядро). Детальное изложение этой теории содержится в монографии Аглера и Маккарти [2], на которую мы и будем ссылаться.

Автором в [10] для более широкого класса пространств (мы называем их пространствами с ядром Шварца–Пика, кратко (SP)-ядро) определено абстрактное условие Бляшке, построен аналог классического произведения Бляшке. Элементарными множителями этого произведения являются экстремальные мультипликаторы единичной нормы $\psi_{a,b}(z)$, см. формулу (7) в §2, построенные по двум различным точкам a и b так, чтобы $\psi_{a,b}(b) = 0$ и функция $\psi_{a,b}$ в точке a принимала максимально возможное положительное значение. В теореме 1 в [10] утверждается равномерная сходимость этого бесконечного произведения на компактах, однако в той статье доказана лишь равномерная сходимость частичных произведений.

В §2 настоящей заметки мы устраним это упущение и докажем, что только конечное число элементарных множителей могут обращаться в ноль на фиксированном компакте. Мы дополним теорему 1 из [10] утверждением о том, что частичные произведения Бляшке, умноженные на соответствующее вопроизводящее ядро, сходятся в топологии исходного гильбертова пространства. Кроме того, мы получим описание $(SP)_2$-ядер в терминах положительной полуопределенности некоторой функции, зависящей от ядра.

Ключевые слова: произведение Бляшке, воспроизводящее ядро, мультипликаторы.

§3 посвящен весовым пространствам Харди в единичном круге с (NP)-ядром. Мы применим к ним наши абстрактные теоремы. Пример Джури [2, стр. 139] показывает, что в таких пространствах может существовать экстремальный мультипликатор, имеющий дополнительный ноль. Развивая пример Джури и опираясь на лемму Боричева, мы построим пространство, в котором для любого натурального n существует мультипликатор, имеющий n дополнительных нулей.

В §4 мы применяем наши абстрактные теоремы к пространствам Друри–Арвесона. В этом случае экстремальный мультипликатор может иметь множество дополнительных нулей любой мощности.

2. Пространства с ядром Шварца–Пика

Пусть X – множество, H – гильбертово пространство, элементами которого являются функции на X, причем для любой точки a, $a \in X$, функционал значения в точке $f \mapsto f(a)$ непрерывен на H. Следовательно, существует воспроизводящее ядро, то есть такой элемент k_a пространства H, что $\langle f, k_a \rangle = f(a)$, $f \in H$. Будем всегда предполагать, что ядро $k_y(x)$ неприводимо. Это означает, что k_a, k_b линейно независимы при $a \neq b$ и что $k_a(x) \neq 0$ для любых a, x. Введем на множестве X метрику (см. [2, стр. 128])

$$\rho(a,b) = \sqrt{1 - \frac{|k_a(b)|^2}{\|k_a\|^2 \|k_b\|^2}}, \quad a, b \in X.$$

Пусть $M(H) = \{\varphi | f \in H \Rightarrow \varphi f \in H\}$ – пространство мультипликаторов пространства H. Мультипликатор φ порождает ограниченный оператор умножения, действующий в пространстве H, $M_\varphi(f) = \varphi f$, $f \in H$. Определим на алгебре $M(H)$ операторную норму $\|\varphi\|_{M(H)} = \|M_\varphi\|$.

Определение 1. *Пусть $Z \subset X$, $a \in X$. Положим*

$$V(Z) = \overline{\operatorname{span}}\{k_z | z \in Z\},$$
$$H(Z) = \{f \in H | f(z) = 0, z \in Z\},$$
$$d(a,Z) = \operatorname{dist}\big(\frac{k_a}{\|k_a\|}, V(Z)\big),$$

где dist *– расстояние в пространстве H.*

Очевидно, $H = H(Z) \oplus V(Z)$.

Напомним определения ядра Неванлинны–Пика [2] и ядра Шварца–Пика [10].

Определение 2. *Пусть* $Z = \{z_j\}_{j=1}^n$ *– различные точки множества* X, $\{w_j\}_{j=1}^n$ *– комплексные числа. Если из положительной полуопределенности матрицы*

$$\{(1 - w_i\bar{w}_j)\langle k_{z_j}, k_{z_i}\rangle\}_{1\leqslant i,j\leqslant n} \geqslant 0 \tag{1}$$

следует существование мультипликатора φ *такого, что* $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\varphi(z_j) = w_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *то ядро* $k_z(w)$ *обладает свойством* $(NP)_n$. *Если это условие выполняется для любого натурального числа* n, *то ядро обладает свойтвом* (NP). *Если справедлив матричнозначный аналог этого условия, то ядро обладает полным свойством Неванлинны–Пика* (CNP).

Заметим, что условие (1) при $w_j = \varphi(z_j)$, $\|\varphi\| \leqslant 1$ выполняется в любом функциональном гильбертовом пространстве, так как оно эквивалентно неравенству $\|(M_\varphi)^*|V(Z)\| \leqslant 1$, ибо $M_\varphi^* k_z = \overline{\varphi(z)} k_z$.

Определение 3. *Пусть* $Z = \{z_j\}_{j=1}^n$ *– различные точки множества* X, $z_0 \in X \setminus Z$. *Если существует мультипликатор* φ *такой, что*

$$\|\varphi\| \leqslant 1,\ \varphi(z_j) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ \varphi(z_0) = d(z_0, Z), \tag{2}$$

то ядро $k_z(w)$ *обладает свойством* $(SP)_{n+1}$. *Если это условие выполняется для любого натурального* n, *то ядро обладает свойством* (SP).

Легко видеть, что если $w_0 > 0$, $w_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то условие (1) для $(n+1)$-й точки эквивалентно неравенству

$$w_0 \leqslant d(z_0, Z). \tag{3}$$

Следующее рассуждение из работы Маршалла и Сандберга [6] показывает, что если мультипликатор с условиями (2) существует, то он единственный.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sup\{\operatorname{Re} g(z_0) \mid g \in H(Z),\ \|g\| \leqslant 1\}. \tag{4}$$

Решение задачи (4) существует и единственно:

$$f_0 = \frac{1}{d(z_0, Z)\|k_0\|}\, P_{H(Z)}(k_0), \tag{5}$$

где $P_{H(Z)}$ – ортогональный проектор на подпространство $H(Z)$, $k_0 = k_{z_0}$. Пусть ψ_0 – мультипликатор, удовлетворяющий условиям (2). Положим $h = \psi_0 \cdot \frac{k_0}{\|k_0\|}$. Легко убедиться в том, что $h(z_j) = f_0(z_j)$, $0 \leqslant j \leqslant n$. Следовательно,

$$f_0 = \psi_0 \cdot \frac{k_0}{\|k_0\|} \tag{6}$$

и ψ_0 – единственный мультипликатор с условиями (2), при этом $\|\psi_0\| = 1$.

Построим аналог фактора Бляшке для пространства H с $(SP)_2$-ядром. Пусть a, b – различные точки множества X. Положим в определении 3 $a = z_0$, а Z пусть состоит из одной точки b. Обозначим мультипликатор с условиями (2) через $\psi_{a,b}(z)$. Сопоставляя формулы (5) и (6), получим выражение для $\psi_{a,b}$:

$$\psi_{a,b}(z) = \frac{1}{\rho(a,b)}\left(1 - \frac{k_a(b)k_b(z)}{k_b(b)k_a(z)}\right). \tag{7}$$

Отметим, что $\rho(a,b) = d(a,b)$. В [2, стр. 106] вывод формулы (7) предлагается в качестве упражнения; она содержится в монографии [7, стр. 31]; подробно формула (7) выведена в [10].

Определение 4. *Последовательность $Z = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ точек множества X удовлетворяет условию Бляшке для пространства H, если существует точка a такая, что сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - \rho^2(a, z_j)) < +\infty. \tag{B}$$

Для пространства с (NP)-ядром в [6] доказано, что из условия (B) следует существование нетривиальной функции f, $f \in H$, такой что $Z \subset f^{-1}(0)$. Этот результат обобщает теорему Шапиро и Шилдса [8].

В [10] доказана следующая теорема.

Теорема A. *Если пространство H имеет $(SP)_2$-ядро и последовательность Z удовлетворяет условию* (B), *то верно следующее.*

1. *Для любой точки b, $b \in X$, сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - \rho^2(b, z_j)).$$

2. *Обозначим*

$$\psi_n = \prod_{j=1}^{n} \psi_{a,z_j}.$$

Пусть K *– компактное подмножество метрического пространства* (X,ρ). *Тогда функции* ψ_n *сходятся равномерно и абсолютно на* K *к нетривиальному мультипликатору* ψ.

3. w^*-$\lim M_{\psi_n} = M_\psi$, *где имеется ввиду слабая** *сходимость в пространстве линейных операторов на* H.

4. *Если* (X,τ) *– топологическое пространство, функции из пространства* H *непрерывны в топологии* τ, K *– компакт пространства* (X,τ), *то функции* ψ_n *сходятся равномерно и абсолютно на* K *к* ψ.

Дополним этот результат.

Теорема 1. *Пусть* H *– пространство с* $(SP)_2$*-ядром, последовательность* Z *удовлетворяет условию* (B).

1. *Пусть* K *– компакт в метрическом пространстве* (X,ρ). *Тогда лишь конечное число множителей* ψ_{a,z_j} *могут обращаться в ноль на* K.

2. *Если* (X,τ) *– топологическое пространство, функции из пространства* H *непрерывны в топологии* τ, K *– компакт в пространстве* (X,τ), *то лишь конечное число множителей* ψ_{a,z_j} *могут обращаться в ноль на* K.

3. *Пусть функции* ψ_n, ψ *определены в теореме* A. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n k_a = \psi k_a$, *где имеется в виду сходимость по норме в пространстве* H.

Лемма 1. *Пусть* H *– пространство с* $(SP)_2$*-ядром;* a, b *– различные точки множества* X, *функция* $\psi_{a,b}$ *определена по формуле* (7). *Если* $\psi_{a,b}(c) = 0$, *то*

$$\max\{\rho(a,b), \rho(b,c)\} \leqslant \rho(a,c).$$

Доказательство леммы. В теореме 2 из [10] получена формула

$$\psi_{b,a}(z) = \frac{\rho(a,b) - \psi_{a,b}(z)}{1 - \rho(a,b)\psi_{a,b}(z)}.$$

Отсюда следует, что если $\psi_{a,b}(c) = 0$, то $\psi_{b,a}(c) = \rho(a,b)$. Так как $\psi_{b,a}(a) = 0$, $\|\psi_{b,a}\| = 1$, то из неравенства (3) имеем

$$\psi_{b,a}(c) \leqslant \rho(a,c), \quad \text{то есть} \quad \rho(a,b) \leqslant \rho(a,c). \tag{8}$$

При $c = b$ утверждение леммы очевидно. Для различных точек a, b, c в теореме 2 из [10] получена формула

$$\rho(a,b)\psi_{a,b}(c) = \rho(c,b)\overline{\psi_{c,b}(a)}.$$

Значит, если $\psi_{a,b}(c) = 0$, то $\psi_{c,b}(a) = 0$. Применим неравенства (8) к мультипликатору $\psi_{c,b}$. Получим $\rho(c,b) \leqslant \rho(a,c)$. □

Доказательство теоремы. 1. Пусть K – метрический компакт в (X,ρ). Функция $\rho(a,x)$ непрерывна на K. Положим

$$R = \max\{\rho(a,x) \,|\, x \in K\}.$$

Ясно, что $R < 1$. Если мультипликатор $\psi_{a,b}$ обращается в ноль на K, то есть существует точка c, $c \in K$, $\psi_{a,b}(c) = 0$, то по лемме 1 имеем $\rho(a,b) \leqslant \rho(a,c) \leqslant R$. Из условия (B) следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} \rho(a,z_j) = 1$. Значит, $\psi_{a,z_j}(c) \neq 0$ при $\rho(a,z_j) > R$, $c \in K$.

2. Пусть K – компакт в топологическом пространстве (X,τ). Поскольку функции $k_a(x)$, $\|k_x\|$ непрерывны на X, функция

$$\rho(a,x) = \sqrt{1 - \frac{|k_a(x)|^2}{\|k_a\|^2\|k_x\|^2}}$$

тоже непрерывна на X. Положим $R = \max\{\rho(a,x) | x \in K\}$, и доказательство завершается как в пункте 1.

3. Проверим, что последовательность $\{\psi_n k_a\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в H. Пусть $n > m \geqslant 1$, тогда

$$\psi_n k_a - \psi_m k_a = \psi_m\left(\prod_{j=m+1}^{n} \psi_{a,z_j} k_a - k_a\right), \|\psi_m\| \leqslant 1, \|\psi_{a,z_j}\| \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|\psi_n k_a - \psi_m k_a\|^2 &\leqslant \Big\| \prod_{j=m+1}^{n} \psi_{a,z_j} k_a - k_a \Big\|^2 \\
&= \Big\| \prod_{j=m+1}^{n} \psi_{a,z_j} k_a \Big\|^2 + \|k_a\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle \prod_{j=m+1}^{n} \psi_{a,z_j} k_a, k_a \rangle \\
&\leqslant \|k_a\|^2 + \|k_a\|^2 - 2 \prod_{j=m+1}^{n} \psi_{a,z_j}(a) k_a(a) \\
&= 2\|k_a\|^2 \Big(1 - \prod_{j=m+1}^{n} \rho(a, z_j)\Big) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

так как по условию (B) произведение $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \rho(a, z_j)$ сходится. Значит, существует элемент f, $f \in H$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n k_a - f\| = 0$. Очевидно, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) k_a(x) = f(x)$, $x \in X$. Из пункта 2 теоремы A следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x)$, $x \in X$. Значит, $f = \psi k_a$. □

Из пункта 2 теоремы A и пункта 1 теоремы 1 следует равномерная сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \psi_{a,z_j}$ на метрических компактах. Из пункта 4 теоремы A и пункта 2 теоремы 1 следует равномерная сходимость этого бесконечного произведения на топологических компактах.

Условие Аглера [2, стр. 81] (теорема Маккулафа–Куиггена) характеризует (CNP)-ядра в терминах положительной полуопределенности некоторой функции, зависящей только от ядра. Следующая теорема характеризует $(SP)_2$-ядра.

Теорема 2. *Для того чтобы неприводимое ядро $k_w(z)$ на множестве X было $(SP)_2$-ядром, необходимо и достаточно, чтобы для любых различных точек a, b множества X была положительно полуопределена функция*

$$G(z, w) = (1 - \psi_{a,b}(z)\overline{\psi_{a,b}(w)}) k_w(z) \geqslant 0, \tag{9}$$

где функция $\psi_{a,b}$ задана формулой (7).

Доказательство. Пусть H – гильбертово пространство с ядром $k_w(z)$, φ – функция на X. Справедливы следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned}&\varphi \in M(H), \|\varphi\| \leqslant 1 \Longleftrightarrow \|(M_\varphi)^*\| \leqslant 1\\ &\Longleftrightarrow \{(1-\varphi(z_i)\overline{\varphi(z_j)})\langle k_{z_j}, k_{z_i}\rangle\}_{1\leqslant i,j\leqslant n} \geqslant 0 \ \forall \{z_j\}_{j=1}^n\\ &\Longleftrightarrow G_\varphi(z,w) = (1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})k_w(z) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Если $k_w(z)$ есть $(SP)_2$-ядро, то мы уже вывели, что $\psi_{a,b}$ – мультипликатор, решающий интерполяционную задачу $\psi_{a,b}(b) = 0$, $\psi_{a,b}(a) = \rho(a,b)$, $\|\psi_{a,b}\| \leqslant 1$. Следовательно, выполняется (9). Из (9) следует, что $\psi_{a,b}$ – мультипликатор, $\|\psi_{a,b}\| \leqslant 1$. Очевидно, $\psi_{a,b}(b) = 0$, $\psi_{a,b}(a) = \rho(a,b)$, значит $k_w(z)$ является $(SP)_2$-ядром. □

Приведем еще одно следствие формулы (6).

Следствие 1. *Пусть H – пространство с (SP)-ядром, f, g – нетривиальные функции из H, $Z = f^{-1}(0)$, $E = g^{-1}(0)$. Тогда существует нетривиальная функция h, $h \in H$, для которой $Z \cup E \subset h^{-1}(0)$.*

Доказательство. Формулу (6) мы вывели для случая, когда Z состоит из n точек, но она легко распространяется на любое множество нулей нетривиальной функции из H. Пусть f – нетривиальная функция из H, $Z = f^{-1}(0)$, $z_0 \in X \setminus Z$. По формуле (6) существует такой мультипликатор ψ, что $f_0 = \psi\frac{k_0}{\|k_0\|}$, где f_0 – решение экстремальной задачи (4). Поэтому $Z \subset f_0^{-1}(0)$. Следовательно, $Z \subset \psi^{-1}(0)$. Положим $h = \psi g$. Тогда $h \in H$ и $Z \cup E \subset h^{-1}(0)$. □

3. Весовые пространства Харди в единичном круге

Определение 5. *Пусть $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность положительных чисел, такая что $\underline{\lim}\sqrt[n]{\omega_n} \geqslant 1$, удобно считать $\omega_0 = 1$. Положим*

$$H^2(\{\omega_n\}) = \{f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n \mid \|f\|^2 = \sum_{n=0}^\infty |c_n|^2\omega_n < +\infty\}.$$

Элементы пространства $H^2(\{\omega_n\})$ – это функции, аналитические в единичном круге $\mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Положим

$$p(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\omega_n}.$$

Тогда воспроизводящее ядро для $H^2(\{\omega_n\})$ задается формулой $k_w(z) = p(\bar{w}z)$. В [2, стр. 88], [6] доказано, что $H^2(\{\omega_n\})$ имеет (CNP)-ядро тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{p(z)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geqslant 0. \tag{10}$$

Применим теорему 1 и теорему A к пространству $H^2(\{\omega_n\})$. Выберем $a = 0$, тогда $k_0(z) = 1$, $z \in \mathbb{D}$. Если $b \in \mathbb{D}$, то

$$\rho(0,b) = \sqrt{1 - \frac{1}{p(|b|^2)}},$$

$$\psi_{0,b}(z) = \sqrt{\frac{p(|b|^2)}{p(|b|^2) - 1}} \left(1 - \frac{p(\bar{b}z)}{p(|b|^2)}\right).$$

Следствие 2. *Пусть $p(z)$ удовлетворяет условию* (10), *и $Z = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность точек единичного круга $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p(|z_j|^2)} < +\infty. \tag{11}$$

Тогда бесконечное произведение

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \psi_{0,z_j}(z)$$

сходится по норме пространства $H^2(\{\omega_n\})$, сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах круга $\mathbb{D}$, ψ – элемент алгебры мультипликаторов $M(H^2(\{\omega_n\}))$, w^*-$\lim M_{\psi_n} = M_\psi$, где $\psi_n = \prod_{j=1}^{n} \psi_{0,z_j}$.

Достаточность условия (11) для того, чтобы последовательность Z была множеством нулей нетривиальной функции из $H^2(\{\omega_n\})$, доказана Шапиро и Шилдсом [8].

Джури [2, стр. 139], построил пример пространства $H^2(\{\omega_n\})$ с (CNP)-ядром, для которого $\psi_{a,b}$ имеет лишний ноль, то есть существует точка c, такая что $\psi_{a,b}(c) = 0$, $c \neq b$. Мы обобщим пример Джури, для чего нам потребуется лемма, доказанная А. А. Боричевым и публикуемая с его любезного разрешения.

Лемма 2. (А. А. Боричев). *Существует степенной ряд* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *такой, что* $c_0 > 0$, $c_n \geqslant 0$ *при* $n > 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = 1$, *и* $f(z)$ *имеет бесконечно много нулей в круге* $\mathbb{D}$.

Доказательство. Выберем последовательность положительных чисел $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{\infty} d_j = \frac{1}{2}$. Построим по индукции возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы ряд

$$f(z) = d_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (d_j + d_{j+1}) z^{n_j} \tag{12}$$

имел бесконечно много нулей на интервале $(-1, 0)$.

Обозначим через $f_k(z)$ частичную сумму ряда (12). Положим $n_1 = 1$, $f_1(z) = d_1 + (d_1 + d_2)z$. Тогда f_1 имеет корень z_1 на интервале $(-1, 0)$. Пусть $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = \frac{1}{2}(-1 + z_1)$, $h_1 = |f_1(\zeta_1)|$, тогда $f_1(\zeta_1) = -h_1$. Допустим, что мы выбрали последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j=1}^{k}$ и последовательность точек $\{\zeta_j\}_{j=0}^{k}$, $-1 < \zeta_k < \dots < \zeta_1 < \zeta_0$, для которой $f_j(\zeta_j) = (-1)^j h_j$, $h_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Выберем $n_{k+1} > n_k$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$(d_k + d_{k+1}) |\zeta_j|^{n_{k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}} h_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

и так, чтобы $(n_{k+1} - (k+1))$ было четным числом. Тогда

$$|f_{k+1}(\zeta_j) - f_j(\zeta_j)| < h_j \sum_{i=j+1}^{k} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2} h_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{13}$$

Следовательно, $\operatorname{sign}(f_{k+1}(\zeta_j)) = \operatorname{sign}(f_j(\zeta_j)) = (-1)^j$. Благодаря выбору n_j, имеем

$$f_{k+1}(-1) = d_1 + \sum_{j=1}^{k+1} (d_j + d_{j+1})(-1)^j = (-1)^{k+1} d_{k+1}.$$

Значит, в интервале $(-1, \zeta_k)$ есть корень z_{k+1} многочлена f_{k+1}. Пусть $\zeta_{k+1} = \frac{1}{2}(-1 + z_{k+1})$, $h_{k+1} = |f_{k+1}(\zeta_{k+1})|$, тогда $f_{k+1}(\zeta_{k+1}) = (-1)^{k+1} h_{k+1}$.

Из неравенства (13) следует, что $\operatorname{sign} f(\zeta_j) = \operatorname{sign}(f_j(\zeta_j)) = (-1)^j$. Значит, на каждом интервале (ζ_{j+1}, ζ_j) есть ноль функции $f(z)$. Очевидно, $f(1) = 2 \sum\limits_{j=1}^{\infty} d_j = 1$. □

Теорема 3. *Существует пространство $H^2(\{\omega_n\})$ с (CNP)-ядром такое, что для любого натурального n найдется такая точка b, $b \in \mathbb{D}$, что мультипликатор $\psi_{b,0}$ имеет по крайней мере n нулей в единичном круге $\mathbb{D}$.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ – функция из леммы 2. Положим

$$p(z) = \frac{1}{1 - zf(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\omega_n}.$$

Ясно, что $1/\omega_n \geqslant c_0^n > 0$. Тогда пространство $H^2(\{\omega_n\})$ имеет (CNP)-ядро. Пусть b – точка единичного круга. Из формулы (7) имеем

$$\psi_{b,0}(z) = \sqrt{\frac{p(|b|^2)}{p(|b|^2) - 1}}\left(1 - \frac{1}{p(\bar{b}z)}\right).$$

Если $f(\bar{b}z) = 0$, то $p(\bar{b}z) = 1$, $\psi_{b,0}(z) = 0$. Занумеруем различные нули функции $f(z)$ на интервале $(-1, 0)$ в порядке убывания: $0 > z_1 > \cdots > z_n > \cdots > -1$. Выберем вещественное число b так, чтобы выполнялись неравенства $1 > b > |z_n|$. Тогда $\zeta_j = \frac{z_j}{b}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, будут нулями функции $\psi_{b,0}$. □

Заметим, что функция $\psi_{b,0}$ аналитична в круге $\{|z| < \frac{1}{|b|}\}$, поэтому в единичном круге функция $\psi_{b,0}$ может иметь лишь конечное число нулей.

Теорема 3 связана с вопросом о числе нулей линейной комбинации воспроизводящих ядер. В классическом пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ линейная комбинация n воспроизводящих ядер есть правильная рациональная дробь, которая, очевидно, может иметь $(n-1)$ нулей в $\mathbb{D}$ и не более. В пространстве Бергмана в $\mathbb{D}$ линейная комбинация n воспроизводящих ядер есть рациональная дробь, степень числителя которой равна $(2n - 2)$, однако оказалось [11], что она может иметь в $\mathbb{D}$ не более, чем $(2n - 3)$ нуля. В связи с этим возник вопрос: в каких функциональных гильбертовых пространствах существует ограничение на число нулей линейной комбинации воспроизводящих ядер? Теорема 3 показывает, что в пространствах $H^2(\{\omega_n\})$ с (CNP)-ядром, вообще говоря, ограничений нет.

Следствие 3. *Существует пространство $H^2(\{\omega_n\})$ с (CNP)-ядром такое, что для любого натурального n найдется линейная комбинация из двух воспроизводящих ядер, которая имеет по крайней мере n нулей в единичном круге.*

Доказательство. Рассмотрим то же пространство, что и в теореме 3. Пусть n – натуральное число. По теореме 3 существует вещественное число b, $0 < b < 1$, для которого мультипликатор $\psi_{b,0}$ имеет по крайней мере n нулей в $\mathbb{D}$. Если $\psi_{b,0}(z) = 0$, то $p(\bar{b}z) = 1$. Следовательно,

$$k_b(z) - k_0(z) = p(\bar{b}z) - 1$$

имеет не менее, чем n нулей в $\mathbb{D}$. □

4. Пространства Друри–Арвесона

Определение 6. *Пусть d – кардинальное число, $\mathbb{B}^d$ – открытый единичный шар d-мерного гильбертова пространства. Определим на $\mathbb{B}^d$ ядро*

$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \langle z, w\rangle}. \tag{14}$$

H^2_d – гильбертово пространство функций на $\mathbb{B}^d$ с ядром (14).

Пространства H^2_d были введены Друри [5] в связи с многомерным обобщением неравенства фон Неймана, подробно исследованы Арвесоном [4]. В [2, стр. 97] доказано, что пространства H^2_d имеют (CNP)-ядро и являются универсальными пространствами для пространств с (CNP)-ядром. Это означает, что любое гильбертово пространство с (CNP)-ядром после некоторой нормализации можно отождествить с сужением H^2_d на подмножество шара $\mathbb{B}^d$.

Применим теорему 1 и теорему A к пространству H^2_d. Выберем $a = 0$, тогда $k_a(z) = 1$, $z \in \mathbb{B}^d$. Если $b \in \mathbb{B}^d$, то $\rho(0, b) = \|b\|$,

$$\psi_{0,b}(z) = \frac{1}{\|b\|}\left(1 - \frac{1 - \|b\|^2}{1 - \langle z, b\rangle}\right) = \frac{\langle b - z, b\rangle}{\|b\|(1 - \langle z, b\rangle)}. \tag{15}$$

Отметим, что $\psi_{0,b}(z) = 0$ на гиперплоскости $\{z | \langle z, b\rangle = \langle b, b\rangle\}$.

Следствие 4. *Пусть* $Z = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ *– последовательность точек единичного шара* $\mathbb{B}^d$*, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - \|z_j\|^2) < +\infty.$$

Тогда бесконечное произведение

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \psi_{0,z_j}(z) \tag{16}$$

сходится по норме пространства H_d^2*, сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах шара* $\mathbb{B}^d$*, а функция* ψ *принадлежит алгебре мультипликаторов* $M(H_d^2)$*,* $w^*\text{-}\lim M_{\psi_n} = M_\psi$*, где* $\psi_n = \prod\limits_{j=1}^{n} \psi_{0,z_j}$*. При этом* ψ *обращается в ноль на кусочно-линейном множестве*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{z | \langle z, z_j\rangle = \langle z_j, z_j\rangle\}.$$

Произведение (16) встречалось в работе Амара [3] и Н. А. Широкова [9], но только как элемент алгебры $H^\infty(\mathbb{B}^d)$. Известно [2, стр. 99], что при $d \geqslant 2$ алгебра $M(H_d^2)$ является собственной подалгеброй в $H^\infty(\mathbb{B}^d)$ и даже не содержит всю алгебру $\mathcal{A}$ – замыкание многочленов по норме H^∞.

Следствие 5. *Для любого кардинального числа* d *существует гильбертово пространство с* (CNP)*-ядром, в котором выполнено следующее.*

1. *Существует мультипликатор* $\psi_{a,b}$*, множество нулей которого имеет мощность* d*.*

2. *Существует линейная комбинация из двух вопроизводящих ядер, множество нулей которой имеет мощность* d*.*

Доказательство. В пространстве H_d^2 рассмотрим мультипликатор $\psi_{0,b}$ и линейную комбинацию воспроизводящих ядер $k_0(z) - \frac{k_b(z)}{\|k_b\|}$. □

Литература

1. J. Agler, *Nevanlinna–Pick interpolation on Sobolev space*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 341–351.

2. J. Agler, J. E. McCarthy, *Pick Interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics **44**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2002.
3. E. Amar, *Extension de fonctions analytiques avec estimation*, Arkiv för mat. **17**, No. 1 (1979), 123–138.
4. W. B. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras III: Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), 159–228.
5. S. W. Drury, *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 300–304.
6. D. E. Marshall, C. Sundberg, *Interpolating sequences for the multipliers of the Dirichlet space*, Preprint 1993. Available at `http://www.math.washington.edu/~marshall/preprints/preprints.html`.
7. K. Seip, *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions*, University lecture series 33, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 2004.
8. H. S. Shapiro, A. L. Shields, *On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces*, Math. Z. **80** (1962), 217–229.
9. Н. А. Широков, *Об одном аналоге угла Штольца для единичного шара в* $\mathbb{C}^n$, Зап. научн. семин. ПОМИ **247** (1997), 276–297.
10. И. В. Виденский, *Об аналоге произведения Бляшке для гильбертова пространства с ядром Неванлинны–Пика*, Зап. научн. семин. ПОМИ **424** (2014), 126–140.
11. И. В. Виденский, *О нулях производной рациональной функции и коинвариантных подпространствах оператора сдвига в пространстве Бергмана*, Зап. научн. семин. ПОМИ **282** (2001), 26–33.

Videnskii I. V. Blaschke product for a Hilbert space with Schwarz–Pick kernel.

For an analog of a Blaschke product for a Hilbert space with Schwarz–Pick kernel (this is a wider class than the class of Hilbert spaces with Nevanlinna–Pick kernel), it is proved that only finitely many elementary multipliers may have zeros on a fixed compact set. It is proved also that the partial Blaschke products multiplied by an appropriate reproducing kernel converge in the Hilbert space. These abstract theorems are applied to the weighted Hardy spaces in the unit disk and to the Drury-Arveson spaces.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Петродворец,
198504, С.-Петербург, Россия
E-mail: ilya.viden@gmail.com

Поступило 3 августа 2015 г.