Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

**А. В. Васин**

# РЕГУЛЯРНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЁРЛИНГА В ГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ

## §1. Введение

В данной работе мы получим точные результаты об ограниченности преобразования Бёрлинга в пространствах Липшица в гладких областях для модуля непрерывности, ограниченного по Дини. Преобразование Бёрлинга в ограниченной гладкой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ определяется как следующий сингулярный интеграл:

$$Bf(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\substack{w \in \Omega, \\ |z-w|>\varepsilon}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} dA(w),$$

если последний предел существует. В [6, 1, 4, 8] было показано, что данное преобразование играет существенную роль в приложениях к теории квазиконформных отображений на плоскости и к уравнению Бельтрами с разрывными коэффициентами. В частности, важной проблемой является возможность ослабления гладкости границы области, в которой задан соответствующий коэффициент Бельтрами.

Будем говорить, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{C}$ является $C^{1,\omega}$-областью, если единичный вектор внешней нормали принадлежит классу Липшица $\mathrm{Lip}(\omega)$ с модулем непрерывности $\omega$. Класс Липшица $\mathrm{Lip}(\omega)$ состоит из функций, которые удовлетворяют условию

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c_0 \omega(|x-y|)$$

для некоторой константы $c_0$. Модуль непрерывности – это возрастающая вогнутая функция $\omega$, для которой $\omega(0) = 0$. Модуль непрерывности регулярен по Дини, если следующий интеграл сходится:

$$\int\limits_0 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

---

*Ключевые слова*: классы Липшица, преобразование Бёрлинга, T1-теорема.
Исследование частично поддержано грантом РФФИ 14-01-00198.

В этом случае сопряженный модуль непрерывности определяется формулой:

$$\widetilde{\omega}(x) = \int_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta \int_x^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt. \tag{1.1}$$

В связи с упоминаемыми приложениями в теории уравнения Бельтрами, мы больше интересуемся слабыми модулями непрерывности. Для таких модулей существует константа $0 < \alpha < 1$, такая что

$$\omega(t)/t^\alpha \to \infty \text{ при } t \to 0.$$

Для слабых модулей непрерывности второй интеграл в (1.1) мажорируется исходным модулем непрерывности, в то время как для первого это не обязательно верно. Очевидно, что для степенных модулей непрерывности $\omega(t) = t^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ имеется эквивалентность $\widetilde{\omega} \asymp \omega$. Наши результаты показывают, когда именно преобразование Бёрлинга ограничено в классах Липшица.

**Теорема 1.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ является ограниченной областью класса $C^{1,\omega}$ для слабого модуля непрерывности $\omega$, регулярного по Дини. Тогда преобразование Бёрлинга ограничено из* $\mathrm{Lip}(\omega, \Omega)$ *в* $\mathrm{Lip}(\widetilde{\omega}, \Omega)$.

Стандартные вычисления для классических операторов Кальдерона–Зигмунда (когда не приходится учитывать поведение границы) тоже ведут к появлению $\widetilde{\omega}$ вместо $\omega$. См., например, [5] (там эти вычисления проведены для степенных модулей непрерывности, но их легко приспособить к общему случаю). Важный шаг в наших рассмотрениях представляет вариант T1-теоремы. Обозначим через $1_\Omega$ характеристическую функцию области $\Omega$.

**Теорема 2.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ является ограниченной областью класса $C^{1,\omega}$ для слабого модуля непрерывности $\omega$, регулярного по Дини. Тогда найдется константа $c_0$, такая что функция $B1_\Omega$, аналитическая вне границы области $\partial\Omega$, удовлетворяет неравенству*

$$|\partial B1_\Omega(z)| \leqslant c_0 \frac{\omega(\rho(z))}{\rho(z)},$$

*где через $\rho(z)$ обозначено расстояние от точки $z$ до границы области $\partial\Omega$.*

Точность условия $C^{1,\omega}$-гладкости границы вытекает из следующего утверждения.

**Теорема 3.** *Существуют область $\Omega \subset \mathbb{C}$ класса $C^{1,\omega}$ для слабого модуля непрерывности $\omega$, регулярного по Дини, граничная точка $\zeta \in \partial\Omega$ и фиксированная константа $c_1$, такие что*

$$\liminf_{z\to\zeta} |\partial B 1_\Omega(z)| \frac{\rho(z)}{\omega(\rho(z))} \geqslant c_1.$$

Для степенных модулей непрерывности $\omega(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, эта теорема утверждает точность основной леммы из [6, 3]. В работах [7] и [2] имеются геометрические характеристики области в терминах пространств Соболева и Бесова для $\alpha > 1/p$:

$$(B1_\Omega)1_\Omega \in W_p^\alpha(\Omega) \Leftrightarrow \partial\Omega \in B_{p,p}^{1+\alpha-1/p}.$$

Вместе с T1-теоремой [1], из этой эквивалентности выводится, что преобразование Бёрлинга ограничено в $W_p^\alpha(\Omega)$, как только $\alpha > 2/p$, то есть когда $\partial\Omega \in C^{1+\alpha-2/p}$. Наши теоремы 2 и 3 могут рассматриваться как вариант геометрической характеризации в случае пространств Липшица для слабых модулей непрерывности.

План работы следующий. В §2 изложены предварительные результаты. В частности, доказывается, что максимальное преобразование Бёрлинга $B^*1_\Omega$ от характеристической функции ограниченной $C^{1,\omega}$-гладкой области ограничено в $\mathbb{C}$. Доказательство представляет вариант основной леммы из [6] с простыми изменениями. В §3 мы доказываем теорему 2 об оценках производной преобразования Бёрлинга $B1_\Omega$. В §4 доказывается вариант T1-теоремы, когда ограниченность $B^*1_\Omega$ вместе с липшивостью $B1_\Omega$ дают теорему 1. Обратный результат о точности доказывается в §5.

Как обычно, в работе буквой $c$ с индексом обозначаем различные константы, которые могут меняться в ходе выкладок. Обозначение $A \asymp B$ означает, что существует фиксированная константа $c > 0$, такая что $\frac{1}{c}B < A < cB$.

## §2. Оценки максимальной функции

Докажем ограниченность максимального преобразования Бёрлинга $B^*1_\Omega$ от характеристической функции ограниченной $C^{1,\omega}$-гладкой области. Заметим, что данное преобразование для характеристической функции квадрата неограничено, поэтому некоторая гладкость границы должна быть предусмотрена. Мы следуем доказательству основной леммы в [6], где рассматривались степенные модули непрерывности для любого оператора Кальдерона–Зигмунда с четным однородным ядром. Определим оператор

$$B^{\delta}1_{\Omega}(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{w\in\Omega, |z-w|>\delta} \frac{1}{(z-w)^2} dA(w). \tag{2.1}$$

и соответствующее максимальное преобразование Бёрлинга

$$B^{*}1_{\Omega}(z) = \sup_{\delta} \left| B^{\delta}1_{\Omega}(z) \right|.$$

**Лемма 1.** *Максимальное преобразование Бёрлинга $B^{*}1_{\Omega}$ от характеристической функции ограниченной $C^{1,\omega}$-гладкой области ограничено всюду в $\mathbb{C}$.*

**Доказательство.** Выберем $r_0 > 0$ столь малым, что для любой граничной точки $a \in \partial\Omega$ найдутся функция $y = V(x)$ класса $C^{1,\omega}$ и круг $D(a, r_0)$ такие, что после соответствующего сдвига и вращения можно считать, что $a = 0$ и

$$\Omega \cap D(a, r_0) = \{(x, y) : y > V(x), V(0) = 0\},$$

а касательная в точке $a = 0$ к границе $\partial\Omega$ совпадает с прямой $y = 0$. Более того,

$$|V(x)| \leqslant c_0 |x| \omega(|x|), \quad |x| < r_0. \tag{2.2}$$

Лемма будет доказана, если покажем, что функция $B^{\delta}1(z)$ ограничена равномерно по $z \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$. Разобьем область интегрирования в (2.1) по уровню $r_0$, тогда получим

$$B^{\delta}1(z) = \int\limits_{\delta<|z-w|<r_0} .. + \int\limits_{r_0<|z-w|} .. = I + II.$$

Очевидно, второй член ограничен:

$$II \leqslant \frac{|\Omega|}{r_0^2},$$

кроме того, мы имеем то же самое для первого члена $I$, когда $\delta \geqslant r_0$.

Если $\delta \leqslant r_0$, то мы рассмотрим вначале $z \in \partial\Omega$, при этом будем считать, что $z = 0$. Вычисляя в полярных координатах $w = re^{it}, r < r_0$, получим

$$\int\limits_{w\in\Omega, r_0>|z-w|>\delta} \frac{1}{(z-w)^2} dA(w) = \int\limits_{\delta}^{r_0} \frac{dr}{r} \int\limits_{A(r)} e^{-2it} dt, \tag{2.3}$$

где $A(r) = \{t : re^{it} \in \Omega\}, r < r_0$. Ввиду четности ядра преобразования Бёрлинга имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{-2it} dt = \int\limits_0^{\pi} e^{-2it} dt = 0,$$

так что

$$\int\limits_{A(r)} e^{-2it} dt = \int\limits_{A(r)\setminus[0,\pi]} e^{-2it} dt - \int\limits_{[0,\pi]\setminus A(r)} e^{-2it} dt.$$

По формуле (2.2) имеем

$$|r \sin t| \leqslant c_0 |r \cos t| \omega(|r \cos t|),$$

и поэтому

$$|t : t \in \{A(r)\setminus[0,\pi] \cup [0,\pi]\setminus A(r)\}| \leqslant c_1 \omega(r).$$

Оценим внутренний интеграл в (2.3) сверху:

$$\left| \int\limits_{A(r)} e^{-2it} dt \right| \leqslant c_2 \omega(r).$$

Последнее дает требуемую оценку для $z \in \partial\Omega$:

$$|I| \leqslant c_2 \int\limits_{\delta}^{r_0} \frac{\omega(r)}{r} dr \leqslant c_3 \widetilde{\omega}(r_0) < \infty.$$

Остальная часть доказательства леммы, когда $z \in \mathbb{C}\setminus\partial\Omega$, следует почти дословно соответствующей части в [6]. $\square$

## §3. Доказательство теоремы 2

Для того, чтобы оценить производную функции $B1_\Omega(z)$, аналитической в $\mathbb{C}\backslash\partial\Omega$, снова разобьем интеграл по уровню $r_0$, тогда

$$\partial B1_\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi}\int\limits_{w\in\Omega,|z-w|>\varepsilon}\frac{1}{(z-w)^3}dA(w)$$
$$= \partial B1_{\Omega\cap|w-z|<r_0}(z) + \partial B1_{\Omega\cap|w-z|\geqslant r_0}(z) = I + II.$$

Очевидно, второй член $II$ ограничен. Требуется оценить только первый член $I$. Можно считать что $\rho(z) < r_0/4$, в противном случае

$$\partial B1_\Omega(z) = -\partial B1_{\Omega^c}(z)$$

и член $I$, очевидно, ограничен. Далее нам потребуется одна лемма (см. [6, 4]) об операторах Кальдерона–Зигмунда с четным однородным ядром.

**Лемма 2.** *Для любого круга $D$ и его характеристической функции $1_D$ имеем*

$$(B1_D)1_D = 0.$$

Как следствие, получим

$$\partial(B1_D)1_D = 0. \tag{3.1}$$

Пусть $z \in \Omega$, обозначим $\delta = \rho(z)$, и пусть $z_0 \in \partial\Omega$ – та точка границы, где это расстояние достигается. Можно считать, что $z_0 = 0$ и касательная в $z_0$ к $\partial\Omega$ совпадает с прямой $y = 0$. Более того, пусть $iy \in \Omega$ как только $0 < y < \delta$ и $z = i\delta$.

Обозначим через $D = D(ir_0, r_0)$ круг с центром $ir_0$ и радиусом $r_0$, касательный к $\partial\Omega$ в 0. По лемме 2 оценим первый член $I$:

$$I = I - \partial B1_D = \partial B1_{\{\Omega\cap|w-z|<r_0\}\backslash D} - \partial B1_{D\backslash\{\Omega\cap|w-z|<r_0\}}.$$

Очевидно, что область интегрирования свелась к узкому сектору

$$S = \{\Omega\cap|w-z|<r_0\}\backslash D \cup D\backslash\{\Omega\cap|w-z|<r_0\}$$

с вершиной в точке 0. Вычисления в полярных координатах дают

$$I = \int\limits_0^{r_0} r\,dr \int\limits_{A(r)} \frac{dt}{|re^{-it} - i\delta|^3},$$

где $A(r) = \{t : re^{it} \in S\}$ и $|r\sin t| \leqslant cr\omega(r)$. Ввиду (2.2) получим $|A(r)| \leqslant c\omega(r)$. Более того, $|w - i\delta| \asymp |w| + \delta \asymp r + \delta$ при $w \in S$. Следовательно,

$$I \leqslant \int_0^{r_0} \frac{r\omega(r)dr}{(r+\delta)^3} = \int_0^{\delta} \cdots + \int_{\delta}^{r_0} \cdots = III + IV.$$

Если $0 \leqslant r \leqslant \delta$, то $r + \delta \asymp \delta$, а тогда член $III$ оценивается как

$$III \leqslant c\frac{\omega(\delta)}{\delta^2}\int_0^{\delta} dr \leqslant c\frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

Если же $\delta \leqslant r \leqslant r_0$, то $r + \delta \asymp r$, а тогда $III$ оценивается членом IV, для которого, в свою очередь, имеем

$$IV \leqslant c\int_{\delta}^{r_0} \frac{r\omega(r)dr}{r^3} \leqslant c\frac{\omega(\delta)}{\delta},$$

для слабых модулей непрерывности. Заметим, что такая же оценка с более простым доказательством имеет место для дополнения области. Последнее наблюдение завершает доказательство теоремы.

## §4. Доказательство теоремы 1

Теперь мы готовы доказать свой вариант T1-теоремы. Нам нужны два факта. Во-первых, $B1_\Omega \in \mathrm{Lip}(\widetilde{\omega}, \Omega)$, что следует из теоремы 2 по лемме Харди–Литтлвуда. Во-вторых, максимальное преобразование Бёрлинга $B^*1_\Omega$ ограничено, что имеем ввиду леммы 1.

Начнем с очевидного разложения преобразования Бёрлинга $Bf$:

$$Bf(x) = \int_\Omega \frac{f(z) - f(x)}{(z-x)^2} dA(z) + f(x)B1_\Omega(x),$$

тогда

$$Bf(x) - Bf(y) = \int_\Omega \left(\frac{f(z)-f(x)}{(z-x)^2} - \frac{f(z)-f(y)}{(z-y)^2}\right) dA(z) + (f(x) - f(y))B1_\Omega(x) + f(y)(B1_\Omega(x) - B1_\Omega(y)).$$

Два последних члена просто оцениваются, так что лишь первый член $I$ представляет проблему. Для его оценки рассмотрим круг

$$D = D(x, 2|x-y|),$$

тогда получим

$$I = \int\limits_{\Omega\cap D} .. + \int\limits_{\Omega\setminus D} .. = II + III.$$

На множестве $\Omega\cap D$ имеем $|z-x| \leqslant 2|x-y|$, $|z-y| \leqslant 3|x-y|$, и оценим абсолютную величину подынтегрального выражения:

$$|II| \leqslant 2c \int\limits_{t<3|x-y|} \frac{\omega(t)}{t} dt \leqslant c\widetilde{\omega}(|x-y|).$$

На множестве $\Omega \setminus D$ имеем $|z-x| \asymp |z-y| \geqslant |x-y|$, откуда

$$III = \int\limits_{\Omega\setminus D} (f(z)-f(x))\Big(\frac{1}{(z-x)^2} - \frac{1}{(z-y)^2}\Big) dA(z) + \int\limits_{\Omega\setminus D} \frac{f(y)-f(x)}{(z-y)^2} dA(z) = IV + V.$$

Градиентная оценка на множестве $\Omega \setminus D$ дает

$$|IV| \leqslant |x-y| \int\limits_{|x-y|}^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leqslant c\omega(|x-y|)$$

для слабого модуля непрерывности.

Окончательно, для последнего интеграла получим

$$|V| \leqslant |f(y)-f(x)| \,\Big| \int\limits_{\Omega\setminus D} \frac{1}{(z-x)^2} dA(z) \Big| \leqslant c\omega(|x-y|)$$

в силу леммы 1, что и завершает доказательство теоремы.

## §5. Доказательство теоремы 3

Пусть часть границы $\partial\Omega$ в окрестности граничной точки $z = 0$ задана уравнением $y = A(x)$, где $A(x) = 0$, $x < 0$, и $A(x) = x\omega(x)$, $x \geqslant 0$, $|x| < r_0$, где модуль непрерывности $\omega(x)$ регулярен по Дини. Касательная к границе $\partial\Omega$ в точке 0 задана уравнением $y = 0$. Пусть точки $i\delta$ с $0 < \delta < r_0$ лежат в области $\Omega$, и множество $\Omega \cap \{|z| < r_0\}$

лежит в верхней полуплоскости П. Примем во внимание лемму 2 (формулу (3.1)). По теореме о мажорированной сходимости, $\partial(B1_\Pi)1_\Pi = 0$. Определим сектор $S = \Omega\backslash\Pi \cup \Pi\backslash\Omega$, тогда

$$\partial(B1_\Omega)(i\delta) = \partial(B1_\Omega - B1_\Pi)(i\delta) = \partial B1_{\Omega\backslash\Pi}(i\delta) - \partial B1_{\Pi\backslash\Omega}(i\delta) = I + II.$$

Если $z \in \Omega\backslash\Pi$, то $|z| > r_0$, и первый член равномерно ограничен сверху:

$$|I| \leqslant c\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \leqslant c\frac{1}{r_0}.$$

Главный вклад дает второй член

$$II = \int\limits_0^{r_0} dx \int\limits_0^{A(x)} \frac{dy}{(x + i(y-\delta))^3},$$

который представим в виде

$$II = \int\limits_0^{r_0} \frac{A(x)}{(x - i\delta)^3} + \left(II - \int\limits_0^{r_0} \frac{A(x)dx}{(x - i\delta)^3}\right) = III + IV.$$

Четвертый член мал по сравнению с третьим и оценивается сверху по неравенству Лагранжа:

$$|IV| \leqslant \int\limits_0^{r_0} \sup_{y\in(0,A(x))} \frac{3A(x)^2}{|x + i(y-\delta)|^4} dx = \int\limits_0^{\delta} \ldots + \int\limits_{\delta}^{r_0} \ldots .$$

Если $0 \leqslant r \leqslant \delta$, то знаменатель $|x + i(y-\delta)|^4$ имеет порядок $\delta^4$ и первый интеграл в $IV$ оценивается так:

$$\int\limits_0^{\delta} \ldots \leqslant c\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega^2(\delta)}{\delta^2} dx \leqslant c\frac{\omega^2(\delta)}{\delta} = o\left(\frac{\omega(\delta)}{\delta}\right).$$

Если $\delta \leqslant r \leqslant r_0$, то знаменатель $|x + i(y-\delta)|^4$ имеет порядок $x^4$ и второй интеграл в $IV$ оценивается так:

$$\int\limits_{\delta}^{r_0} \ldots \leqslant c\int\limits_{\delta}^{r_0} \frac{\omega^2(x)}{x^2} dx \leqslant c\frac{\widetilde{\omega}^2(\delta)}{\delta} = o\left(\frac{\omega(\delta)}{\delta}\right),$$

для слабого модуля непрерывности.

Теорема будет доказана, если получим требуемую оценку снизу для мнимой части величины $III$, для которой выводим

$$\mathrm{Im}(III) = \mathrm{Im}\int_0^{r_0} \frac{A(x)}{(x-i\delta)^3}dx = \int_0^{r_0} \frac{3x^3\delta - x\delta^3}{(x^2+\delta^2)^3}\omega(x)dx.$$

Определим знакопеременное ядро

$$Q(x) = \frac{3x^3 - x}{(x^2+1)^3} = \mathrm{Im}\,\frac{x}{(x-i)^3}\,,$$

где $\int\limits_0^\infty Q(x)dx = \frac{1}{2}$, тогда

$$\mathrm{Im}(III) = \frac{1}{\delta}\int_0^{r_0} \frac{1}{\delta}Q(\frac{x}{\delta})\omega(x)dx = \frac{1}{\delta}\int_0^{r_0/\delta} Q(x)\omega(\delta x)dx.$$

Возьмем $\delta$ столь малым, чтобы $\int\limits_0^a Q(x)dx \geqslant \frac{1}{4}$, если $a \geqslant r_0/\delta$.

При $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ядро $Q(x)$ отрицательно, поэтому оценим монотонную функцию $\omega(\delta x)$ сверху:

$$\omega(\delta x) \leqslant \omega(\frac{\delta}{\sqrt{3}}).$$

Если $x \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$, то ядро $Q(x)$ положительно, поэтому оценим монотонную функцию $\omega(\delta x)$ снизу:

$$\omega(\delta x) \geqslant \omega(\frac{\delta}{\sqrt{3}}).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(III) \geqslant \frac{1}{\delta}\omega(\frac{\delta}{\sqrt{3}})\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} Q(x)dx + \frac{1}{\delta}\omega(\frac{\delta}{\sqrt{3}})\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{r_0/\delta} Q(x)dx \\ = \frac{1}{\delta}\omega(\frac{\delta}{\sqrt{3}})\int_0^{r_0/\delta} Q(x)dx \geqslant \frac{1}{4\delta}\omega(\frac{\delta}{\sqrt{3}}),\end{aligned}$$

что и требовалось.

## Литература

1. V. Cruz, J. Mateu, J. Orobitg, *Beltrami equation with coefficient in Sobolev and Besov spaces.* — Canad. J. Math. **65** (2013), 1217–1235.
2. V. Crus, X. Tolsa, *Smoothness of the Beurling transform in Lipschitz domains.* — J. Funct. Anal. **262**, No. 10 (2012), 4423–4457.
3. N. Depauw, *Poche de tourbillon pour Euler 2D dans un ouvert à bord.* — J. Math. Pures Appl. **78**, No. 3 (1999), 313–351.
4. T. Iwaniec, *The best constant in a BMO-inequality for the Beurling–Ahlfors transform.* — Mich. Math. J. **34** (1987), 407–434.
5. S. Kislyakov, N. Kruglyak, *Extremal problems in interpolation theory, Whitney–Besicovitch coverings, and singular integrals*, IMPAN Monogr. Mat. (N. S.), 74, Birkhauser/Springer Basel AG, Basel (2013), x+316 pp.
6. J. Mateu, J. Orobitg, J. Verdera, *Extra cancellation of even Calderon-Zygmund operators and quasiconformal mappings.* — J. Math. Pures Appl. **(9) 91**, No. 4 (2009), 402–431.
7. X. Tolsa, *Regularity of $C^1$ and Lipschitz domains in terms of the Beurling transform.* — J. Math. Pures Appl. **(9) 100**, No. 2 (2013), 137–165.
8. A. Tumanov, *Commutators of singular integrals, the Bergman projection, and boundary regularity of elliptic equations in the plane*, `http://arxiv.org/abs/1406.0258`

Vasin A. V. Regularity of the Beurling transform in smooth domains.

The relationship between smoothness properties of the boundary of a domain $\Omega$ and the boundedness of the Beurling transform in the corresponding Lipschitz classes $\mathrm{Lip}(\omega)$ for the case of a Dini-regular modulus of continuity $\omega$ is studied. The result is sharp. Our motivation arises from the work of Mateu, Orobitg and Verdera.

Государственный университет
морского и речного флота,
Санкт-Петербург
*E-mail*: andrejvasin@gmail.com

Поступило 3 августа 2015 г.