Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

Т. А. Болохов

СВОЙСТВА РАДИАЛЬНОЙ ЧАСТИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ПРИ $l = 1$ В СПЕЦИАЛЬНОМ СКАЛЯРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ

Введение

Радиальная часть оператора Лапласа

$$T_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad r \geqslant 0, \quad l = 0, 1, \ldots,$$

появляется в результате разделения переменных при переносе действия трехмерного оператора Лапласа Δ на радиальные компоненты разложения скалярных функций по сферическим гармоникам Y_{lm}. Если функция $f(\vec{x})$ представляется в виде суммы

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}(r, \Omega)) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant l} f_{lm}(r) Y_{lm}(\Omega), \quad r \geqslant 0, \quad \Omega \in \mathbb{S}^2,$$

то оператор Лапласа действует на радиальные компоненты $f_{lm}(r)$ как оператор T_l:

$$\Delta f(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} \sum_k \frac{d^2}{dx_k^2} f(\vec{x}) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant l} T_l f_{lm}(r) Y_{lm}(\Omega).$$

Похожие формулы верны и для действия оператора Лапласа на поперечные трехкомпонентные векторные функции, то есть функции, для которых выполнено условие

$$\vec{f}(\vec{x}): \quad \sum_k \frac{\partial f^k}{\partial x_k} = 0.$$

Ключевые слова: оператор Лапласа в сферических координатах, поперечное подпространство, векторные сферические функции, самосопряженные расширения.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 14-11-00598.

Такие функции в сферических координатах параметризуются с помощью двух наборов радиальных компонент $u_{lm}(r)$, $\phi_{lm}(r)$:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \Big(\widetilde{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\Big) + \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}, \qquad (1)$$

где $\widetilde{l} = \sqrt{l(l+1)}$, а $\vec{\Upsilon}(\Omega)$, $\vec{\Psi}(\Omega)$, $\vec{\Phi}(\Omega)$ – это (нормированные) векторные сферические гармоники [1]:

$$\vec{\Upsilon}_{lm} = \frac{\vec{x}}{r}Y_{lm}, \qquad 0 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \qquad (2)$$

$$\vec{\Psi}_{lm} = \widetilde{l}^{-1} r\vec{\partial}Y_{lm}, \qquad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \qquad (3)$$

$$\vec{\Phi}_{lm} = \widetilde{l}^{-1}(\vec{x}\times\vec{\partial})Y_{lm}, \qquad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \qquad (4)$$

которые, как и Y_{lm}, являются функциями только угловых переменных Ω. В представлении (1) действие оператора Лапласа на $\vec{f}(\vec{x})$ также сводится к действию операторов T_l на $u_{lm}(r)$ и $\phi_{lm}(r)$ (подробнее см. [2]).

Скалярное произведение из пространства функций на $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{f},\vec{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{f}(\vec{x})}\cdot\vec{g}(\vec{x})\, d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_j \overline{f^j(\vec{x})} g^j(\vec{x})\, d^3x \qquad (5)$$

естественно переносится и на множества функций $u_{lm}(r)$, $\phi_{lm}(r)$:

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}, \frac{\widetilde{\phi}_{l'm'}}{r}\vec{\Phi}_{l'm'}\Big) \\ &\qquad = \int\limits_0^\infty \overline{\phi_{lm}}\widetilde{\phi}_{l'm'}\, dr\, \delta_{ll'}\delta_{mm'} \equiv (\phi_{lm}, \widetilde{\phi}_{l'm'})\, \delta_{ll'}\delta_{mm'},\end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}&\Big(\widetilde{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}, \widetilde{l'}\frac{v_{l'm'}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{l'm'} + \frac{v'_{l'm'}}{r}\vec{\Psi}_{l'm'}\Big) \\ &\qquad = \int\limits_0^\infty \Big(\overline{u'}v' + \frac{l(l+1)}{r^2}\overline{u}v\Big) dr\, \delta_{ll'}\delta_{mm'} \equiv \langle u,v\rangle_l\, \delta_{ll'}\delta_{mm'}.\end{aligned} \qquad (7)$$

Из этого следует, что свойства поперечного оператора Лапласа в сферических координатах определяются свойствами радиальных операторов T_l в скалярных произведениях (6) и (7). Первый случай совпадает с хорошо изученным действием скалярного Лапласиана в подпространствах, соответствующих моментам $l \geqslant 1$, в то время как второй случай оказывается менее тривиальным. В работе [2] квадратичная форма поперечного оператора Лапласа, перенесенная на функции u_{lm}, а именно,

$$\Big(\tilde{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm},\, \tilde{l'}\frac{T_l u_{l'm'}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{l'm'} + \frac{(T_l u_{l'm'})'}{r}\vec{\Psi}_{l'm'}\Big), \tag{8}$$

рассматривается как форма в скалярном произведении

$$(u,v) = \int\limits_0^\infty \overline{u(r)}v(r)dr. \tag{9}$$

При этом соответствующий (по теореме Фридрихса–Стоуна [3]) самосопряженный оператор оказывается дифференциальным оператором четвертого порядка. При $l = 1, 2$ такие операторы и их квадратичные формы имеют нетривиальные самосопряженные расширения. Однако, оказывается, что при $l = 1$ квадратичная форма (8) и оператор T_1 имеют нетривиальные расширения и в скалярном произведении, перенесенном из пространства $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$\langle u,v\rangle_l = \int\limits_0^\infty \Big(\overline{u'}v' + \frac{l(l+1)}{r^2}\overline{u}v\Big)\,dr. \tag{10}$$

(Эта идея высказывалась в статье [2], но не была развита.) Такое утверждение, в частности, позволяет рассмотреть физическую модель, аналогичную [4], для случая поперечного поля. Описание резольвенты и спектральных свойств расширений оператора T_1 приведено во второй части настоящей работы.

В третьей части исследуются расширения оператора, соответствующего квадратичной форме

$$Q^{-1}(u) = \iint\limits_0^\infty \overline{u(r)}T_l^{-1}(r,s)u(s)\,dr\,ds, \quad l = 1, \tag{11}$$

рассматриваемой в скалярном произведении (10). В скалярном произведении (9) эта форма является квадратичной формой оператора, обратного к самосопряженному в существенном оператору $T_l|_{l=1}$, поэтому она не имеет расширений. Эта форма не имеет расширений и в скалярном произведении (10), однако, в этом случае она является расширением некоторой другой формы, определенной на плотном по норме (10) множестве.

Квадратичные формы вида (8) и (11) возникают, соответственно, в потенциальной и кинетической частях гамильтониана электромагнитного поля в калибровке Кулона, записанного в сферических координатах. Поэтому явные формулы для соответствующих им самосопряженных операторов представляют интерес для лучшего понимания процесса квантования данной модели.

§1. Предварительные сведения и обозначения

Для упрощения записи далее мы будем опускать индекс орбитального момента в обозначениях операторов и скалярного произведения. Кроме того, под выражением "оператор T" мы будем понимать дифференциальную операцию

$$T = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big|_{l=1} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r^2}$$

без указания области определения, а под круглыми скобками (9) – соответствующий интеграл, там где он сходится.

Для построения "собственных функций" оператора T введем ковариантные производные

$$D \equiv r\frac{d}{dr}r^{-1} = \frac{d}{dr} - \frac{1}{r}, \quad D^* \equiv -r^{-1}\frac{d}{dr}r = -\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}.$$

Несложно увидеть, что для T, D и D^* выполняются соотношения

$$T = DD^*, \quad TD = DD^*D, \quad D^*D = -\frac{d^2}{dr^2}. \tag{12}$$

Далее мы будем использовать следующие разложение и интегралы, включающие производную D и экспоненты:

$$\sum_n \alpha_n D e^{\sigma_n r} \underset{r\to 0}{\sim} \sum_n \alpha_n \Big(-r^{-1} + \sigma_n^2 \frac{r}{2} + \sigma_n^3 \frac{r^2}{3} + \dots \Big), \tag{13}$$

$$\int_0^\infty \sum_n \frac{\alpha_n}{r} D e^{\sigma_n r}\, dr = -\sum_n \alpha_n \sigma_n, \quad \sum_n \alpha_n = 0, \tag{14}$$

$$\int_0^\infty \sum_n r^2 \alpha_n D e^{\sigma_n r}\, dr = -3\sum_n \frac{\alpha_n}{\sigma_n^2}. \tag{15}$$

Введем также обозначение

$$T^{-1} = T^{-1}(r,s) = \frac{r^2}{3s}\theta(s-r) + \frac{s^2}{3r}\theta(r-s)$$

для ядра оператора, обратного к самосопряженному в существенном оператору, который возникает при рассмотрении действия T в скалярном произведении (9). Это свойство ядра T^{-1} подтверждается формальным вычислением

$$\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r^2}\Big)\Big(\frac{r^2}{3s}\theta(s-r) + \frac{s^2}{3r}\theta(r-s)\Big) = \delta(r-s).$$

Далее обозначим символом $\mathcal{H}$ гильбертово пространство функций на полуоси, порожденное скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\mathcal{H} = \Big\{u(r) : \int\limits_0^\infty \Big(|u'|^2 + \frac{2}{r^2}|u|^2\Big)dr < \infty\Big\}.$$

Это пространство состоит из абсолютно непрерывных функций, исчезающих в нуле, для которых интеграл в определении конечен. Если функция v из пространства $\mathcal{H}$ дифференцируема два раза, то для произведения $\langle u,v\rangle$ можно написать формальное равенство

$$\langle u,v\rangle = \int\limits_0^\infty \Big(\overline{\frac{du}{dr}}\frac{dv}{dr} + \frac{2}{r^2}\overline{u}v\Big)dr = \int_0^\infty \overline{u}\Big(-\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2v}{r^2}\Big)dr = (u,Tv). \quad (16)$$

Как уже было сказано, выражение в правой части в общем случае не является скалярным произведением, так как функции u или Tv могут быть не интегрируемыми с квадратом.

1.1. Формулы для резольвенты. Мы будем использовать несколько следствий формулы Стоуна для резольвенты самосопряженного оператора (см., например, [5]). Пусть $R_A(r,s;w)$ – ядро резольвенты самосопряженного оператора A с положительным непрерывным спектром, действующего на функции, заданные на вещественной оси:

$$(A-w)R_A(r,s;w) = \delta(r-s), \quad w \in \mathbb{C}\setminus\sigma(A).$$

Тогда с помощью такого ядра можно написать разложение единицы (соотношение полноты)

$$\delta(r-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \Big(R_A(\eta) - R_A(e^{2\pi i}\eta)\Big)\,d\eta + \sum_n \lim_{w\to w_n} R_A(w)(w_n - w), \tag{17}$$

где w_n – это полюса резольвенты $R(w)$. Если спектр оператора A однократный, то подынтегральное выражение в этой формуле можно переписать в виде квадрата "собственных функций непрерывного спектра":

$$R(r,s;\eta) - R(r,s;e^{2\pi i}\eta) = p_\eta(r)p_\eta(s), \tag{18}$$

а сумму вычетов – в виде суммы квадратов собственных функций точечного спектра:

$$\sum_n \lim_{w\to w_n} R(r,s;w)(w_n - w) = \sum_n q_n(r)q_n(s). \tag{19}$$

При этом для $q_n(r)$, $p_\eta(r)$, кроме соотношения полноты (17), также выполняются соотношения ортогональности

$$\int p_\eta(r)p_\xi(r)dr = \delta(\eta-\xi),$$
$$\int q_n(r)p_\eta(r)dr = 0, \quad \int q_n(r)q_m(r)dr = \delta_{nm}.$$

В случае, когда оператор A самосопряжен, а резольвента $R(w)$ кососимметрична в пространстве со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, для которого выполняется формула (16), в разложения (18), (19) добавляется оператор T, действующий на "правую" переменную s:

$$R(r,s;\eta) - R(r,s;e^{2\pi i}\eta) = p_\eta(r)T_s p_\eta(s),$$
$$\lim_{w\to w_n} R(r,s;w)(w_n - w) = q_n(r)T_s q_n(s),$$

а в соотношениях ортогональности интеграл заменяется на произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

§2. Оператор T в скалярном произведении $\langle\cdot,\cdot\rangle$

В качестве начальной области определения симметрического оператора рассмотрим $\mathcal{W}_0$ — множество гладких функций, такое, что

$$\mathcal{W}_0 = \big\{u(r):\ u \in \mathcal{H},\ Tu \in \mathcal{H},\ u''(0) = 0\big\}.$$

Отметим, что принадлежность Tu к $\mathcal{H}$ для гладкой функции u требует равенства нулю только первой, но не второй производной в нуле, ввиду того, что $Tr^2 = 0$. Поэтому условие $u'(0) = 0$ для функций из $\mathcal{W}_0$ выполняется автоматически, а условие $u''(0) = 0$ записано как отдельное требование.

Определим симметрический оператор $\widetilde{T}$ как сужение действия T на множество $\mathcal{W}_0$: $\widetilde{T} = T|_{\mathcal{W}_0}$. Симметричность проверяется с помощью интегрирования по частям и разложения гладких функций в ряд в окрестности нуля:

$$\langle u, Tv\rangle = \langle Tu, v\rangle + 4(u'v'' - u''v')|_{r=0} = \langle Tu, v\rangle.$$

2.1. Индексы дефекта. Для определения индексов дефекта оператора $\widetilde{T}$ необходимо исследовать ядра сопряженных операторов $\widetilde{T}^* \mp i\rho^2$, $\rho > 0$. Пусть $c_\pm$ – какие-либо векторы из этих ядер, тогда для любого $v \in \mathcal{W}_0$ выполнено равенство

$$\langle c_\pm, (\widetilde{T} \pm i\rho^2)v\rangle = 0, \quad v \in \mathcal{W}_0. \tag{20}$$

Несложно увидеть, что в качестве $c_\pm$ можно взять векторы

$$c_\pm = D\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\rho r\} + r^{-1}$$

– эти функции лежат в $\mathcal{W}_0$ и удовлетворяют соотношению (20):

$$\begin{aligned}
&\langle D\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\rho r\} + r^{-1}, (\widetilde{T} \pm i\rho^2)g\rangle \\
&\quad= \Big(T(D\exp\{e^{\frac{3\pi i}{4}}\rho r\} + r^{-1}), (T \pm i\rho^2)g\Big) \\
&\quad= \Big((T \pm i\rho^2)T(D\exp\{e^{\frac{3\pi i}{4}}\rho r\} + r^{-1}), g\Big) \\
&\quad= \Big((T \pm i\rho^2)TD\exp\{e^{\frac{3\pi i}{4}}\rho r\}, g\Big) \\
&\quad= \Big(T(T \pm i\rho^2)D\exp\{e^{\frac{3\pi i}{4}}\rho r\}, g\Big) \\
&\quad= \Big(TD(-\frac{d^2}{dr^2} \pm i\rho^2)\exp\{e^{\frac{3\pi i}{4}}\rho r\}, g\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь первое равенство – это соотношение (16), второе получается с помощью интегрирования по частям и требует условия $g''(0) = 0$. Третье следует из того, что $Tr^{-1} = 0$, четвертое – это коммутация операций T и $T \pm i\rho^2$, а пятое следует из соотношения (12). Отсутствие других элементов в ядрах операторов $\widetilde{T}^* \mp i\rho^2$ следует из теории дифференциальных уравнений для распределений (см., например, [6]). Уравнение четвертого порядка имеет четыре линейно независимых решения, одно из них предъявлено, а три другие, r^{-1}, r^2, $D\exp\{e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\rho r\}$, либо расходятся в нуле, либо не интегрируемы на бесконечности даже по норме $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Таким образом, получаем, что симметрический оператор $\widetilde{T}$ имеет индексы дефекта $(1,1)$ и, следовательно, имеет нетривиальные самосопряженные расширения.

2.2. Самосопряженные расширения оператора $\widetilde{T}$. Стандартный способ построения самосопряженных расширений симметрического оператора — преобразование Кэли (см., например, [7]). Мы не будем углубляться в эту технику и просто предъявим области определения и расширенные операторы. Итак, пусть

$$\mathcal{W}_\kappa = \{u(r):\ u \in \mathcal{H},\ T_\kappa u \in \mathcal{H},\ 3u''(0) = 4\kappa u'(0)\}, \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

– область определения, на которой расширенный оператор T_κ действует как дифференциальная операция T с некоторой нелокальной добавкой:

$$T_\kappa u = Tu - \frac{2}{r}u'(0) = -\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r^2}u - \frac{2}{r}u'(0).$$

Очевидно, что $\widetilde{T} \subset T_\kappa$, так как $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_\kappa$ и $T_\kappa u = \widetilde{T}u$, если $u \in \mathcal{W}_0$. Симметричность оператора T_κ на $\mathcal{W}_\kappa$ проверяется непосредственным вычислением, в результате которого получается, что

$$\langle u, T_\kappa v\rangle = \langle T_\kappa u, v\rangle + 5(u'v'' - u''v')|_{r=0} = \langle T_\kappa u, v\rangle.$$

Здесь $u'v'' - u''v'|_{r=0} = 0$, если для u и v выполняются граничные условия из $\mathcal{W}_\kappa$. Самосопряженность T_κ на $\mathcal{W}_\kappa$ следует из разложения $c_\pm$ в окрестности нуля с помощью формулы (13):

$$c_\pm(r) \sim \mp i\rho^2\Big(\frac{r}{2} + e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\rho\frac{r^2}{3} + \dots\Big)$$

– такие функции не удовлетворяют граничным условиям из $\mathcal{W}_\kappa$ ни при каких ρ и κ, и, следовательно, ядра сопряженных операторов $T_\kappa^* \mp i\rho^2$, которые содержатся в ядрах $\widetilde{T}^* \mp i\rho^2$, тривиальны.

2.3. Резольвента оператора T_κ. Для исследования спектральных характеристик оператора T_κ воспользуемся свойствами ядра его резольвенты. Мы будем искать это ядро как функцию $R(r, s; z)$ трех переменных, удовлетворяющую уравнению

$$(T_\kappa - z^2)R(r, s; z) = \delta(r - s), \quad 0 < \arg z < \pi, \tag{21}$$

граничным условиям из $\mathcal{W}_\kappa$ по переменной r, условиям кососимметричности по отношению к скалярному произведению (10), а также убывающую на бесконечности по r и s. Такая функция может быть построена с помощью двух решений $h(r)$, $g(r)$ однородного уравнения

$$(T - z^2)h(r) = 0, \quad (T - z^2)g(r) = 0,$$
$$h(r) = De^{-izr} + \beta(z)De^{izr}, \quad g(r) = De^{izr}$$

следующим образом:

$$R(r, s; z) = \frac{1}{W}\Big(h(r)g(s)\theta(s - r) + h(s)g(r)\theta(r - s) + \frac{1 + \beta}{r}g(s)\Big), \tag{22}$$

где

$$W(z) = h'(r)g(r) - h(r)g'(r) = -2iz^3.$$

Проверку того, что выражение (22) подходит под определение резольвенты, начнем с граничных условий. Экспоненты $g(r)$, $g(s)$, которые выделяются θ-функцией при $r \to \infty$ или $s \to \infty$, а также функция r^{-1} убывают на бесконечности при $0 < \arg z < \pi$. При фиксированном s, в окрестности нуля по r, второе слагаемое в (22) пропадает, а оставшиеся дают разложение в ряд

$$\frac{g(s)}{W}\Big(h(r) + \frac{1 + \beta}{r}\Big) \sim \frac{g(s)}{W}\Big(-\frac{z^2}{2}(1 + \beta)r + \frac{iz^3}{3}(1 - \beta)r^2 + \dots\Big), \tag{23}$$

которое удовлетворяет граничным условиям из $\mathcal{W}_\kappa$, если

$$\beta(z) = \frac{z - i\kappa}{z + i\kappa}.$$

Разложение (23) также показывает, что последнее (нелокальное) слагаемое в операторе T_κ при применении к $R(r, s; z)$ дает

$$-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial \widetilde{r}}R(\widetilde{r}, s; z)\Big|_{\widetilde{r}=0} = z^2\frac{(1 + \beta)}{Wr}g(s). \tag{24}$$

Далее, первые слагаемые в (22) являются стандартной комбинацией двух решений однородного уравнения для резольвенты дифференциального оператора второго порядка, поэтому они удовлетворяют уравнению

$$(T-z^2)\frac{1}{W}\Big(h(r)g(s)\theta(s-r)+h(s)g(r)\theta(r-s)\Big)=\delta(r-s). \qquad (25)$$

Последнее слагаемое в (22) зануляется оператором T, поэтому

$$(T-z^2)\frac{1+\beta}{Wr}g(s)=-z^2\frac{1+\beta}{Wr}g(s), \qquad (26)$$

что сокращает вклад (24) от нелокальной добавки в T_κ. Итого, суммируя слагаемые (24), (25) и (26), получаем, что выражение (22) удовлетворяет уравнению (21).

Для проверки кососимметричности ядра (22) по отношению к скалярному произведению (10), которая в терминах переменной z выглядит как

$$R^*(r,s;z)=R(s,r;-\overline{z}),$$

представим $R(r,s;z)$ в виде действия оператора T^{-1} на некоторое заведомо кососимметричное ядро $S(r,s;z)$:

$$\begin{aligned}&R(r,s;z)\\&=\int T^{-1}(r,t)\Big(\frac{i}{2z}\Big(h(t)g(s)\theta(s-t)+h(s)g(t)\theta(t-s)\Big)+\delta(t-s)\Big)\,dt=T^{-1}S,\\&\qquad\qquad\overline{S(s,r;z)}=S(r,s;-\overline{z}).\end{aligned}$$

Тогда для произвольных $u,v\in\mathcal{W}_\kappa$ можно воспользоваться соотношением (16) и записать следующее равенство:

$$\begin{aligned}\langle u,R(z)v\rangle&=(u,TR(z)v)=(u,S(z)v)\\&=(S(-\overline{z})u,v)=(TR(-\overline{z})u,v)=\langle R(-\overline{z})u,v\rangle,\end{aligned}$$

где, как указывалось в части 1, круглые скобки обозначают интеграл (9).

2.4. Спектральное разложение оператора T_κ. В случае, когда резальвента R записана в терминах переменной $z=\sqrt{w}$ и удовлетворяет уравнению (21), разложение единицы (17) переписывается в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\delta(r-s) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \Big(R(r,s;\lambda) - R(r,s;-\lambda)\Big) 2\lambda\, d\lambda \\
&\quad + \sum_n 2z_n \lim_{z\to z_n} R(r,s;z)(z_n - z) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \widetilde{p}_\lambda(r) T \widetilde{p}_\lambda(s)\, d\lambda + \sum_n q_n(r) T q_n(s).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

При этом соотношения ортогональности для $\widetilde{p}_\lambda$ остаются выполненными и для параметра λ:

$$
\int \widetilde{p}_\lambda(r) T \widetilde{p}_\mu(r) dr = \delta(\lambda - \mu), \tag{28}
$$

$$
\int q_n(r) T p_\lambda(r) dr = 0, \quad \int q_n(r) T q_m(r) dr = \delta_{nm}. \tag{29}
$$

Для вычисления собственных функций точечного спектра посмотрим на полюсы резольвенты $R(\lambda)$: единственный полюс содержится в коэффициенте $\beta(z)$, находится в точке

$$
z_0 = -i\kappa
$$

и попадает в верхнюю полуплоскость только при $\kappa < 0$. В этом случае

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} 2z_0 R(r,s;z)(z_0 - z) =& \frac{4z_0^2}{2iz_0^3}\Big(De^{\kappa r} + \frac{1}{r}\Big) De^{\kappa s} \\
=& -\frac{2}{\kappa^3}\Big(De^{\kappa r} + \frac{1}{r}\Big) T \Big(De^{\kappa s} + \frac{1}{s}\Big),
\end{aligned}
$$

и, таким образом, получаем простое выражение для нормированной собственной функции точечного спектра

$$
q(r) = \sqrt{-\frac{2}{\kappa^3}}\Big(De^{\kappa r} + \frac{1}{r}\Big). \tag{30}
$$

Для подсчета спектральной плотности непрерывной части спектра проведем следующее вычисление:

$$\frac{2\lambda}{2\pi i}\Big(R(r,s;\lambda)-R(r,s;-\lambda)\Big)=\frac{-2\lambda}{2\pi i 2i\lambda^3}\bigg(\frac{1+\beta_\lambda}{r}De^{i\lambda s}+\frac{1+\beta_\lambda^{-1}}{r}De^{-i\lambda s}$$
$$+(De^{-i\lambda r}+\beta_\lambda De^{i\lambda r})De^{i\lambda s}\theta(s-r)+(De^{-i\lambda s}+\beta_\lambda De^{i\lambda s})De^{i\lambda r}\theta(r-s)$$
$$+(De^{i\lambda r}+\beta_\lambda^{-1}De^{-i\lambda r})De^{-i\lambda s}\theta(s-r)+(De^{i\lambda s}+\beta_\lambda^{-1}De^{-i\lambda s})De^{-i\lambda r}\theta(r-s)\bigg)$$
$$=\frac{1}{2\pi\lambda^2}\Big(\frac{1+\beta_\lambda}{r}De^{i\lambda s}+\frac{1+\beta_\lambda^{-1}}{r}De^{-i\lambda s}+De^{-i\lambda r}De^{i\lambda s}+De^{i\lambda r}De^{-i\lambda s}$$
$$+\beta_\lambda De^{i\lambda r}De^{i\lambda s}+\beta_\lambda^{-1}De^{-i\lambda r}De^{-i\lambda s}\Big)$$
$$=\frac{1}{2\pi\lambda^2}\Big(\beta_\lambda^{\frac12}De^{i\lambda r}+\beta_\lambda^{-\frac12}De^{-i\lambda r}+\frac{\beta_\lambda^{\frac12}+\beta_\lambda^{-\frac12}}{r}\Big)\Big(\beta_\lambda^{\frac12}De^{i\lambda s}+\beta_\lambda^{-\frac12}De^{-i\lambda s}\Big),$$

где

$$\beta_\lambda=\beta(\lambda)=\frac{\lambda-i\kappa}{\lambda+i\kappa}\equiv e^{2i\zeta}.$$

Полученной спектральной плотности соответствует следующая вещественная “собственная функция непрерывного спектра” $\widetilde{p}_\lambda(r)$ из разложения (27):

$$\widetilde{p}_\lambda(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\Big(De^{i\zeta+i\lambda r}+De^{-i\zeta-i\lambda r}+\frac{e^{i\zeta}+e^{-i\zeta}}{r}\Big). \qquad (31)$$

§3. Оператор T^{-1}

Для исследования квадратичной формы (11) оператора T^{-1} перепишем эту форму в терминах скалярного произведения (10):

$$Q^{-1}(u)=(u,T^{-1}u)=(u,TT^{-2}u)=\langle u,T^{-2}u\rangle,$$

где

$$T^{-2}(r,s)=\int T^{-1}(r,t)T^{-1}(t,s)\,dt$$
$$=\frac16\Big(r^2s-\frac{r^4}{5s}\Big)\theta(s-r)+\frac16\Big(s^2r-\frac{s^4}{5r}\Big)\theta(r-s).$$

С помощью действия ядра T^{-2} на множестве

$$\mathcal{W}_0 = \Big\{ u(r): \ u \in \mathcal{H}, \ \langle T^{-2}u, T^{-2}u \rangle < \infty, \ \int\limits_0^\infty \frac{u(r)}{r}\, dr = 0 \Big\}$$

определим симметрический оператор $\widetilde{T}^{-2} = T^{-2}|_{\mathcal{W}_0}$. Множество $\mathcal{W}_0$ плотно в $\mathcal{H}$ и замкнуто по норме графика оператора $\widetilde{T}^{-2}$ (последнее утверждение требует отдельного доказательства). Симметричность оператора $\widetilde{T}^{-2}$ следует из построения и гладкости его ядра по r при фиксированном s:

$$\langle u, \widetilde{T}^{-2}v \rangle = (u, TT^{-2}v) = (u, T^{-1}v) = (T^{-1}u, v) = \langle \widetilde{T}^{-2}u, v \rangle.$$

Также отметим, что из требования $\langle T^{-2}u, T^{-2}u \rangle < \infty$ следует условие

$$\int\limits_0^\infty r^2 u(r)\, dr = 0,$$

которое далее будет ослаблено.

3.1. Индексы дефекта оператора $\widetilde{T}^{-2}$. Для вычисления индексов дефекта воспользуемся вспомогательной формулой

$$\int\limits_0^\infty T^{-2}(r,s) D e^{\sigma s}\, ds = \frac{1}{\sigma^4} D(e^{\sigma r} - 1) - \frac{r}{2\sigma^2}, \quad \operatorname{Re}\sigma < 0.$$

В уравнении для векторов $c_\pm$ из ядер сопряженных операторов перекинем действие $T^{-2} \pm i\rho^{-4}$ и прокоммутируем его с T:

$$0 = \langle c_\pm, (\widetilde{T}^{-2} \pm i\rho^{-4})u \rangle = \Big(T(T^{-2} \mp i\rho^{-4})c_\pm, u \Big), \quad u \in \mathcal{W}_0. \tag{32}$$

В качестве векторов $c_\pm$ можно взять следующие комбинации экспонент и функции r^{-1}, убывающие на бесконечности и равные нулю в начале координат:

$$c_\pm(r) = \alpha_\pm D \exp\{e^{\mp\frac{5i}{8}\pi}\rho r\} + \beta_\pm D \exp\{e^{\mp\frac{9i}{8}\pi}\rho r\} - \frac{\alpha_\pm + \beta_\pm}{r}.$$

Тогда, с помощью вспомогательной формулы, уравнение (32) продолжается как

$$\begin{aligned}\big(T(T^{-2} \mp i\rho^{-4})c_{\pm}, u\big) &= e^{\pm\frac{5i}{4}\pi}\frac{\beta_{\pm} - \alpha_{\pm}}{2}\big(\rho^{-2}Tr, u\big) \\ &= e^{\pm\frac{5i}{4}\pi}\frac{\beta_{\pm} - \alpha_{\pm}}{\rho^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{u(r)}{r}\,dr = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, симметрический оператор $\tilde{T}^{-2}$ имеет индексы дефекта (2,2).

3.2. Самосопряженные расширения оператора $\tilde{T}^{-2}$. Самосопряженные расширения симметрического оператора с индексами дефекта (2,2) перечисляются точками многообразия группы Ли $U(2)$. Далее мы будем рассматривать только некоторую часть этого множества, а именно, расширения, заданные на области определения

$$\mathcal{W}_{\kappa} = \{u(r):\ u \in \mathcal{H},\, T_{\kappa}^{-2}u \in \mathcal{H},\, \kappa^3\int_0^{\infty} r^2 u\,dr = 6\int_0^{\infty}\frac{u}{r}\,dr\}, \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

которая, при ненулевом κ, исключает асимптотику вида r^{-1} на бесконечности. Подобно тому, как резольвенты (обратные операторы) самосопряженных расширений некоторого дифференциального оператора отличаются на одномерные проекторы (см. [8]), разница между этими расширениями также имеет простой вид. Определим действие оператора T_{κ}^{-2} как действие ядра T^{-2} с некоторой одномерной добавкой

$$T_{\kappa}^{-2}(r,s) = T^{-2}(r,s) - \frac{r}{\kappa^3 s}.$$

Симметричность T_{κ}^{-2} следует из симметричности T^{-2} и симметричности добавки $-\frac{r}{\kappa^3 s}$ относительно произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Самосопряженность (при условии доказательства структуры ядер сопряженных операторов для $\tilde{T}^{-2}$) следует из соотношений, которые можно получить с помощью формул (14), (15):

$$\int_0^{\infty}\frac{d_{\pm}}{r}dr = \sqrt{2}e^{\pm\frac{5i}{8}\pi}\rho, \qquad \int_0^{\infty} r^2 d_{\pm}dr = 6e^{\pm\frac{i}{4}\pi}\rho^{-2},$$

где

$$d_{\pm}(r) = D\exp\{e^{\mp\frac{5i}{8}\pi}\rho r\} - D\exp\{e^{\mp\frac{9i}{8}\pi}\rho r\}.$$

Векторы, пропорциональные $d_{\pm}$, ни при каком вещественном κ не попадают в $\mathcal{W}_{\kappa}$.

В заключение приведем простое выражение для квадратичной формы оператора T_κ^{-2} без использования скалярного произведения (9):

$$\begin{aligned} Q_\kappa^{-1}(u) &= \langle u, T_\kappa^{-2} u\rangle \\ &= (u, TT_\kappa^{-2}u) = \iint\limits_0^\infty \overline{u(r)}\Big(T^{-1}(r,s) - \frac{2}{\kappa^3 rs}\Big)u(s)\,dr\,ds. \end{aligned}$$

Это выражение показывает, что форма (11), рассматриваемая в скалярном произведении (9), соответствует значению $\kappa = \pm\infty$. В то же время все формы с параметром κ, отличным от нуля, являются расширением "максимальной" формы $Q_\kappa^{-1}|_{\kappa=-0}$, которая определена на множестве функций, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^\infty \frac{u}{r} dr = 0$.

3.3. Резольвента оператора T_κ^{-2}. Для исследования спектральных свойств оператора T_κ^{-2} построим выражение для ядра его резольвенты $R(r,s;z)$ в терминах переменной z^{-4}:

$$(T_\kappa^{-2} - z^{-4})R(r,s;z) = \delta(r-s), \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}. \tag{33}$$

Мы потребуем от этого ядра выполнения граничных условий из $\mathcal{W}_\kappa$ по переменной r, убывания на бесконечности по переменным r, s, а также кососимметричности по этим переменным относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Мы подойдем к решению этой задачи следующим образом. Формальное равенство

$$(T^{-2} - z^{-4})^{-1} = -\frac{z^4 T^2}{T^2 - z^4} = -\frac{z^4}{2}\Big(\frac{1}{T-z^2} + \frac{1}{T+z^2}\Big)T$$

подсказывает, что резольвенту можно пытаться искать в виде суммы

$$R(r,s;z) = -\frac{z^4}{2}\Big(R_-(z) + R_+(z) + \widetilde{R}(z)\Big)T, \tag{34}$$

где $R_\pm$ и $\widetilde{R}$ – это симметричные функции, такие что

$$(T \pm z^2)R_\pm = \delta(r-s), \quad (T^2 - z^4)\widetilde{R} = 0, \tag{35}$$

$$\overline{R_\pm(r,s;z)} = R_\mp(s,r;i\overline{z}), \quad \overline{\widetilde{R}(r,s;z)} = \widetilde{R}(s,r;i\overline{z}). \tag{36}$$

В таком представлении кососимметричность относительно скалярного произведения (9) для $R(r,s;z)$, то есть свойство

$$R^*(r,s;z) = R(s,r;i\overline{z}),$$

будет следовать автоматически из формулы (16). Подберем явный вид функций $R_\pm$ и $\widetilde{R}$ таким образом, чтобы для суммы (34) выполнялись граничные условия по r. Функции $De^{\pm izr}$, $De^{\pm zr}$ удовлетворяют однородным уравнениям

$$(T+z^2)De^{\pm zr}=0, \quad (T-z^2)De^{\pm izr}=0,$$

и при этом De^{izr}, De^{-zr} быстро убывают при $r\to\infty$ в секторе $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$. Будем искать $R_\pm$ и $\widetilde{R}$ в следующем виде:

$$R_+(r,s;z)=\frac{1}{W_+}\Big(De^{zr}De^{-zs}\theta(s-r)+De^{zs}De^{-zr}\theta(r-s)\Big), \tag{37}$$

$$R_-(r,s;z)=\frac{1}{W_-}\Big(De^{-izr}De^{izs}\theta(s-r)+De^{-izs}De^{izr}\theta(r-s)\Big), \tag{38}$$

$$\widetilde{R}(r,s;z)=\frac{\beta_-(z)}{W_-}\Big(De^{-zr}De^{izs}\theta(s-r)+De^{-zs}De^{izr}\theta(r-s)\Big) \tag{39}$$

$$+\frac{\beta_+(z)}{W_+}\Big(De^{izr}De^{-zs}\theta(s-r)+De^{izs}De^{-zr}\theta(r-s)\Big) \tag{40}$$

$$+\frac{\alpha_+}{W_+}De^{-zr}De^{-zs}+\frac{\alpha_-}{W_-}De^{izr}De^{izs}, \tag{41}$$

где $W_\pm$ – это вронскианы,

$$W_+(z)=\frac{\partial}{\partial r}De^{zr}De^{-zr}-De^{zr}\frac{\partial}{\partial r}De^{-zr}=-2z^3,$$
$$W_-(z)=\frac{\partial}{\partial r}De^{-izr}De^{izr}-De^{-izr}\frac{\partial}{\partial r}De^{izr}=-2iz^3.$$

В формировании граничных условий резольвенты $R(r,s;z)$ по переменной r при фиксированной переменной s участвуют только первые слагаемые выражений (37), (38), (39), (40), которые вместе с (41) можно сгруппировать в два слагаемых

$$-\frac{z^4TDe^{-zs}}{2W_+}D(e^{zr}+\alpha_+e^{-zr}+\beta_+e^{izr})$$
$$-\frac{z^4TDe^{izs}}{2W_-}D(e^{-izr}+\alpha_-e^{izr}+\beta_-e^{-zr}),$$

пропорциональных разным функциям от s. Граничные условия из $\mathcal{W}_\kappa$ должны быть выполнены для каждого из них. Отсюда, с помощью соотношений (14), (15), получаются уравнения на $\alpha_\pm(z)$, $\beta_\pm(z)$:

$$1 + \alpha_+ + \beta_+ = 1 + \alpha_- + \beta_- = 0,$$
$$\kappa^3(1 + \alpha_- - \beta_-) = 2z^3(i - i\alpha_- + \beta_-),$$
$$\kappa^3(1 + \alpha_+ - \beta_-) = 2z^3(1 - \alpha_+ + i\beta_+).$$

Такие уравнения имеют единственное решение:

$$\alpha_- = -\frac{\kappa^3 + z^3(1-i)}{\kappa^3 + z^3(1+i)}, \quad \beta_- = \frac{-2iz^3}{\kappa^3 + z^3(1+i)} = \frac{W_-(z)}{d(z)}, \tag{42}$$
$$\alpha_+ = -\frac{\kappa^3 + z^3(i-1)}{\kappa^3 + z^3(1+i)}, \quad \beta_+ = \frac{-2z^3}{\kappa^3 + z^3(1+i)} = \frac{W_+(z)}{d(z)}, \tag{43}$$

где $d(z)$ – это общий знаменатель (определитель),

$$d(z) = \kappa^3 + z^3(1+i).$$

Из явного вида функций $\beta_\pm(z)$ сразу получается “магическое” соотношение

$$\frac{\beta_-(z)}{W_-(z)} = \frac{\beta_+(z)}{W_+(z)} = \frac{1}{d(z)},$$

которое позволяет сократить θ-функции в слагаемом $\widetilde{R}(r,s;z)$ и преобразовать его к следующему виду:

$$\widetilde{R}(r,s;z) = \frac{1}{d(z)}\Big(De^{-zr}De^{izs} + De^{-zs}De^{izr}\Big) + \frac{\alpha_+}{W_+}De^{-zr}De^{-zs} + \frac{\alpha_-}{W_-}De^{izr}De^{izs}.$$

А это, в свою очередь, означает, что для $R_\pm$ и $\widetilde{R}$ выполняются уравнения (35) и соотношения (36).

Таким образом, мы показали, что построенная функция (34) удовлетворяет граничным условиям по r, при этом убывание на бесконечности следует из экспоненциального убывания функций De^{izr}, De^{-zr}. Для того, чтобы убедиться, что $R(r,s;z)$ – это действительно резольвента оператора T_κ^{-2}, необходимо проверить выполнение соотношения (33). Оно действительно выполняется, однако мы не будем здесь приводить вычисления ввиду их довольно большого объема.

3.4. Спектральные свойства оператора T_κ^{-2}. Для переменной $z = w^{-1/4}$, которую мы использовали в резольвенте $R(r, s; z)$, разложение единицы (17) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\delta(r-s) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \Big(R(r,s;\lambda) - R(r,s;i\lambda)\Big)\frac{4}{\lambda^5}\,d\lambda \\ &\quad - \sum_n \lim_{z\to z_n} \frac{4}{z_n^5} R(r,s;z)(z_n - z) \qquad (44)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \widetilde{p}_\lambda(r) T \widetilde{p}_\lambda(s)\,d\lambda + \sum_n q_n(r) T q_n(s),\end{aligned}$$

а соотношения ортогональности сохраняют форму (28), (29). Резольвента $R(r, s; z)$ может иметь единственный полюс, определяемый нулем знаменателя $d(z)$, который находится в точке $z_0 = 2^{-1/6}e^{i\pi/4}\kappa$. Для того, чтобы этот полюс попал в сектор $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, необходимо, чтобы выполнялось условие $\kappa > 0$. В этом случае, ввиду того, что слагаемые $R_\pm(z)$ регулярны по z, вычет резольвенты может быть вычислен и преобразован следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{4}{z_0^5}\lim_{z\to z_0} R(r,s;z)(z-z_0) &= -\frac{2}{z_0} T_s \lim_{z\to z_0} \widetilde{R}(r,s;z)(z-z_0) \\ &= -\frac{2}{z_0} T_s \lim_{z\to z_0}\Big(\frac{z-z_0}{d}(De^{-zr}De^{izs} + De^{-zs}De^{izr}) \\ &\quad + \frac{\alpha_+(z-z_0)}{W_+}De^{-zr}De^{-zs} + \frac{\alpha_-(z-z_0)}{W_-}De^{izr}De^{izs}\Big) \\ &= \frac{-2}{3(i+1)z_0^3} T_s(De^{-z_0 r}De^{iz_0 s} + De^{-z_0 s}De^{iz_0 r}) \\ &\quad - \frac{4}{3i(i+1)^3 z_0^3} T_s(De^{-z_0 r}De^{-z_0 s} + De^{iz_0 r}De^{iz_0 s}) \\ &= \frac{-2}{3\kappa^3}\Big(D\exp\{2^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{3i}{4}\pi}\kappa r\} - D\exp\{2^{-\frac{1}{6}}e^{-\frac{3i}{4}\pi}\kappa r\}\Big) \\ &\quad \times T_s\Big(D\exp\{2^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{3i}{4}\pi}\kappa s\} - D\exp\{2^{-\frac{1}{6}}e^{-\frac{3i}{4}\pi}\kappa s\}\Big).\end{aligned}$$

Это произведение соответствует (вещественной) собственной функции однократного точечного спектра

$$q(r) = i\sqrt{\frac{2}{3\kappa^3}}\Big(D\exp\{2^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{3i}{4}\pi}\kappa r\} - D\exp\{2^{-\frac{1}{6}}e^{-\frac{3i}{4}\pi}\kappa r\}\Big). \qquad (45)$$

Непрерывной части спектра соответствует интеграл в первой строке разложения (44). Преобразуем сначала части резольвенты, содержащие $R_\pm(z)$:

$$\begin{aligned} &R_+(r,s;\lambda) + R_-(r,s;\lambda) - R_+(r,s;i\lambda) - R_-(r,s;i\lambda) \qquad (46)\\ &= \frac{1}{2\lambda^3}\Big(- De^{\lambda r}De^{-\lambda s}\theta(s-r) - De^{\lambda s}De^{-\lambda r}\theta(r-s)\\ &\quad + iDe^{-i\lambda r}De^{i\lambda s}\theta(s-r) + iDe^{-i\lambda s}De^{i\lambda r}\theta(r-s)\\ &\quad + iDe^{i\lambda r}De^{-i\lambda s}\theta(s-r) + iDe^{i\lambda s}De^{-i\lambda r}\theta(r-s)\\ &\quad + De^{\lambda r}De^{-\lambda s}\theta(s-r) + De^{\lambda s}De^{-\lambda r}\theta(r-s)\Big)\\ &= \frac{i}{2\lambda^3}\Big(De^{-i\lambda r}De^{i\lambda s} + De^{i\lambda r}De^{-i\lambda s}\Big). \end{aligned}$$

Здесь мы сократили первые два и последние два слагаемых, а в остальных заменили суммы θ-функций с противоположными аргументами на единицу. Для преобразования слагаемого $\widetilde{R}(r,s;z)$ воспользуемся следующими соотношениями для решений (42), (43):

$$\overline{d(i\lambda)} = d(\lambda) \equiv d, \quad \alpha_-(\lambda) = -\frac{\overline{d}}{d}, \quad \alpha_+(i\lambda) = -\frac{d}{\overline{d}},$$
$$\alpha_-(i\lambda) - \alpha_+(\lambda) = \frac{4i\lambda^6}{d\overline{d}},$$

тогда

$$\begin{aligned} &\widetilde{R}(r,s;\lambda) - \widetilde{R}(r,s;i\lambda)\\ &\quad = \frac{1}{2\lambda^3}\Big(\frac{2\lambda^3}{d}(De^{-\lambda r}De^{i\lambda s} + De^{-\lambda s}De^{i\lambda r}) - \alpha_+(\lambda)De^{-\lambda r}De^{-\lambda s}\\ &\qquad + i\alpha_-(\lambda)De^{i\lambda r}De^{i\lambda s} - \frac{2\lambda^3}{\overline{d}}(De^{-i\lambda r}De^{-\lambda s} + De^{-i\lambda s}De^{-\lambda r})\\ &\qquad + i\alpha_+(i\lambda)De^{-i\lambda r}De^{-i\lambda s} + \alpha_-(i\lambda)De^{-\lambda r}De^{-\lambda s}\Big)\\ &\quad = \frac{i}{2\lambda^3}\Big(\frac{2i\lambda^3}{\overline{d}}(De^{-i\lambda r}De^{-\lambda s} + De^{-i\lambda s}De^{-\lambda r}) - \frac{\overline{d}}{d}De^{i\lambda r}De^{i\lambda s} \end{aligned}$$

$$-\frac{2i\lambda^3}{d}(De^{-\lambda r}De^{i\lambda s}+De^{-\lambda s}De^{i\lambda r})-\frac{d}{\overline{d}}De^{-i\lambda r}De^{-i\lambda s}$$
$$+\frac{4\lambda^6}{d\overline{d}}De^{-\lambda r}De^{-\lambda s}\Big).$$

Вместе со вкладом (46) и коэффициентом $4T_s/(2\pi i\lambda^5)$ эти слагаемые факторизуются на два экземпляра одной функции, взятой в точках r и s:

$$\frac{4}{2\pi i\lambda^5}\Big(R(r,s;\lambda)-R(r,s;i\lambda)\Big)$$
$$=\frac{-1}{2\pi\lambda^4}D\Big(\sqrt{\frac{\overline{d}}{d}}e^{i\lambda r}-\sqrt{\frac{d}{\overline{d}}}e^{-i\lambda r}+\frac{2i\lambda^3}{|d|}e^{-\lambda r}\Big)$$
$$\times TD\Big(\sqrt{\frac{\overline{d}}{d}}e^{i\lambda s}-\sqrt{\frac{d}{\overline{d}}}e^{-i\lambda s}+\frac{2i\lambda^3}{|d|}e^{-\lambda s}\Big).$$

И, таким образом, мы получаем для ядра $\widetilde{p}_\lambda(r)$ из разложения (44) вещественное выражение

$$\widetilde{p}_\lambda(r)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}D\Big(\sqrt{\frac{\overline{d}}{d}}e^{i\lambda r}-\sqrt{\frac{d}{\overline{d}}}e^{-i\lambda r}+\frac{2i\lambda^3}{|d|}e^{-\lambda r}\Big). \tag{47}$$

§4. Заключение

Мы рассмотрели спектральные свойства самосопряженных расширений радиальной части оператора Лапласа при $l=1$ и квадрата обратного к ней оператора в скалярном произведении (10). Оба случая имеют однократный непрерывный спектр, занимающий неотрицательную полуось, который описывается спектральными плотностями ("собственными функциями непрерывного спектра"), приведенными в формулах (31) и (47). При этом соответствующие разложения единицы описываются выражениями (27) и (44). При отрицательном (положительном в случае обратного оператора) значении параметра расширения κ операторы имеют однократное собственное значение $-\kappa^2$ ($-2^{2/3}\kappa^{-4}$), с собственными функциями (30) и (45).

Литература

1. Б. Шутц, *Геометрические методы математической физики.* М. Мир, 1984.
   E. L. Hill, *The Theory of Vector Spherical Harmonics.* — Am. J. Phys. **22** (1954), 211.

2. Т. А. Болохов, *Расширения квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **433** (2015), 78–110.
3. K. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren*, Math. Ann. **109** (1934), 465–487;
   M. Stone, in *Linear Transformations in Hilbert spaces and their Applications in Analysis.* — Amer. Math. Soc. Colloquim Publication **15**, Providence, R.I., 1932; также см. теорему X.23 в [7].
4. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом*, Доклады АН СССР **137**, No. 5 (1961), 1011–1014.
5. J. Blank, P. Exner, M. Havlcek, *Hilbert Space Operators in Quantum Physics*, Springer Netherlands, 2008.
6. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* 1. *Функциональный анализ*, М. Мир, 1977.
7. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* 2. *Гармонический анализ и самосопряженность*, М. Мир, 1978.
8. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbation of Differential Operators. Solvable Schrödinger type Operators*, Cambridge University Press, 2000.

Bolokhov T. A. Properties of the $l = 1$ radial part of the Laplace operator in a special scalar product.

We develop self-adjoint extensions of the $l = 1$ radial part of the Laplace operator in a special scalar product. The product arises as the transfer of the plain product from $\mathbb{R}^3$ into the set of functions parametrizing one of the two components of the transverse vector field. Similar extensions are treated for the square of the inverse operator of the radial part in question.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 4 июня 2015 г.