Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

П. А. Андрианов

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЙ СУММ ФУРЬЕ–ХААРА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Введение

Рассмотрим классическую систему Хаара [1] с естественной нумерацией: $n = 2^i + j$, $i = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, 2^i$. Пусть функция f – непрерывная 1-периодическая функция, $S_n(f)$ – частичные суммы её ряда Фурье по указанной ортонормированной системе. Следующая оценка хорошо известна:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant K\omega\Big(f; \frac{1}{n}\Big), \tag{1}$$

где $\omega(f; t)$ – модуль непрерывности функции f. В книге [2, с. 74] указано значение константы в данном неравенстве: $K = 3$, но, используя результат Хорошко [3]

$$\sup_{f \in H_\omega} \|f - S_n(f)\|_\infty = 2^i \int\limits_0^{2^{-i}} \omega(t)dt,$$

$$n = 2^i + j, \quad H_\omega = \{f \in C \colon \omega(f; t) \leqslant \omega(t), t \in [0, 1]\},$$

нетрудно получить значение константы $K = 3/2$ и непосредственно доказать, что оно точное.

В настоящей работе получен аналог оценки (1) для функций двух переменных.

§2. Обозначения и предварительные сведения

Через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ будем обозначать множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно. $\mathcal{C}$ – пространство вещественнозначных непрерывных 1-периодических функций двух переменных;

Ключевые слова: периодические всплески, сепарабельный кратномасштабный анализ, базис Хаара, модуль непрерывности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 15-01-05796-а, и СПбГУ, НИР 9.38.198.2015.

$\langle a, b\rangle$ – скалярное произведение элементов a и b соответствующего пространства.

Сначала уточним, в каком смысле мы понимаем двумерный базис Хаара. Существует стандартный способ распространения ортогонального базиса на случай двух (и более) переменных: двумерный базис определяется как тензорное произведение одномерного базиса на себя. Свойства разложений по двумерному базису, который получается таким способом из базиса Хаара на прямой, изучались рядом авторов – например, в работе [4].

Однако, с точки зрения теории всплесков больший интерес представляет другой подход. Если имеется базис всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, построенный по схеме кратномасштабного анализа (КМА) $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, то рассматривается тензорное произведение $\{V_j \bigotimes V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ этого кратномасштабного анализа на себя. Полученная конструкция является КМА в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и носит название *сепарабельного КМА*. Теперь, если мы определим пространства всплесков $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, следуя стандартной схеме, то получим, в отличие от одномерного случая, не одну, а несколько всплеск-функций, сжатия и целочисленные сдвиги которых образуют базис в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Подробнее этот процесс построения описан, например, в [5, §2.1].

Применяя этот подход к базису Хаара, получим три всплеск-функции:

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_1(x) &= \psi(x_1)\varphi(x_2), \\ \widetilde{\psi}_2(x) &= \varphi(x_1)\psi(x_2), \\ \widetilde{\psi}_3(x) &= \psi(x_1)\psi(x_2), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1), \\ \dfrac{1}{2}, & t = 0,\ t = 1, \\ 0, & t \notin [0,1], \end{cases} \qquad \psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1).$$

Двоичные сжатия и целочисленные сдвиги этих трёх всплеск-функций:

$$2^i\widetilde{\psi}_k(2^i x + m), \quad i \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}^2,\ k = 1,2,3, \tag{3}$$

образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Стандартным образом периодизируя (3) и добавив к полученному набору функций тождественую постоянную, получим периодический базис Хаара на плоскости, о котором далее и будет идти речь.

В силу периодичности полученных функций, при каждом фиксированном i их останется лишь 4^i. Для того, чтобы говорить о частичных суммах ряда Фурье, введём нумерацию полученного базиса. Пусть $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$; $m_{i,0}, \ldots, m_{i,4^i-1}$ – произвольным образом перенумерованные пары целых чисел, пробегающих значения от 0 до $2^i - 1$. Определим 1-периодические функции ψ_k, $k = 1, 2, \ldots$, задав их на $\mathbb{R}^2$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2) &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \varphi(x_1 + k_1)\varphi(x_2 + k_2), \\ \psi_n(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} 2^i \widetilde{\psi}_r(2^i(x + k) + m_{i,l}). \end{aligned} \tag{4}$$

Поясним, что представляет из себя этот базис в данной нумерации. Первая функция тождественно постоянна на квадрате $[0, 1)^2$, а последующие три совпадают на $(0, 1)^2$ соответственно с $\widetilde{\psi}_1$, $\widetilde{\psi}_2$ и $\widetilde{\psi}_3$. Остальные базисные функции являются их сжатиями в 2^i раз и сдвигами по аргументам на $\dfrac{s}{2^i}$, $s = 0, \ldots, 2^i - 1$; причём индекс i отвечает за номер пачки, индекс l за расположение носителя функции ψ_n в квадрате $[0, 1)^2$, а индекс r за тип функции (если $r = 1$, то ψ_n будет "копией" $\widetilde{\psi}_1$ и т.д.).

Введём также следующие обозначения. Пусть $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$, тогда через δ_l обозначим внутренность множества $\operatorname{supp} \psi_n\big|_{[0,1)^2}$. Далее, разобьём каждый квадрат δ_k на четыре квадрата и внутренность каждого из них обозначим символом $\delta_k^{(s)}$, $s = 0, \ldots, 3$, пронумеровав по часовой стрелке, начиная с того, который ближе всего к началу координат. Таким образом, при каждом фиксированном i получим разбиение (с точностью до границ) квадрата $[0, 1)^2$ на δ_k – квадраты со стороной $\dfrac{1}{2^i}$, и $\delta_k^{(s)}$ – квадраты со стороной $\dfrac{1}{2^{i+1}}$. Для функции f положим

$$I_k^{(s)} = \int\limits_{\delta_k^{(s)}} f(u, v)\, du\, dv.$$

Модуль непрерывности функции двух переменных f будем понимать в следующем смысле:

$$\omega_\infty(f;h) = \sup_{\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\infty \leqslant h} |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})|.$$

Нетрудно проверить, что для функции $\omega_\infty(f;h)$ выполняются основные свойства модулей непрерывности:

1) $\omega_\infty(f;h) \geqslant 0$, $\omega_\infty(f;0) = 0$,
2) $\omega_\infty(f;h)$ не убывает по h,
3) $\omega_\infty(f;h_1+h_2) \leqslant \omega_\infty(f;h_1) + \omega_\infty(f;h_2)$,
4) если функция f непрерывна, то $\lim\limits_{h\to 0} \omega_\infty(f;h) = 0$.

§3. Результаты

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f \in \mathcal{C}$, $i \in \mathbb{N}$, $k = 0,\dots,4^i-1$, $s,m = 0,\dots,3$, $x \in \delta_k^{(s)}$, $y \in \delta_k^{(m)}$. *Тогда*

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \begin{cases} \omega_\infty\Big(f;\dfrac{1}{2^{i+1}}\Big), & s = m, \\ 2\cdot\omega_\infty\Big(f;\dfrac{1}{2^{i+1}}\Big), & s \neq m. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Первое неравенство в системе (5) очевидно. Если же $x \in \delta_k^{(s)}$, $y \in \delta_k^{(m)}$, $s \neq m$, то, по свойству 3 функции $\omega_\infty(f;h)$,

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2^i}\Big) \leqslant 2\cdot\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2^{i+1}}\Big). \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathcal{C}$, $i \in \mathbb{N}$, $k = 0,\dots,4^i-1$. *Тогда*

$$\Big|I_k^{(0)} - I_k^{(1)}\Big| \leqslant \frac{1}{4^{i+1}}\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2^{i+1}}\Big).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\left|I_k^{(0)} - I_k^{(1)}\right| &= \left|\int\limits_{\delta_k^{(0)}} f(u,v)\,du\,dv - \int\limits_{\delta_k^{(1)}} f(u,v)\,du\,dv\right| \\ &\leqslant \left|\int\limits_{\delta_k^{(0)}+(0,\frac{1}{2^{i+1}})} \left(f\Big(u, v - \frac{1}{2^{i+1}}\Big) - f(u,v)\right) du\,dv\right| \\ &\leqslant \frac{1}{4^{i+1}}\omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \qquad \square\end{aligned}$$

Замечание. Аналогично получается та же оценка для $|I_k^{(1)} - I_k^{(2)}|$, $|I_k^{(2)} - I_k^{(3)}|$, $|I_k^{(3)} - I_k^{(0)}|$.

Напомним, что через $S_n(f)$ обозначаются частичные суммы ряда Фурье функции f по системе $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 1. 1. *Пусть $f \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{7}{4}\omega_\infty\Big(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{6}$$

2. *Правая часть неравенства* (6) *не может быть одновременно для всех n заменена на $K\omega_\infty(f;\gamma_n)$, где $K \in \mathbb{R}$, $\gamma_n = o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.*

3. *Константа $\dfrac{7}{4}$ в неравенстве* (6) *не может быть одновременно для всех n заменена меньшей.*

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 4$, $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$. Тогда*

$$\sup_{f\in\mathcal{C}} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{\omega_\infty\Big(f; \dfrac{1}{2^{i+1}}\Big)} = \begin{cases} \dfrac{7}{4}, & l = 0, \dots, 4^i - 2,\ r = 1,2,3; \\[2ex] \dfrac{3}{2}, & l = 4^i - 1,\ r = 1,2; \\[2ex] 1, & l = 4^i - 1,\ r = 3. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство теорем 1 и 2. 1) Рассмотрим номера вида $n = 4^i + 3l + 3$, $i = 0, 1, \dots$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$.

При таких n каждая из функций $\psi_1, \dots, \psi_n$ постоянна на каждом из множеств

$$\delta_k^{(s)}, \quad k = 0, \dots, l, \ s = 0, \dots, 3; \tag{8}$$

$$\delta_k, \quad k = l+1, \dots, 4^i - 1. \tag{9}$$

Всего этих множеств n, то есть, такое же количество, как и функций $\psi_1, \dots, \psi_n$. Таким образом, набор функций $\psi_1, \dots, \psi_n$ является базисом в линейном пространстве всех функций, постоянных на квадратах (8), (9), а значит, можно переразложить этот базис по другому базису в этом же линейном пространстве: характеристических функций множеств (8), (9). Обозначим функции из нового базиса через $\chi_1, \dots, \chi_n$, считая его ортонормированным. Тогда

$$S_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \chi_k \rangle \chi_k(x), \tag{10}$$

и, таким образом, если x принадлежит одному из множеств (8), (9), то в частичной сумме (10) остаётся лишь слагаемое с соответствующей этому множеству функцией χ_k.

1.a) Пусть $x \in \delta_k^{(s)}$. Используя лемму 1, при $k = l+1, \dots, 4^i - 1$, $l = 0, \dots, 4^i - 2$, $s = 0, \dots, 3$, получаем

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(f; x)| &= \left| f(x_1, x_2) - 4^i \int\limits_{\delta_k} f(u, v)\, du\, dv \right| \\ &= \left| 4^i \sum_{m=0}^{3} \int\limits_{\delta_k^{(m)}} \big(f(x_1, x_2) - f(u, v) \big)\, du\, dv \right| \\ &\leqslant 4^i \left(\frac{1}{4^{i+1}} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \frac{3}{4^{i+1}} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^i}\Big) \right) \leqslant \frac{7}{4} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \end{aligned}$$

1.b) Если же $x \in \delta_k^{(s)}$, $k = 0, \dots, l$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $s = 0, \dots, 3$, то

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(f; x)| &= \left| 4^{i+1} \int\limits_{\delta_k^{(s)}} \big(f(x_1, x_2) - f(u, v) \big)\, du\, dv \right| \\ &\leqslant \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \end{aligned} \tag{11}$$

2) Рассмотрим номера вида $n = 4^i+3l+1, i = 0, 1, \dots, l = 0, \dots, 4^i-1$. При таких n каждая из функций $\psi_1, \dots, \psi_n$ постоянна на каждом из множеств

$$\begin{gathered} \delta_k^{(s)}, \quad k = 0, \dots, l-1,\ s = 0, \dots, 3; \\ \delta_l^{(0)} \cup \delta_l^{(1)}, \delta_l^{(2)} \cup \delta_l^{(3)}; \\ \delta_k, \quad k = l+1, \dots, 4^i-1. \end{gathered} \tag{12}$$

Аналогично, как и в случае **1)**, введём в рассмотрение базис нормированных характеристических функций множеств (12) $\chi_1, \dots, \chi_n$. Опять же, возможно переразложение $\psi_1, \dots, \psi_n$ по базису $\chi_1, \dots, \chi_n$, так как множеств (12) n штук.

При $x \in \delta_k$, $k \in [0; l-1] \cup [l+1; 4^i-1]$, оценка для величины $|f(x) - S_n(f; x)|$ получается тем же способом, что и в случае **1)**, и остаётся аналогичной.

Пусть $x \in \delta_l^{(s)}$, $s = 0, \dots, 3$. Используя лемму 1, получаем

$$|f(x) - S_n(f; x)| \leqslant \frac{3}{2}\omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \tag{13}$$

3) Теперь рассмотрим номера вида $n = 4^i + 3l + 2$, $i = 0, 1, \dots$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$.

При таких номерах n функции $\psi_1, \dots, \psi_n$ постоянны на множествах вида (8), (9). Но количество этих множеств равно $4^i + 3l + 3$, а функций всего $4^i + 3l + 2$, поэтому аналогичное переразложение по базису характеристических функций невозможно. Но мы можем переразложить первые 4^i+3l+1 (то есть, $n-1$) функций $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ по базису $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ так же, как в случае **2)**. При этом функция ψ_n будет ортогональна всем $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$. Таким образом,

$$S_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \langle f, \chi_k \rangle \chi_k(x) + \langle f, \psi_n \rangle \psi_n.$$

При $x \in \delta_k$, $k \in [0; l-1] \cup [l+1; 4^i-1]$, оценка для величины $|f(x) - S_n(f; x)|$ получается тем же способом, что и в случае **1)**, и остаётся аналогичной.

Пусть $x \in \delta_l^{(0)}$, тогда

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - S_n(f;x)| \\
&\qquad = \left| f(x) - S_{n-1}(f;x) - \psi_n(x) \int\limits_{\delta_l} f(u,v)\psi_n(u,v)\,du\,dv \right| \\
&\qquad\qquad = \left| f(x) - 4^i(3I_l^{(0)} + I_l^{(1)} - I_l^{(2)} + I_l^{(3)}) \right| \\
&\qquad\qquad\qquad = \left| f(x) - 4^{i+1} I_l^{(0)} + 4^i\big(I_l^{(0)} - I_l^{(1)} + I_l^{(2)} - I_l^{(3)}\big) \right|.
\end{aligned}
$$

Теперь, воспользовавшись леммами 1 и 2, найдём оценку

$$
\begin{aligned}
|f(x) - S_n(f;x)| &\leqslant \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) \\
&\quad + 4^i \cdot \frac{2}{4^{i+1}} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = \frac{3}{2}\omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Легко проверить, что при $x \in \delta_l^{(s)}$, $s = 1,2,3$, оценка не изменится.

Отметим также, что при $n = 1$ неравенство (6), очевидно, выполняется и с меньшей константой:

$$\|f - S_1(f)\|_\infty \leqslant \omega_\infty\big(f;1\big).$$

Итак, при фиксированном $i \in \mathbb{N}$ мы получили самую грубую оценку для $x \in \delta_k$, $k = l+1, \ldots, 4^i - 1$, $l = 0, \ldots, 4^i - 2$:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{7}{4}\omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \qquad (15)$$

Докажем точность константы $\dfrac{7}{4}$ для этого неравенства. Зададим $\varepsilon > 0$ и для любого $i > 1$ предъявим функцию $f_i \in \mathcal{C}$, такую, что

$$\|f_i - S_n(f_i)\|_\infty > \Big(\frac{7}{4} - \varepsilon\Big)\omega_\infty\Big(f_i; \frac{1}{2^{i+1}}\Big),$$

где $n = 4^i + 3l + r$, $l < 4^i - 1$, $r = 1,2,3$.

Напомним, что в данной нумерации индекс l отвечает за расположение носителя функции ψ_n в квадрате $(0,1)^2$. Обозначим через δ квадрат δ_{4^i-1}, через $\delta^{(s)}$ квадраты $\delta_{4^i-1}^{(s)}$, и введём вспомогательную функцию $\widetilde{f}_i$, принимающую значение 1 на одном из множеств $\delta^{(s)}$ и значение 0 во всех оставшихся точках множества δ. При $x \in (0,1)^2 \setminus \delta$

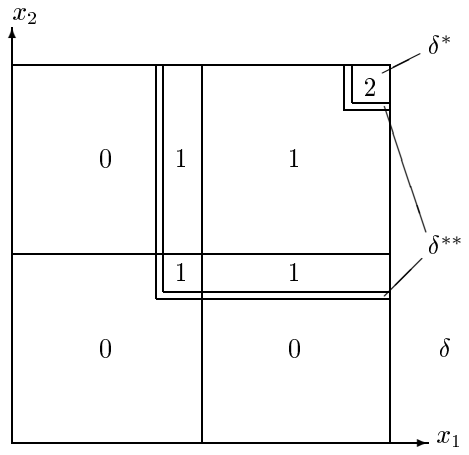

Рис. 1. Функция f_i на множестве δ. На рисунке δ^{**} – множество, на котором функция возрастает так, чтобы модуль непрерывности сохранил значение 1.

положим $\widetilde{f}_i = 1$. Тогда, если $l < 4^i - 1$, $x \in \delta$, то

$$S_n(\widetilde{f}_i; x) = \langle \chi_{\delta,} \widetilde{f}_i \rangle \chi_\delta(x) = \frac{1}{4},$$

а также

$$\omega_\infty\Big(\widetilde{f}_i; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = 1.$$

Здесь χ_δ – соответствующая квадрату δ функция из обсуждавшегося ранее базиса нормированных характеристических функций $\chi_1, \dots, \chi_n$.

Изменим функцию $\widetilde{f}_i$ на множестве малой меры так, чтобы она стала непрерывной, в углу квадрата δ принимала значения $f_i(x) = 2$ (обозначим это множество δ^*) (см рис. 1) и сохранила значение $\omega_\infty\Big(f_i; \dfrac{1}{2^{i+1}}\Big) = 1$.

Тогда при $x \in \delta^*$ верно неравенство

$$|f_i(x) - S_n(f_i; x)| > \frac{7}{4} - \varepsilon.$$

Таким образом, точность константы $\frac{7}{4}$ для оценки (15) доказана.

Условие $l < 4^i - 1$ важно: при $l = 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$, константа $\frac{7}{4}$ не будет точной. Для таких номеров уже были получены более точные оценки (см. (11), (13), (14)). Точность констант (для $n = 4^i + 3l + r$ таких, что $l = 4^i - 1$), полученных в этих оценках, доказывается аналогичным способом. Для доказательства при $r = 1, 3$ подойдёт та же функция $\widetilde{f}_i$, а для случая $r = 2$ нужно выбрать функцию $\widetilde{f}_i$ так, чтобы она принимала значение 1 на двух противоположных квадратах $\delta^{(s)}$ и значение 0 во всех оставшихся точках множества δ.

Теперь докажем точность константы в неравенстве (6). Пусть $n = 4^{i+1} - 3$. Ясно, что при достаточно больших i число $\sqrt{n} = \sqrt{4^{i+1} - 3}$ близко к 2^{i+1}. Из этого и из равномерной непрерывности функции $\omega_\infty\big(f; h\big)$ (при $f \in \mathcal{C}$) следует точность полученной константы $\frac{7}{4}$ и для неравенства (6).

Покажем теперь, что не существует константы $K \in \mathbb{R}$ такой, что для всех $f \in \mathcal{C}$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ будет выполняться

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant K\omega_\infty\big(f; \gamma_n\big),$$

где $\gamma_n = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$. Для этого зафиксируем произвольную константу $K > 0$ и предъявим функцию f_K, такую, что

$$\|f_K - S_n(f_K)\|_\infty > K\omega_\infty\big(f_K; \gamma_n\big).$$

Зададим $K > 0$. Будем рассматривать номера вида $n = 4^{i+1}$ и выберем столь большое n, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \gamma_n} > 4 \cdot 2K.$$

Обозначим через δ какой-либо из квадратов $\delta_k^{(s)}$, $k \leqslant l$. Пусть $\delta = (a, b) \times (c, d)$. Положим $\xi = 2K\gamma_n$. Введём вспомогательную кусочно-линейную функцию $g(t)$, определённую на (a, b) так, как показано на рис. 2. При $t \notin (a, b)$ положим $g(t) = 0$.

Из рисунка 2 видно, что

$$\omega\big(g; \gamma_n\big) = 1,$$
$$g(a) = g(a + 2\xi) = g(a + 4\xi) = 0,$$
$$g(a + \xi) = 2K, g(a + 3\xi) = -2K.$$

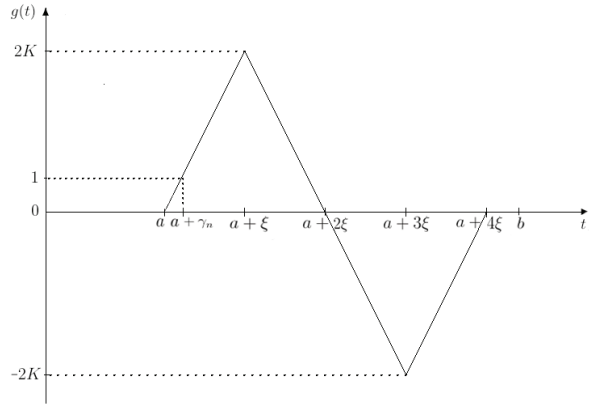

Рис. 2. Функция g на отрезке (a, b).

При выбранном ξ справедливо включение $[a, a+4\xi] \subset [a, b]$, и легко видеть, что

$$\max_{t\in[a,b]} g(t) > K, \qquad \int_a^b g(t)\,dt = 0.$$

Теперь положим

$$f_K(x_1, x_2) = g(x_1).$$

Очевидно, что

$$\max_{x\in\delta} f_K(x) = \max_{t\in[a,b]} g(t), \quad \omega_\infty(f_K; h) = \omega(g; h).$$

Кроме того, $S_n(f_K) = 0$, а значит

$$\|f_K - S_n(f_K)\|_\infty > K\omega_\infty\big(f_K; \gamma_n\big)$$

для любого заранее заданного K, что и требовалось. □

Замечание 1. Фактически, получена поточечная оценка уклонения сумм Фурье–Хаара непрерывной 1-периодической функции. Из доказательства видно, что константа перед модулем непрерывности в такой оценке может принимать значения 1, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{7}{4}$ не только в зависимости от номера n, но и от расположения точки x. Также отметим, что базисные функции ψ_k, как и суммы Фурье $S_n(f)$ по этой системе, в

любой граничной к каким-либо из множеств $\delta_k^{(s)}$ точке x будут равны среднему арифметическому своих значений на всех множествах $\delta_k^{(s)}$, к которым точка x является граничной. Таким образом, учитывая непрерывность функции f, получаем следующее утверждение.

Пусть $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{N}$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$, *тогда справедлива поточечная оценка*:

$$\bigl|f(x) - S_n(f; x)\bigr| \leqslant K_n(x)\omega_\infty\Bigl(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\Bigr), \tag{16}$$

где $K_n(x) = \dfrac{7}{4}$ *при* $x \in \delta_k$, $k = l+1, \dots, 4^i - 1$, $l = 0, \dots, 4^i - 2$; $K_n(x) = \dfrac{3}{2}$ *при* $x \in \delta_l$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $r = 1, 2$; $K_n(x) = 1$ *при* $x \in \delta_k$, $k = 0, \dots, l-1$, $l = 1, \dots, 4^i - 1$, *и при* $x \in \delta_l$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $r = 3$, *а в граничных точках множеств* $\delta_k^{(s)}$ *величина* $K_n(x)$ *будет равна среднему арифметическому своих значений на всех множествах* $\delta_k^{(s)}$, *к которым точка* x *является граничной.*

Замечание 2. Условие $n \geqslant 4$ в теореме 2 существенно. Для номера $n = 1$ отсутствует представление в виде $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$. Также, в силу 1-периодичности функции f, для $n = 2, 3$ константы в равенстве (7) уменьшаются. Проведя рассуждения, аналогичные присутствующим в доказательстве теорем, а также заметив, что $\omega_\infty(f; 1) = \omega_\infty(f; 1/2)$, нетрудно получить следующее равенство:

$$\sup_{f \in \mathcal{C}} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{\omega_\infty\Bigl(f; \dfrac{1}{2}\Bigr)} = \begin{cases} 1, & n = 1, 2, \\ 5/4, & n = 3. \end{cases}$$

Автор выражает благодарность научному руководителю М. А. Скопиной за постановку задачи и внимание к работе, а также А. Н. Подкорытову и О. Л. Виноградову за ценные замечания во время доклада на семинаре.

Литература

1. A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.* — Math. Ann. **69**, No. 3 (1910), 331–371.
2. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды.* Изд-во АФЦ, М., 1999.

3. Н. П. Хорошко, *Равномерное приближение полиномами по системе Хаара на классах непрерывных функций.* — Укр. матем. журн. **22**, No. 5 (1970), 705–712.
4. Б. И. Голубов, *Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье–Хаара функций ограниченной p-вариации.* — Изв. вузов. Матем. No. 6 (2012), 3–13.
5. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

Andrianov P. A. Sharp estimates of the deviation from Fourier–Haar sums for continuous functions of two variables.

A sharp estimate of the deviation from partial Fourier–Haar sums for periodic continuous function in terms of the modulus of continuity is obtained.

С.-Петербургский
государственный университет,
Петергоф, Университетский просп. 35,
198504 Санкт-Петербург
E-mail: eon@live.ru

Поступило 14 мая 2015 г.