Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 434, 2015 г.

А. Б. Александров

КОММУТАТОРНО ЛИПШИЦЕВЫ ФУНКЦИИ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

§1. Введение

Пусть $\mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ обозначает пространство всех ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$. В случае, когда $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, мы будем писать для краткости $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ вместо $\mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Функция f, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется *липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant C|z_2 - z_1| \tag{1.1}$$

для любых чисел $z_1, z_2 \in \mathfrak{F}$. Множество всех липшицевых на $\mathfrak{F}$ функций обозначим через $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$. Наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (1.1), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$.

Если функция f задана на более широком множестве $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{F}$, то для краткости мы будем писать $f \in \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ вместо $f|\mathfrak{F} \in \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ и $\|f|\mathfrak{F}\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$. Это же соглашение будет применяться и для других функциональных пространств.

Непрерывная функция f, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется *операторно липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$\|f(N_2) - f(N_1)\| \leqslant C\|N_2 - N_1\| \tag{1.2}$$

для любых нормальных операторов $N_1, N_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ со спектрами, лежащим в $\mathfrak{F}$. Множество всех операторно липшицевых функций на $\mathfrak{F}$ обозначим через $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.

Наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (1.2), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Применяя неравенство (1.2) для $N_1 = aI$ и $N_2 = bI$, где $a, b \in \mathfrak{F}$, а I обозначает тождественный оператор, получаем: $\mathrm{OL}(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ для любой функции

Ключевые слова: операторно липшицевы функции.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 14-01-00198.

$f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. Можно доказать, что равенство $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ имеет место только для конечных множеств $\mathfrak{F}$. Тем не менее, если нормальные операторы N_1, N_2 коммутируют и $\sigma(N_1), \sigma(N_2) \subset \mathfrak{F}$, то из спектральной теоремы для пары коммутирующих нормальных операторов следует, что

$$\|f(N_2) - f(N_1)\| \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \|N_2 - N_1\|. \tag{1.3}$$

Непрерывная функция f, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется *коммутаторно липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$\|f(N)R - Rf(N)\| \leqslant C\|NR - RN\| \tag{1.4}$$

для любого оператора $R \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ и любого нормального оператора $N \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ со спектром $\sigma(N)$, лежащим в $\mathfrak{F}$. Множество всех коммутаторно липшицевых функций на $\mathfrak{F}$ обозначим через $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$. Наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (1.4), обозначим через $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$.

Нетрудно доказать, что для любой функции $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ выполняется следующее неравенство:

$$\|f(N_2)R - Rf(N_1)\| \leqslant \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \|N_2 R - RN_1\| \tag{1.5}$$

для любых нормальных операторов N_1, N_2 таких, что $N_1 \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$, $N_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2)$, $\sigma(N_1), \sigma(N_2) \subset \mathfrak{F}$, и любого оператора $R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, см., например, [10] и [3]. Применяя неравенство (1.5) в случае, когда $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ и $R = I$, получаем: $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$ для любой функции $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$.

Замечание. Нетрудно проверить, что мы получили бы те же самые пространства $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, $\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и те же самые полунормы $\|\cdot\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$, если бы дополнительно потребовали, чтобы нормальные операторы N_1, N_2, N имели конечный спектр, см., например, [1].

Другими словами, имеют место следующие равенства:

$$\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \sup\big\{\|f\|_{\mathrm{OL}(\Lambda)} : \Lambda \subset \mathfrak{F},\ \ \Lambda \text{ – конечно}\big\}$$

и

$$\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \sup\big\{\|f\|_{\mathrm{CL}(\Lambda)} : \Lambda \subset \mathfrak{F},\ \ \Lambda \text{ – конечно}\big\}.$$

Это вытекает из неравенства (1.3) и из того, что любой нормальный оператор N может быть аппроксимирован с любой наперёд заданной точностью нормальным оператором N_0 таким, что $N_0N = NN_0$ и $\sigma(N_0)$ – конечное подмножество множества $\sigma(N)$.

Известно (см. [8]), что каждая функция $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ дифференцируема как функция комплексной переменной в каждой неизолированной точке множества $\mathfrak{F}$. Кроме того, f имеет конечную производную и в бесконечности ($f'(\infty) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z}$), если множество $\mathfrak{F}$ неограничено.

Отсюда следует, что $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) \ne \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, если множество $\mathfrak{F}$ содержит внутреннюю точку, поскольку $\overline{z} \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.

С другой стороны, Э. Киссин и В.С. Шульман [10] доказали, что $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$, если множество $\mathfrak{F}$ компактно и лежит на кривой класса C^2. В частности, это равенство $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ выполняется, если $\mathfrak{F}$ – окружность. Хорошо известно, что в этом случае равенство $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ выполняется вместе с равенством полунорм, т. е. $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ для всех $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$.

Из результатов Камовица [9] следует, что равенство $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}) = \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ вместе с равенством соответствующих полунорм имеет место в том и только в том случае, когда множество $\mathfrak{F}$ лежит на окружности или на прямой.

Положим

$$\mathbb{T} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \mathbb{D} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ и } \overline{\mathbb{D}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}.$$

Следующая теорема содержится в одном из основных результатов статьи Э. Киссина и В. С. Шульмана [11], см. теорему 1.1 в [11].

Теорема (Киссин–Шульман). *Пусть $f_0 \in \mathrm{OL}(\mathbb{T}) = \mathrm{CL}(\mathbb{T})$. Предположим, что существует непрерывное и аналитическое в $\mathbb{D}$ продолжение f функции f_0 в замкнутый единичный круг $\overline{\mathbb{D}}$. Тогда $f \in \mathrm{CL}(\overline{\mathbb{D}})$.*

Цель настоящей статьи – получить следующее обобщение этой теоремы, в котором единичная окружность $\mathbb{T}$ заменена произвольным непустым совершенным множеством $\mathfrak{F}_0$.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}$ – непустые совершенные подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ такие, что $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ и множество $\Omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{F}\backslash\mathfrak{F}_0$ открыто. Предположим, что функция $f_0 \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)$ допускает непрерывное продолжение f на множество $\mathfrak{F}$ такое, что f аналитична на Ω и*

$$f(z) = o(z^2) \quad \textit{при} \quad z \to \infty$$

в каждой неограниченной[1] *компоненте связности множества* Ω. *Тогда* $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ *и* $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)}$.

Доказательство проходит в основном по той же схеме, что и в статье [11], но некоторые технические детали существенно отличаются. В частности, в нашем подходе используются некоторые результаты, относящиеся к теории потенциала. Мы отсылаем читателя к монографии [7] по поводу основных понятий теории потенциала.

Во втором параграфе мы приводим нужные нам результаты из теории мультипликаторов Шура.

Последний третий параграф посвящён доказательству теоремы 1.1.

§2. Мультипликаторы Шура

Пусть S и T – произвольные множества. Как обычно, мы обозначаем через $\ell^p(T)$ пространство всех числовых семейств $\alpha = \{\alpha_t\}_{t\in T}$ таких, что $\sum\limits_{t\in T} |\alpha_t|^p < +\infty$, с нормой $\|\alpha\|_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\sum_{t\in T} |\alpha_t|^p\right)^{1/p}$, где $p \in [1, +\infty)$. Пространство $\ell^\infty(T)$ состоит из всех ограниченных числовых семейств $\alpha = \{\alpha_t\}_{t\in T}$, $\|\alpha\|_\infty \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{t\in T} |\alpha_t|$.

Мы будем считать, что $\ell^p(T) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{0\}$, если $T = \varnothing$.

Функция $\varphi : S \times T \to \mathbb{C}$ называется *мультипликатором Шура* на $\mathscr{B}(\ell^2(T), \ell^2(S))$, если для любой матрицы $\{a(s,t)\}_{(s,t)\in S\times T}$, задающей ограниченный оператор из $\ell^2(T)$ в $\ell^2(S)$, матрица

$$\{\varphi(s,t)a(s,t)\}_{(s,t)\in S\times T}$$

также задаёт ограниченный оператор из $\ell^2(T)$ в $\ell^2(S)$.

Пусть матрица $\{a(s,t)\}_{(s,t)\in S\times T}$ определяет ограниченный оператор $A : \ell^2(T) \to \ell^2(S)$. Символом $M_\varphi A$ мы будем обозначать оператор из $\ell^2(T)$ в $\ell^2(S)$, определяемый матрицей $\{\varphi(s,t)a(s,t)\}_{(s,t)\in S\times T}$.

Ясно, что если φ – мультипликатор Шура на $\mathscr{B}(\ell^2(T), \ell^2(S))$, то соответствующий линейный оператор

$$M_\varphi : \mathscr{B}(\ell^2(T), \ell^2(S)) \to \mathscr{B}(\ell^2(T), \ell^2(S))$$

ограничен. Множество всех таких мультипликаторов Шура обозначим через $\mathfrak{M}(S \times T)$, положим

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}(S\times T)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{\|A\|\leqslant 1} \|M_\varphi A\|.$$

[1] Последнее условие выполняется автоматически, если множество Ω ограничено.

Ясно, что $\mathfrak{M}(S\times T)\subset \ell^\infty(S\times T)$ и $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_{\mathfrak{M}(S\times T)}$.

Будем считать, что $\mathfrak{M}(S\times T)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{0\}$, если $T=\varnothing$ или $S=\varnothing$. Тогда легко видеть, что

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}(S\times T)}=\sup\{\|\varphi\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1\times\Lambda_2)}:\ \Lambda_1\subset S,\ \Lambda_2\subset T;\ \Lambda_1 \text{ и } \Lambda_2 \text{ конечны}\}.$$

Пусть f – функция, заданная на совершенном подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что функция f имеет производную в комплексном смысле в каждой точке множества $\mathfrak{F}$. В этом случае мы определяем *разделённую разность* $\mathfrak{D}f:\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}\to\mathbb{C}$ следующим образом:

$$(\mathfrak{D}f)(z,w)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \text{если } z\neq w,\\[2mm] f'(z), & \text{если } z=w.\end{cases}$$

Легко видеть, что функция $\mathfrak{D}f$ непрерывна по каждой переменной. Отметим, что функция $\mathfrak{D}f$ не обязана быть непрерывной.

Следующую теорему мы приведём с доказательством, хотя она, конечно, хорошо известна. Неявно она содержится, например, в [4] и [5], по крайней мере в случае $\mathfrak{F}\subset\mathbb{R}$, см. также [3] и [2].

Теорема 2.1. *Пусть f – функция, заданная на совершенном подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что функция f имеет производную в комплексном смысле в каждой точке множества $\mathfrak{F}$. Тогда $f\in\mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{D}f\in\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})$, при этом $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}=\|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}$.*

Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 2.2. *В обозначениях теоремы* 2.1 *имеет место следующее равенство*:

$$\begin{aligned}&\|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}\\ &=\sup\{\|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1\times\Lambda_2)}:\ \Lambda_1,\Lambda_2\subset\mathfrak{F},\ \Lambda_1\cap\Lambda_2=\varnothing;\ \Lambda_1 \textit{ и } \Lambda_2 \ \textit{конечны}\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\begin{aligned}&\|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}\\ &\leqslant\sup\{\|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1\times\Lambda_2)}:\ \Lambda_1,\Lambda_2\subset\mathfrak{F},\ \Lambda_1\cap\Lambda_2=\varnothing;\ \Lambda_1 \text{ и } \Lambda_2 \ \text{конечны}\}\end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\Lambda\times\Lambda)} \leqslant \sup\{\|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1\times\Lambda_2)}:\ \Lambda_1,\Lambda_2\subset\mathfrak{F},\ \Lambda_1\cap\Lambda_2=\varnothing;\ \Lambda_1 \text{ и } \Lambda_2 \text{ конечны}\}$$

для любого конечного подмножества Λ множества $\mathfrak{F}$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \mathfrak{F}$, причём $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$. Ясно, что для любого числа $t > 0$ найдётся множество

$$\Lambda(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)\} \subset \mathfrak{F}$$

такое, что $\Lambda \cap \Lambda(t) = \varnothing$ и $|\lambda_j(t) - \lambda_j| < t$ при всех j. Заметим, что при достаточно малых $t > 0$ множество $\Lambda(t)$ состоит из n элементов. Чтобы закончить доказательство, достаточно заметить, что в силу непрерывности функции $\mathfrak{D}f$ по каждой переменной имеет место следующее равенство:

$$\lim_{t\to 0} \|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\Lambda\times\Lambda(t))} = \|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\Lambda\times\Lambda)}. \qquad \square$$

Лемма 2.3. *Пусть $N_1 \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$ и $N_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2)$, где $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – конечномерные гильбертовы пространства. Предположим, что операторы N_1 и N_2 являются нормальными с простыми спектрами Λ_1 и Λ_2. Пусть f и F – две функции, f задана на множестве $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$, а F – на множестве $\Lambda_1 \times \Lambda_2$. Предположим, что $(\zeta-\xi)F(\zeta,\xi) = f(\zeta) - f(\xi)$ при всех $\zeta \in \Lambda_1$ и всех $\xi \in \Lambda_2$. Тогда*

$$\sup\{\|f(N_2)R - Rf(N_1)\| : R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \|N_2R - RN_1\| \leqslant 1\} = \|F\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1\times\Lambda_2)},$$

если $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. В общем случае можно утверждать, что

$$\sup\{\|f(N_2)R - Rf(N_1)\| : R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \|N_2R - RN_1\| \leqslant 1\} \leqslant \|F\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1\times\Lambda_2)}.$$

Доказательство. В пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ существуют ортонормированные базисы $\{e_\zeta^{(1)}\}_{\zeta\in\Lambda_1}$ и $\{e_\xi^{(2)}\}_{\xi\in\Lambda_2}$ такие, что $N_1 e_\zeta^{(1)} = \zeta e_\zeta^{(1)}$ при всех $\zeta \in \Lambda_1$ и $N_2 e_\xi^{(2)} = \xi e_\xi^{(2)}$ при всех $\xi \in \Lambda_2$. Имеем:

$$\Big((N_2R - RN_1)e_\zeta^{(1)}, e_\xi^{(2)}\Big) = (Re_\zeta^{(1)}, N_2^* e_\xi^{(2)}) - (RN_1 e_\zeta^{(1)}, e_\xi^{(2)}) \tag{2.6}$$

$$= (\xi - \zeta)(Re_\zeta^{(1)}, e_\xi^{(2)}) \tag{2.7}$$

при всех $\zeta \in \Lambda_1$ и всех $\xi \in \Lambda_2$. Аналогично,

$$\Big((f(N_2)R - Rf(N_1))e_\zeta^{(1)}, e_\xi^{(2)}\Big) = (f(\xi) - f(\zeta))(Re_\zeta^{(1)}, e_\xi^{(2)}).$$

Таким образом,

$$\Big\{\big((f(N_2)R - Rf(N_1))e_\zeta^{(1)}, e_\xi^{(2)}\big)\Big\} = \Big\{F(\zeta,\xi)\big((N_2R - RN_1)e_\zeta^{(1)}, e_\xi^{(2)}\big)\Big\}.$$

Отсюда следует, что

$$\|f(N_2)R - Rf(N_1)\| \leqslant \|F\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1\times\Lambda_2)}\|N_2R - RN_1\|$$

для любого оператора $R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Следовательно,

$$\sup\{\|f(N_2)R - Rf(N_1)\| : R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2),\ \|N_2R - RN_1\| \leqslant 1\} \\ \leqslant \|F\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1\times\Lambda_2)}.$$

Остаётся доказать, что это неравенство превращается в равенство, если $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. Для этого достаточно заметить, что из равенства (2.6) следует, что для любого оператора $Q \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ найдётся оператор $R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ такой, что $Q = N_2R - RN_1$, поскольку $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на объединении $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ двух замкнутых подмножеств $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что неравенство*

$$\|f(N_2)R - Rf(N_1)\| \leqslant \|N_2R - RN_1\|$$

выполняется для любого оператора $R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, где $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – произвольные гильбертовы пространства, и всех нормальных операторов $N_1 \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$ и $N_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2)$ с простыми спектрами такими, что $\sigma(N_1) \subset \mathfrak{F}_1$ и $\sigma(N_2) \subset \mathfrak{F}_2$.

Тогда это же неравенство будет выполняться, если отказаться от требования простоты спектров нормальных операторов N_1 и N_2.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют оператор $R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ и нормальные операторы N_1 и N_2, действующие соответственно в пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, и такие, что $\sigma(N_1) \subset \mathfrak{F}_1$, $\sigma(N_2) \subset \mathfrak{F}_2$, $\|N_2R - RN_1\| = 1$ и $\|f(N_2)R - Rf(N_1)\| > 1$. Таким образом, существуют векторы $u_0 \in \mathcal{H}_1$ и $v_0 \in \mathcal{H}_2$ такие, что $\|u_0\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, $\|v_0\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ и $|((f(N_2)R - Rf(N_1))u_0, v_0)| > 1$. Пусть $\mathcal{H}_1^0$ и $\mathcal{H}_2^0$ обозначают наименьшие приводящие подпространства операторов N_1 и N_2, содержащие, соответственно, вектор u_0 и v_0. Пусть P обозначает ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{H}_1^0$, а Q – на подпространство $\mathcal{H}_2^0$. Заметим, что $\|f(N_2)QRP - QRPf(N_1)\| > 1$, поскольку

$$((f(N_2)QRP - QRPf(N_1))u_0, v_0) = ((f(N_2)R - Rf(N_1))u_0, v_0)\,.$$

Кроме того, $\|N_2QRP - QRPN_1\| = \|Q(N_2R - RN_1)P\| \leqslant 1$. Положим $N_1^0 \stackrel{\text{def}}{=} N_1|\mathcal{H}_1^0$ и $N_2^0 \stackrel{\text{def}}{=} N_2|\mathcal{H}_2^0$. Тогда операторы N_1^0 и N_2^0 можно рассматривать как нормальные операторы, соответственно, в пространствах $\mathcal{H}_1^0$ и $\mathcal{H}_2^0$. Ясно, что N_1^0 и N_2^0 – нормальные операторы с простыми спектрами. Теперь, чтобы получить противоречие, достаточно заметить, что $\|f(N_2^0)QRP - QRPf(N_1^0)\| > 1$ и $\|N_2^0QRP - QRPN_1^0\| \leqslant 1$. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Неравенство $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \geqslant \|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}$ мгновенно вытекает из лемм 2.2 и 2.3.

Докажем теперь, что $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}$. Можно считать, что $\|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})} = 1$. Достаточно доказать, что

$$\|f(N_2)R - Rf(N_1)\| \leqslant \|N_2R - RN_1\|$$

для любого оператора $R \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ и для любых нормальных операторов $N_1 \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$ и $N_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2)$ таких, что $\mathfrak{F}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(N_1) \subset \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(N_2) \subset \mathfrak{F}$, при этом можно дополнительно потребовать, чтобы множества $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ были конечными. Зафиксируем произвольные конечные подмножества $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ множества $\mathfrak{F}$ и будем рассматривать всевозможные нормальные операторы N_1 и N_2 такие, что $\sigma(N_1) \subset \mathfrak{F}_1$ и $\sigma(N_2) \subset \mathfrak{F}_2$. Из леммы 2.4 следует, что можно ограничиться случаем, когда нормальные операторы N_1 и N_2 имеют простые спектры. Тогда нужное нам неравенство следует из леммы 2.3. $\square$

Из доказательства теоремы 2.1 видно, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на замкнутом подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что существует функция $F \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})$ такая, что $(z - w)F(z, w) = f(z) - f(w)$ при всех $z, w \in \mathfrak{F}$. Тогда $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|F\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}$.*

Доказательство дословно повторяет вторую часть доказательства теоремы 2.1. $\square$

Следующая теорема – это предложение 3.3 обзора [13], см. также теорему 5.1 в монографии [12].

Теорема 2.6. *Пусть $\varphi \in \ell^\infty(S \times T)$, где S и T – произвольные множества. Тогда следующие два утверждения равносильны:*

i) $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}(S\times T)} \leqslant 1$,

ii) *существуют два семейства векторов $\{u_s\}_{s\in S}$ и $\{v_t\}_{t\in T}$ в замкнутом единичном шаре некоторого (не обязательно сепарабельного) гильбертова пространства $\mathscr{H}$ такие, что $\varphi(s,t) = (u_s, v_t)$ для всех $(s,t) \in S \times T$.*

Нам понадобится следующее замечание к этой теореме.

Замечание. Можно дополнительно потребовать, чтобы линейная оболочка как семейства $\{u_s\}_{s\in S}$, так и семейства $\{v_t\}_{t\in T}$ была всюду плотна в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}_1$ обозначает замыкание линейной оболочки семейства $\{v_t\}_{t\in T}$. Обозначим через P_1 ортогональный проектор на пространство $\mathscr{H}_1$. Тогда $\{P_1 u_s\}_{s\in S}$ и $\{v_t\}_{t\in T}$ – семейства в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_1$ такие, что $\varphi(s,t) = (P_1 u_s, v_t)$ для всех $(s,t) \in S \times T$. Обозначим через $\mathscr{H}_2$ замыкание линейной оболочки семейства $\{P_1 u_s\}_{s\in S}$, а через P_2 – ортогональный проектор на пространство $\mathscr{H}_2$. Тогда $\{P_1 u_s\}_{s\in S}$ и $\{P_2 v_t\}_{t\in T}$ – два семейства в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_2$ такие, что $\varphi(s,t) = (P_1 u_s, P_2 v_t)$ для всех $(s,t) \in S \times T$. Ясно, что линейные оболочки семейств $\{P_1 u_s\}_{s\in S}$ и $\{P_2 v_t\}_{t\in T}$ плотны в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_2$. $\square$

Далее мы будем считать, что на множествах S и T введена топология.

Отображение g, действующее из топологического пространства T в гильбертово пространство $\mathscr{H}$, будем называть *слабо непрерывным*, если g действует непрерывно из топологического пространства T в гильбертово пространство $\mathscr{H}$, наделённое слабой топологией. Другими словами, отображение $g : T \to \mathscr{H}$ слабо непрерывно, если для любого вектора $u \in \mathscr{H}$ функция $t \mapsto (g(t), u)$ непрерывна на T.

Легко видеть, что если $\mathscr{H}$-значная функция g ограничена, то непрерывность функции $t \mapsto (g(t), u)$ достаточно проверить только для векторов u, принадлежащих всюду плотному подмножеству гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

Следующая теорема является версией теоремы 2.2 в [11]. Для удобства читателя мы приводим её с доказательством.

Теорема 2.7. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}(S \times T)$, где S и T – топологические пространства. Предположим, что $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}(S\times T)} \leqslant 1$ и функция φ непрерывна по каждой переменной. Тогда существуют два семейства $\{u_s\}_{s\in S}$ и $\{v_t\}_{t\in T}$ в замкнутом единичном шаре некоторого (не обязательно сепарабельного) гильбертова пространства $\mathscr{H}$ такие, что*

а) *линейная оболочка каждого из семейств $\{u_s\}_{s\in S}$ и $\{v_t\}_{t\in T}$ плотна в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$,*

б) *отображения $s \mapsto u_s$ и $t \mapsto v_t$ слабо непрерывны,*

в) *$\varphi(s,t) = (u_s, v_t)$ для всех $(s,t) \in S \times T$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.6 и замечания к ней найдутся семейства $\{u_s\}_{s\in S}$ и $\{v_t\}_{t\in T}$ в замкнутом единичном шаре гильбертова пространства $\mathscr{H}$, удовлетворяющие условиям а) и в). Остаётся проверить, что эти семейства удовлетворяют и условию б). Ясно, что функция $s \mapsto (u_s, h)$ непрерывна для $h = v_t$, где $t \in T$. Следовательно, функция $s \mapsto (u_s, h)$ непрерывна для любого вектора $h \in \mathscr{H}$, принадлежащего линейной оболочке семейства $\{v_t\}_{t\in T}$. Таким образом, отображение $s \mapsto u_s$ слабо непрерывно в силу а), поскольку семейство $\{u_s\}_{s\in S}$ ограничено. Аналогично доказывается слабая непрерывность отображения $t \mapsto v_t$. $\square$

Замечание. Если хотя бы одно из пространств S и T сепарабельно, то пространство $\mathscr{H}$ будет сепарабельным.

Доказательство. Достаточно заметить, что если, например, пространство S сепарабельно, то замыкание линейной оболочки семейства $\{u_s\}_{s\in S}$ сепарабельно. $\square$

§3. Доказательство теоремы 1.1

Рассмотрим сначала случай, когда множество Ω связно.

Заметим, что функция f_0 удовлетворяет условию Липшица, поскольку $\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0) \subset \mathrm{OL}(\mathfrak{F}_0) \subset \mathrm{Lip}(\mathfrak{F}_0)$. Докажем, что

$$f \in \mathrm{Lip}(\mathfrak{F}) \quad \text{и} \quad \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f_0\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F}_0)}.$$

Из теоремы 1 статьи [6] (см. также [14]) следует, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant \|f_0\|_{\mathrm{Lip}(\partial\Omega)}|z_2 - z_1| \leqslant \|f_0\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F}_0)}|z_2 - z_1|$$

для любых $z_1, z_2 \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Докажем теперь, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant \|f_0\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F}_0)}|z_2 - z_1|$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathfrak{F}$. Если обе точки z_1, z_2 принадлежат множеству $\mathfrak{F}_0$, то доказывать нечего. Остаётся рассмотреть случай, когда хотя бы одна из точек z_1, z_2 не принадлежит множеству $\mathfrak{F}_0$. Пусть для определённости $z_1 \notin \mathfrak{F}_0$. Тогда $z_1 \in \Omega$. В случае $z_2 \in \overline{\Omega}$ требуемое неравенство уже доказано. Пусть теперь $z_2 \in \mathfrak{F} \setminus \overline{\Omega}$. Тогда на отрезке, соединяющим точки z_1 и z_2, найдётся точка $z_0 \in \partial\Omega \subset \mathfrak{F}_0$, и мы имеем:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant |f(z_2) - f(z_0)| + |f(z_0) - f(z_1)|$$
$$\leqslant \|f_0\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F}_0)}(|z_2 - z_0| + |z_0 - z_1|) = \|f_0\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F}_0)}|z_2 - z_1|.$$

Докажем теперь, что $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} = \|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)}$.

Если множество $\mathbb{C} \setminus \Omega$ является полярным, то множество Ω всюду плотно в $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Omega$. Заметим, что функция $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ является ограниченной аналитической функцией в Ω. Следовательно, она постоянна в Ω, поскольку множество $\mathbb{C} \setminus \Omega$ полярно. Таким образом, $f(z) = a(z - z_0) + f(z_0)$ для всех $z \in \Omega$, где $a \in \mathbb{C}$, а значит, и для всех $z \in \mathbb{C}$, поскольку $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{C})$. Теперь ясно, что $\|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)} = |a| = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathbb{C})}$.

Пусть теперь множество $\mathbb{C} \setminus \Omega$ не является полярным. Нам достаточно доказать, что $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \leqslant \|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)}$, поскольку противоположное неравенство очевидно. Пусть $C(\mathfrak{F}_0)$ обозначает пространство всех непрерывных функций на замкнутом множестве $\mathfrak{F}_0$ в случае, когда множество $\mathfrak{F}_0$ ограничено. Если замкнутое множество $\mathfrak{F}_0$ не является ограниченным, то $C(\mathfrak{F}_0)$ будет обозначать пространство всех непрерывных функций на $\mathfrak{F}_0$, имеющих конечный предел в бесконечности. Пусть $h \in C(\mathfrak{F}_0)$. Положим

$$(\mathcal{P}h)(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \int_{\mathfrak{F}_0} h(\zeta)\, d\omega_z(\zeta), & \text{если } z \in \Omega, \\ h(z), & \text{если } z \in \mathfrak{F}_0, \end{cases}$$

где ω_z обозначает гармоническую меру в точке $z \in \Omega$ относительно области Ω. Функцию $(\mathcal{P}h)|\Omega$ будем называть гармоническим продолжением из $\mathfrak{F}_0$ в Ω функции h. Рассмотрим функцию

$$F(z, w) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w}, & \text{если } z, w \in \mathfrak{F},\ \ z \neq w \\ f'(z), & \text{если } z = w \in \Omega, \\ f_0'(z), & \text{если } z = w \in \mathfrak{F}_0. \end{cases}$$

Заметим, что при каждом фиксированном $w \in \mathfrak{F}$ функция $z \mapsto F(z,w) \stackrel{\text{def}}{=} F_w(z)$ ограничена, непрерывна на $\mathfrak{F} \setminus \{w\}$ и аналитична в Ω. Отсюда следует, что функция $F_w|\Omega$ является гармоническим продолжением из $\mathfrak{F}_0$ в Ω функции $F_w|\mathfrak{F}_0$, см. [7], п. 5.7.1. Таким образом, $\mathcal{P}(F_w|\mathfrak{F}_0) = F_w$ для всех $w \in \mathfrak{F}$.

Не умаляя общности, можно считать, что $\|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)} = 1$. Заметим, что $\mathfrak{D}f_0 = F|(\mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{F}_0)$. Таким образом, $\|F\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}_0\times\mathfrak{F}_0)} = 1$ в силу теоремы 2.1. В силу теоремы 2.7 и замечания к ней найдутся два семейства $\{\varphi_\zeta\}_{\zeta\in\mathfrak{F}_0}$ и $\{\psi_\xi\}_{\xi\in\mathfrak{F}_0}$ в замкнутом единичном шаре сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ такие, что

а) линейная оболочка как семейства $\{\varphi_\zeta\}_{\zeta\in\mathfrak{F}_0}$, так и семейства $\{\psi_\xi\}_{\xi\in\mathfrak{F}_0}$ плотна в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$,

б) отображения $\zeta \mapsto \varphi_\zeta$ и $\xi \mapsto \psi_\xi$ слабо непрерывны,

в) $(\varphi_\zeta, \psi_\xi) = F(\zeta,\xi)$ для всех $\zeta,\xi \in \mathfrak{F}_0$.

Пусть $z, w \in \Omega$. Положим $\varphi_z = \int_{\partial\Omega} \varphi_\zeta \, d\omega_z(\zeta)$ и $\psi_w = \int_{\partial\Omega} \psi_\xi \, d\omega_w(\xi)$, где интегралы рассматриваются как интегралы Бохнера. Заметим, что $\|\varphi_z\|_{\mathscr{H}} \leqslant \int_{\partial\Omega} \|\varphi_\zeta\|_{\mathscr{H}} \, d\omega_z(\zeta) \leqslant 1$ при всех $z \in \Omega$. Аналогично, $\|\psi_w\|_{\mathscr{H}} \leqslant 1$ при всех $w \in \Omega$.

При каждом фиксированном $\xi \in \mathfrak{F}_0$ равенство $(\varphi_\zeta, \psi_\xi) = F(\zeta,\xi)$ имеет место для всех $\zeta \in \partial\Omega$. Применяя оператор $\mathcal{P}$ к обеим частям этого равенства как к функциям от ζ, получим $(\varphi_z, \psi_\xi) = F(z,\xi)$ для всех $z \in \mathfrak{F}$ и всех $\xi \in \mathfrak{F}_0$. Если теперь мы зафиксируем точку $z \in \mathfrak{F}$ и применим оператор $\mathcal{P}$ к обеим частям последнего равенства как к функциям от ξ, то получим: $(\varphi_z, \psi_w) = F(z,w)$ для всех $z, w \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $F \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})$ и $\|F\|_{\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})} \leqslant 1$ в силу теоремы 2.6. Теперь из теоремы 2.5 следует, что $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})} \leqslant 1$.

Таким образом, теорема доказана в случае, когда открытое множество Ω, $\Omega \subset \mathbb{C}$, является областью.

Остаётся свести случай произвольного открытого множества Ω, $\Omega \subset \mathbb{C}$, к случаю, когда Ω является областью. В общем случае множество Ω может быть представлено в виде объединения конечной или бесконечной последовательности попарно не пересекающихся областей: $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j$. Положим $\mathfrak{X}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}_0 \cup \bigcup\limits_{j=1}^{k} \Omega_j$, где $1 \leqslant k \leqslant n$ и $\mathfrak{X}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}_0$. Легко видеть, что все множества $\mathfrak{X}_k$ замкнуты и $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_n$. Из разобранного случая связных открытых множеств вытекает справедливость следующей импликации:

$$f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{X}_k) \implies f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{X}_{k+1}) \text{ и } \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{X}_{k+1})} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{X}_k)}$$

при всех целых k таких, что $0 \leqslant k < n$. Отсюда следует, что $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{X}_n) = \mathrm{CL}(\mathfrak{F})$ и $\|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{X}_0)} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{X}_n)} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F})}$, если $n < +\infty$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $n = +\infty$. Ясно, что $f \in \mathrm{CL}(\mathfrak{X}_k)$ и $\|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)} = \|f\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{X}_k)}$ для всех натуральных k. Чтобы закончить доказательство, достаточно проверить, что

$$\|f(N)R - Rf(N)\| \leqslant \|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)}\|NR - RN\|$$

для любого оператора $R \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ и любого нормального оператора $N \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ такого, что $\sigma(N) \subset \mathfrak{X}_\infty$. Как было отмечено в первом параграфе, достаточно ограничиться случаем, когда спектр оператора N конечен. В этом случае ясно, что $\sigma(N) \subset \mathfrak{X}_k$ при некотором натуральном k и мы имеем:

$$\|f(N)R-Rf(N)\| \leqslant \|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{X}_k)}\|NR-RN\| = \|f_0\|_{\mathrm{CL}(\mathfrak{F}_0)}\|NR-RN\|. \quad \square$$

Литература

1. А. Б. Александров, *Операторно липшицевы функции и дробно-линейные преобразования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **401** (2012), 5–52.
2. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, *Estimates of operator moduli of continuity.* — J. Funct. Anal. **261** (2011), 2741–2796.
3. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, *Operator and commutator moduli of continuity for normal operators.* — Proc. London Math. Soc. **(3) 105:4** (2012), 821–851.
4. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Двойные операторные интегралы Стилтьеса.* III. — Пробл. мат. физ., Вып. 6. Теория функций. Спектральная теория. Распространение волн, ЛГУ, Л., 1973, 27–53.
5. M. S. Birman, M. Z. Solomyak, *Double operator integrals in a Hilbert space.* — Integral Equations Operator Theory **47** (2003), 131–168.
6. F. W. Gehring, W. K. Hayman, A. Hinkkanen, *Analytic functions satisfying Holder conditions on the boundary.* — J. Approx. Theory **35**, no. 3 (1982), 243–249.
7. У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции.* Мир, М. 1980.
8. B. E. Johnson, J. P. Williams, *The range of a normal derivation.* — Pacific J. Math. **58** (1975), 105–122.
9. H. Kamowitz, *On operators whose spectrum lies on a circle or a line.* — Pacific J. Math. **20** (1967), 65–68.
10. E. Kissin, V. S. Shulman, *Classes of operator-smooth functions.* I. *Operator-Lipschitz functions.* — Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **48** (2005), 151–173.
11. E. Kissin, V. S. Shulman, *On fully operator Lipschitz functions.* — J. Funct. Anal. **253** (2007), 711–28.

12. G. Pisier, *Similarity problems and completely bounded maps.* — Second, expanded edition. Includes the solution to "The Halmos problem". Lecture Notes in Mathematics, 1618. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
13. G. Pisier, *Grothendieck's theorem, past and present.* — Bull. Amer. Math. Soc. **49**, No. 2 (2012), 237–323.
14. П. М. Тамразов, *Контурно-телесные результаты для голоморфных функций.* — Известия АН СССР **50**, No. 4 (1986), 835–848.

Aleksandrov A. B. Commutator Lipschitz functions and analytic continuation.

Let $\mathfrak{F}_0$ and $\mathfrak{F}$ be perfect subsets of the complex plane $\mathbb{C}$. Assume that $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ and the set $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_0$ is open. We say that a continuous function $f : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ is an analytic continuation of the function $f_0 : \mathfrak{F}_0 \to \mathbb{C}$ if f is analytic on Ω and $f|\mathfrak{F}_0 = f_0$. In the paper it is proved that if $\mathfrak{F}$ is bounded, then the commutator Lipschitz seminorm of the analytic continuation f coincides with the commutator Lipschitz seminorm of f_0. The same is true for unbounded $\mathfrak{F}$ if some natural restrictions concerning the behavior of f at infinity are imposed.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 5 мая 2015 г.