Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 433, 2015 г.

М. А. Соколов

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Петру Петровичу Кулишу
в связи с его семидесятилетием**

1. Целью настоящей работы является вывод производящих функций полиномов Чебышева трех переменных, ассоциированных с корневой системой алгебры Ли A_3. Многомерные аналоги полиномов Чебышева, связанные с системами корней простых алгебр Ли, были введены и интенсивно изучались в последние десятилетия [1–6].

Полиномы Чебышева нескольких переменных используются как в математике, так и в физике. Примеры использования, вместе с дальнейшими ссылками, можно найти работах [7–16].

Полиномы Чебышева нескольких переменных являются естественным обобщением полиномов одной переменной и, как в классическом случае, имеют два рода. Классические полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$ определяются формулой (см., например, [17])

$$T_n(x) = T_n(\cos\phi) = \cos n\phi, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

и удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1.$$

В свою очередь, классические полиномы Чебышева второго рода $U_n(x)$ определяются формулой

$$U_n(x) = \frac{\sin\,(n+1)\phi}{\sin\phi}, \quad n \geqslant 0, \quad x = \cos\phi \tag{2}$$

и удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и полиномы первого рода. Начальные условия имеют вид

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x. \tag{3}$$

Ключевые слова: Полиномы Чебышева от нескольких переменных, производящие функции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 15-01-03148-а.

Известно, что $\cos n\phi$ можно рассматривать как инвариантное среднее по группе Вейля алгебры A_1

$$\cos n\phi = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}n\phi} + e^{-\mathrm{i}n\phi}). \tag{4}$$

Переход к функциям, инвариантным относительно групп Вейля других простых алгебр Ли, приводит к обобщению классических полиномов Чебышева на случай многих переменных [1–4]. Покажем кратко, как строятся такие функции.

Пусть $R(L)$ – приведенная система корней простой алгебры Ли, являющихся векторами в d-мерном евклидовом пространстве E^d со скалярным произведением $(\,.\,,\,.\,)$. Система R полностью определяется базисом простых корней α_i, $i = 1,\ldots,d$ и конечной группой отражений $W(R)$ системы корней R – группой Вейля. Порождающие элементы группы Вейля w_i, $i = 1,\ldots,d$ действуют на простые корни по формуле $w_i\alpha_i = -\alpha_i$. Система корней R замкнута относительно действия группы Вейля. На любой вектор $x \in E^d$ элементы w группы $W(R)$ действуют как

$$w_i x = x - \frac{2(x,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i. \tag{5}$$

Каждому корню α системы R ставится в соответствие кокорень

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}.$$

Базису простых кокорней $\alpha_i^\vee$, $i = 1,\ldots,d$ соответствует дуальный базис фундаментальных весов λ_i, $i = 1,\ldots,d$

$$(\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij} \tag{6}$$

(дуальное пространство E^{d^*} отождествляется с E^d).

Полиномы Чебышева d переменных первого рода можно определить функцией

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{w\in W} e^{2\pi\mathrm{i}(w\,\mathbf{n},\boldsymbol{\phi})}, \tag{7}$$

инвариантной относительно действия группы Вейля $\Phi_{\tilde{w}\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$, $\tilde{w} \in W$, где $\mathbf{n}$ – вектор в E^d, заданный в базисе фундаментальных весов, а $\boldsymbol{\phi}$ – вектор в базисе кокорней $\{\alpha_i^\vee\}$ (отметим, что оба базиса не ортогональны)

$$\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{d} n_i \lambda_i \quad n_i \in Z, \quad \boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^{d} \phi_i \alpha_i^{\vee} \quad \phi_i \in [0,1), \quad (\lambda_i, \alpha_j^{\vee}) = \delta_{ij}. \quad (8)$$

Многочисленные свойства функций $\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$ обсуждаются в обзоре [5], где они называются функцией орбит (orbit function).

В случае алгебры Ли A_1 имеется единственный простой корень $\alpha = \alpha^{\vee}$ (при традиционной нормировке $(\alpha, \alpha) = 2$) и единственный фундаментальный вес λ, отождествляемый с $\alpha/2$ из условия ортогональности (6). Группа Вейля состоит из единичного элемента и идемпотента $w : w\alpha = -\alpha$. Таким образом, функция орбит (7)

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = e^{2\pi \mathrm{i} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi})} + e^{2\pi \mathrm{i} (w\, \mathbf{n}, \boldsymbol{\phi})} = e^{\pi \mathrm{i} n \phi} + e^{-\pi \mathrm{i} n \phi},$$

с точностью до множителя и переопределения фазы совпадает с формулой (4).

Полиномы Чебышева нескольких переменных второго рода могут быть определены формулой характеров Вейля

$$U_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\sum\limits_{w \in W} \det w \, e^{2\pi \mathrm{i} (w\, (\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\phi})}}{\sum\limits_{w \in W} \det w \, e^{2\pi \mathrm{i} (w\, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi})}} = \frac{\Phi^{as}_{\mathbf{n}+\rho}}{\Phi^{as}_{\boldsymbol{\rho}}}, \quad (9)$$

где $\det w = (-1)^{\ell(w)}$, а $\ell(w)$ – наименьшее число порождающих элементов группы Вейля, произведение которых дает элемент w, $\boldsymbol{\rho}$ – вектор Вейля, равный полусумме положительных корней. Для дальнейшего существенно, что числитель и знаменатель дроби (9) можно представить в виде

$$\Phi^{as}_{\mathbf{n}} = \Phi^{as+}_{\mathbf{n}} - \Phi^{as-}_{\mathbf{n}} = \sum_{\substack{w \in W, \\ \det w = 1}} e^{2\pi \mathrm{i} (w\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi})} - \sum_{\substack{w \in W, \\ \det w = -1}} e^{2\pi \mathrm{i} (w\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi})}, \quad (10)$$

где $\mathbf{n}$ – произвольный вектор, заданный в базисе фундаментальных весов.

2. Производящие функции являются мощным инструментом как в вопросах теории классических ортогональных полиномов, так и в различных приложениях. Их значение при переходе к полиномам Чебышева нескольких переменных не убывает. Однако, насколько нам известно, единственным примером производящих функций, полученных в явном виде, были функции полиномов двух переменных первого и второго рода, ассоциированных с алгеброй Ли A_2 [19].

В работе [20] был разработан метод вычисления производящих функций полиномов Чебышева нескольких переменных, ассоциированных с любой простой алгеброй Ли. Этот метод приспособлен к вычислению функций как первого, так и, с небольшими модификациями, второго рода. Он использует только явный вид W-инвариантной функции (7) и независим от формы рекуррентных соотношений. Этим методом были вычислены порождающие функции полиномов Чебышева обоих родов, связанных с алгебрами Ли C_2 и G_2. Суть метода заключается в следующем.

Пользуясь целочисленностью компонент $\mathbf{n}$, скалярное произведение в показателях экспонент можно записать в виде

$$(w\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi}) = \sum_k (w\lambda_k, \boldsymbol{\phi}) n_k,$$

а саму функцию $\Phi_{\mathbf{n}}$ из (7) как

$$\Phi_{\mathbf{n}} = \sum_{w \in W} \prod_k \left(e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{w}\lambda_\mathrm{k}, \boldsymbol{\phi})} \right)^{n_k} = \mathrm{tr} \left(\prod_k M_k^{n_k} \right), \tag{11}$$

где M_k есть диагональные матрицы

$$M_k = \mathrm{diag}(e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{w}_1\lambda_\mathrm{k}, \boldsymbol{\phi})}, e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{w}_2\lambda_\mathrm{k}, \boldsymbol{\phi})}, \ldots, e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{w}_{|\mathrm{W}|}\lambda_\mathrm{k}, \boldsymbol{\phi})}),$$

w_i – элементы группы Вейля и $|W|$ – ее порядок. Определим матрицы $R_k = (I_{|W|} - p_k M_k)^{-1}$, где $I_{|W|}$ – единичная $|W| \times |W|$ матрица, а p_k – вещественный параметр. Тогда функция $\Phi_{\mathbf{n}}$ представима в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) &= \Phi_{n_1,\ldots,n_d}(\boldsymbol{\phi}) \\ &= \frac{1}{n_1! \ldots n_d!} \, \frac{\mathrm{d}^\mathrm{n}}{\mathrm{d}^{\mathrm{n}_1}\mathrm{p}_1 \ldots \mathrm{d}^{\mathrm{n}_\mathrm{d}}\mathrm{p}_\mathrm{n}} \left(\mathrm{tr}(R_{p_1} \ldots R_{p_d})\right) \Big|_{p_1 = \cdots = p_d = 0}. \end{aligned}$$

Положим,

$$x_i = \Phi_{\mathbf{e}_i}(\boldsymbol{\phi}), \quad \mathbf{e}_i = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{i-1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{d-i}).$$

Простая структура матриц R_{p_k} позволяет выразить коэффициенты $\Phi_{n_1,\ldots,n_d}(\boldsymbol{\phi})$ функции

$$F^I_{p_1,\ldots,p_d} = \mathrm{tr}(R_{p_1} \ldots R_{p_d}) = \sum_{n_1 \ldots n_d \geqslant 0} \Phi_{n_1,\ldots,n_d}(\boldsymbol{\phi}) p_1^{n_1} \ldots p_d^{n_d}$$

через новые переменные x_i, поэтому она является производящей функцией полиномов Чебышева d переменных первого рода.

Для вычисления производящих функций полинов Чебышева нескольких переменных второго рода требуется только небольшая модификация описанного выше метода, заключающаяся в представлении знакопеременных функций, стоящих в числителе и знаменателе формулы Вейля, в виде разности (10). Дальнейшие вычисления повторяют изложенную выше схему для каждой из функций $\Phi_{\mathbf{n}}^{as\pm}$ в отдельности с той лишь разницей, что размерность вводимых матриц M_k, R_k равна $|W|/2$.

3. Перейдем к вычислению производящих функций полиномов Чебышева, ассоциированных с корневой системой алгебры Ли A_3. Полиномы Чебышева трех переменных были введены и изучались в работе [21] вне контекста теории алгебр Ли. В частности, в [21] были получены следующие рекуррентные соотношения

$$
\begin{aligned}
T_{k+1,m,n} &= 4zT_{k,m,n} - T_{k-1,m,n+1} - T_{k,m+1,n-1} - T_{k,m-1,n},\\
T_{k,m+1,n} &= 6rT_{k,m,n} - T_{k+1,m-1,n+1} - T_{k-1,m,n+1} - T_{k+1,m,n-1}\\
&\quad - T_{k-1,m+1,n-1} - T_{k,m-1,n}.\\
T_{k,m,n+1} &= 4\bar{z}T_{k,m,n} - T_{k,m+1,n-1} - T_{k+1,m-1,n} - T_{k-1,m,n},
\end{aligned}
$$

с помощью которых найдены несколько полиномов.

Будем использовать удобное представление корней алгебры Ли A_3 векторами евклидова пространства E^4 (см., например, [18]) со скалярным произведением $(.,.)_E$. Далее индекс у скалярного произведения будет опускаться. Если e_i – единичные векторы $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, то тройка фундаментальных векторов корневой системы, задающих гиперплоскость в E^4, определяется как $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$. Положительные корни составляют множество $\alpha_{ij} = e_i - e_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, в котором к фундаментальным векторам добавляются $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. Все корни имеют одинаковую длину $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$.

Фундаментальные веса определяются формулами

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{3}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_4,\\
\lambda_2 &= \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4,\\
\lambda_3 &= \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_3 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{3}{4}e_4.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Вектор Вейля имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2}(3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{2}(3e_1 + e_2 - e_3 - 3e_4). \quad (13)$$

Группа Вейля $W(A_3)$ отождествляется с группой перестановок векторов e_i, $i = 1, \dots, 4$, имеющей в рассматриваемом случае $4! = 24$ элемента. Образующими этой группы являются элементы w_1, w_2, w_3, переставляющие, соответственно, векторы e_1 и e_2, e_2 и e_3, e_3 и e_4.

4. Следуя схеме изложенной в п. 2, найдем явный вид W - инвариантной функции $\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$ (7). Для этого вычислим скалярные произведения $(w\lambda_k, \boldsymbol{\phi})$ для всех элементов группы Вейля, учитывая обозначение $\boldsymbol{\phi} = \sum\limits_i \phi_i \alpha_i$ и представление корней и фундаментальных весов через ортогональные векторы e_i (12). Результат вычислений представим в виде трех диагональных матриц

$$\begin{aligned}
A_1 = \mathrm{diag}(&\phi_1, -\phi_1 + \phi_2, \phi_1, \phi_1, -\phi_1 + \phi_2, -\phi_2 + \phi_3, -\phi_1 + \phi_2, \phi_1, \phi_1,\\
&- \phi_2 + \phi_3, -\phi_1 + \phi_2,\\
&- \phi_3, \phi_1, -\phi_1 + \phi_2, -\phi_2 + \phi_3, -\phi_2 + \phi_3, -\phi_3, -\phi_3, -\phi_1 + \phi_2,\\
&- \phi_2 + \phi_3, -\phi_3, -\phi_3, -\phi_3, -\phi_2 + \phi_3)\\
A_2 = \mathrm{diag}(&\phi_2, \phi_2, \phi_1 - \phi_2 + \phi_3, \phi_2, -\phi_1 + \phi_3, \phi_1 - \phi_2 + \phi_3, \phi_2, \phi_1 - \phi_2\\
&+ \phi_3, \phi_1 - \phi_3,\\
&- \phi_1 + \phi_3, \phi_1 - \phi_3, -\phi_1 + \phi_3, \phi_1 - \phi_2 + \phi_3, -\phi_1 + \phi_2 - \phi_3,\\
&\phi_1 - \phi_3, -\phi_1 + \phi_3,\\
&- \phi_1 + \phi_2 - \phi_3, \phi_1 - \phi_3, -\phi_1 + \phi_2 - \phi_3, -\phi_2, -\phi_1 + \phi_2\\
&- \phi_3, -\phi_2, -\phi_2, -\phi_2),\\
A_3 = \mathrm{diag}(&\phi_3, \phi_3, \phi_3, \phi_2 - \phi_3, \phi_3, \phi_3, \phi_2 - \phi_3, \phi_1 - \phi_2, \phi_2 - \phi_3, \phi_3,\\
&\phi_1 - \phi_2, -\phi_1, \phi_1 - \phi_2,\\
&\phi_2 - \phi_3, \phi_2 - \phi_3, -\phi_1, \phi_2 - \phi_3, \phi_1 - \phi_2, -\phi_1, -\phi_1, -\phi_1,\\
&\phi_1 - \phi_2, -\phi_1, \phi_1 - \phi_2),
\end{aligned}$$

с помощью которых функция $\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$ записывается в виде (11)

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \mathrm{tr}(e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3})}). \quad (14)$$

Обозначая $M_k = e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{A_k}}$, введем матрицы $R_k = (I_{24} - p_k M_k)^{-1}$, $k = 1, 2, 3$, где p_k – вещественные параметры I_{24} – единичная 24×24 матрица. В терминах матриц R_k функция $\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$ имеет вид

$$\Phi_{n_1,n_2,n_3}(\phi) = \frac{1}{n_1!n_2!n_3!}\,\frac{\mathrm{d}^{(\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2+\mathrm{n}_3)}}{\mathrm{d}^{\mathrm{n}_1}\mathrm{p}_1\mathrm{d}^{\mathrm{n}_2}\mathrm{p}_2\mathrm{d}^{\mathrm{n}_3}\mathrm{p}_3}\left(\mathrm{tr}(R_{p_1}R_{p_2}R_{p_3})\right)\Big|_{p_1=p_2=p_3=0}, \tag{15}$$

откуда вытекает, что функция $F^I_{p_1,p_2,p_3} = \mathrm{tr}(R_{p_1}R_{p_2}R_{p_3})$, выраженная в терминах обобщенных косинусов, является производящей функцией полиномов Чебышева первого рода. Вычисление функции (15) при значениях индексов $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ дает

$$\Phi_{1,0,0} = 6z, \quad \Phi_{0,1,0} = 4r, \quad \Phi_{0,0,1} = 6\bar{z},$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} z &= e^{2\pi\mathrm{i}\phi_1} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\phi_1+\phi_2)} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\phi_2+\phi_3)} + e^{-2\pi\mathrm{i}\phi_3},\\ r &= e^{2\pi\mathrm{i}\phi_2} + e^{2\pi\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2+\phi_3)}\\ &\quad + e^{2\pi\mathrm{i}(-\phi_1+\phi_3)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\phi_1-\phi_3)} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\phi_1+\phi_2-\phi_3)} + e^{-2\pi\mathrm{i}\phi_2},\\ \bar{z} &= e^{2\pi\mathrm{i}\phi_3} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\phi_3+\phi_2)} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\phi_2+\phi_1)} + e^{-2\pi\mathrm{i}\phi_1}. \end{aligned} \tag{16}$$

В терминах $z,\bar{z},r$ производящая функция $F^I_{p_1,p_2,p_3}$ представляется в виде

$$F^I_{p_1,p_2,p_3} = \frac{\sum\limits_{i,j,k=0}^{i,k=3;j=5} K_{i,j,k}(z,r,\bar{z})p_1^i p_2^j p_3^k}{Z_{p_1}Z_{p_2}Z_{p_3}}, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} Z_{p_1} &= 1 - zp_1 + rp_1^2 - \bar{z}p_1^3 + p_1^4,\\ Z_{p_2} &= 1 - rp_2 + (z\bar{z}-1)p_2^2 - (z^2+\bar{z}^2-2r)p_2^3 + (z\bar{z}-1)p_2^4 - rp_2^5 + p_2^6,\\ Z_{p_3} &= 1 - \bar{z}p_3 + rp_3^2 - zp_3^3 + p_3^4. \end{aligned} \tag{18}$$

Полиномиальные по $z,r,\bar{z}$ коэффициенты $K(i,j,k)$ несложно вычислить. Поскольку они обладают свойством симметрии

$$\overline{K}_{i,j,k}(z,r,\bar{z}) = K_{k,j,i}(\bar{z},r,z),$$

в Приложении 1 приведены только $K(i,j,k)$ с индексами $i \leqslant k$.

Производящая функция (17) позволяет вычислять полиномы Φ_{n_1,n_2,n_3} с любым набором индексов. Как было указано выше, младшие полиномы $\Phi_{1,0,0}, \Phi_{0,1,0}, \Phi_{0,0,1}$ имеют целочисленные множители. Причина появления таких множителей в наличии стабилизаторов (стационарных подгрупп), оставляющих инвариантными фундаментальные веса при действии на них группы Вейля. В работе [5] были найдены орбиты группы Вейля $W(A_3)$. В соответствии с их результатом, удобной нормировкой для полиномов Чебышева T_{n_1,n_2,n_3} первого рода трех переменных является следующая

$$
\begin{aligned}
&T_{0,0,0} = \frac{\Phi_{0,0,0}}{24}, \quad T_{n_1,0,0} = \frac{\Phi_{n_1,0,0}}{6}, \quad T_{0,n_2,0} = \frac{\Phi_{0,n_2,0}}{4},\\
&T_{0,0,n_3} = \frac{\Phi_{0,0,n_3}}{6}\\
&T_{n_1,n_2,0} = \frac{\Phi_{n_1,n-2,0}}{2}, \quad T_{0,n_2,n_3} = \frac{\Phi_{0,n_2,n_3}}{2}, \qquad T_{n_1,0,n_3} = \frac{\Phi_{n_1,0,n_3}}{2},\\
&T_{n_1,n_2,n_3} = \Phi_{n_1,n_2,n_3},
\end{aligned}
$$

поскольку в этой нормировке все коэффициенты полиномов целочисленны (в отличии от работы [21]). В Приложении 2 приведены несколько полиномов Чебышева первого рода трех переменных, ассоциированных с алгеброй Ли A_3.

5. Переходя к вычислению производящей функции полиномов второго рода, заметим, что вектор Вейля в терминах фундаментальных весов равен сумме этих весов $\rho = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$. Таким образом, функцию (9) можно записать в виде

$$
U_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\Phi^{as}_{n_1+1,n_2+1,n_3+1}}{\Phi^{as}_{1,1,1}},
$$

Следуя формуле (10), представим функцию (7) в соответствии со знаком $\det w$ в виде разности $\Phi^{as+}_{\mathbf{n}} - \Phi^{as-}_{\mathbf{n}}$. Введем диагональные матрицы

$$
\begin{aligned}
A_{1+} = \mathrm{d}iag(&\phi_1, -\phi_1+\phi_2, -\phi_2+\phi_3, -\phi_1+\phi_2, \phi_1, \phi_1, -\phi_2+\phi_3, -\phi_3,\\
&-\phi_3, -\phi_1+\phi_2, -\phi_3, -\phi_2+\phi_3),\\
A_{2+} = \mathrm{d}iag(&\phi_2, -\phi_1+\phi_3, \phi_1-\phi_2+\phi_3, \phi_2, \phi_1-\phi_2+\phi_3, \phi_1-\phi_3,\\
&-\phi_1+\phi_3, -\phi_1+\phi_2-\phi_3, \phi_1-\phi_3, -\phi_1+\phi_2-\phi_3, -\phi_2, -\phi_2),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
A_{3+} &= \mathrm{diag}(\phi_3, \phi_3, \phi_3, \phi_2-\phi_3, \phi_1-\phi_2, \phi_2-\phi_3, -\phi_1, \phi_2-\phi_3, \phi_1-\phi_2, \\
&\quad -\phi_1, -\phi_1, \phi_1-\phi_2), \\
A_{1-} &= \mathrm{diag}(-\phi_1+\phi_2, \phi_1, \phi_1, -\phi_2+\phi_3, \phi_1, -\phi_1+\phi_2, -\phi_2+\phi_3, \\
&\quad -\phi_1+\phi_2, -\phi_3, -\phi_2+\phi_3, -\phi_3, -\phi_3), \\
A_{2-} &= \mathrm{diag}(\phi_2, \phi_1-\phi_2+\phi_3, \phi_2, -\phi_1+\phi_3, \phi_1-\phi_3, -\phi_1+\phi_3, \\
&\quad \phi_1-\phi_2+\phi_3, -\phi_1+\phi_2-\phi_3, \phi_1-\phi_3, -\phi_2, -\phi_1+\phi_2-\phi_3, -\phi_2), \\
A_{3-} &= \mathrm{diag}(\phi_3, \phi_3, \phi_2-\phi_3, \phi_3, \phi_1-\phi_2, -\phi_1, \phi_1-\phi_2, \phi_2-\phi_3, \phi_2-\phi_3, \\
&\quad -\phi_1, -\phi_1, \phi_1-\phi_2).
\end{aligned}$$

В терминах этих матриц функция, стоящая в числителе формулы характеров, запишется в виде

$$\Phi^{as}_{n_1+1,n_2+1,n_3+1} = \mathrm{tr}(M_{1+}^{n_1+1} M_{2+}^{n_2+1} M_{3+}^{n_3+1} - M_{1-}^{n_1+1} M_{2-}^{n_2+1} M_{3-}^{n_3+1}),$$

где, как и ранее, $M_{k\pm} = exp(2\pi \mathrm{i} \mathrm{A}_{\mathrm{k}\pm})$. Определим матрицы $R_{k\pm} = (I_{12} - p_k M_{k\pm})^{-1}$, $k = 1,2,3$, где p_k – вещественные параметры I_{12} – единичная 12×12 матрица. Тогда функция

$$F^{II}_{p_1,p_2,p_3} = \frac{\mathrm{tr}(R_{1+}R_{2+}R_{3+} - R_{1-}R_{2-}R_{3-})}{\mathrm{tr}(M_{1+}M_{2+}M_{3+} - M_{1-}M_{2-}M_{3-})}$$

является производящей функцией полиномов второго рода. Ее вычисление аналогично вычислению производящей функцией полиномов первого рода. В терминах введенных ранее переменных (16) эта функция имеет вид

$$F^{II}_{p_1,p_2,p_3} = \frac{L_1(p_1,p_2,p_3) + zL_2(p_1,p_2,p_3) + rL_3(p_1,p_2,p_3) + \bar{z}L_4(p_1,p_2,p_3)}{Z_{p_1}Z_{p_2}Z_{p_3}}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1(p_1,p_2,p_3) &= 1 - p_2^2 - p_1p_3 - p_1^2p_2^4p_3^2 - p_1^2p_2^3 - p_2^3p_3^2 + p_1^2p_2^2p_3^2 \\
&\quad + p_1^2p_2 + p_2p_3^2 + p_1p_2^4p_3, \\
L_2(p_1,p_2,p_3) &= p_3^2p_2^3p_1 + p_1p_2^2 - p_2p_3 - p_1^2p_2^2p_3, \\
L_3(p_1,p_2,p_3) &= -p_3p_2^3p_1 + p_2p_3p_1, \\
L_4(p_1,p_2,p_3) &= p_3p_2^2 + p_3p_2^3p_1^2 - p_1p_2^2p_3^2 - p_1p_2,
\end{aligned}$$

а Z_{p_i} определены в (18). Несколько "первых" полиномов Чебышева, вычисленных с помощью этой функции, приведены в Приложении 3.

Благодарности

Автор признателен Е. В. Дамаскинскому за полезные обсуждения и комментарии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 15-01-03148-а.

Приложение 1. Список коэффициентов для производящей функции полиномов Чебышева 1-го рода к формуле (17) ($\overline{K}_{i,j,k}(z,r,\bar{z}) = K_{k,j,i}(\bar{z},r,z)$)

$K_{000} = 24,$

$K_{001} = -18\bar{z},$

$K_{002} = 12r,$

$K_{003} = -6z,$

$K_{010} = -20r,$

$K_{011} = 16r\bar{z} - 6z,$

$K_{012} = -12r^2 + 4z\bar{z} + 8,$

$K_{013} = -6\bar{z} + 6rz,$

$K_{020} = 16z\bar{z} - 16,$

$K_{021} = 20\bar{z} + 4rz - 14z\bar{z}^2,$

$K_{022} = 10rz\bar{z} - 6z^2 - 6\bar{z}^2 - 8r,$

$K_{023} = -6\bar{z}z^2 + 4r\bar{z} + 12z,$

$K_{101} = 14z\bar{z} - 8,$

$K_{102} = -10zr + 6\bar{z},$

$K_{103} = 6z^2 - 4r,$

$K_{111} = 12r + 3z^2 + 3\bar{z}^2 - 13z\bar{z}r,$

$K_{112} = 10r^2z - 10z - 2z^2\bar{z} - 8r\bar{z},$

$K_{030} = 24r - 12z^2 - 12\bar{z}^2,$

$K_{031} = 10z^2\bar{z} - 28r\bar{z} - 6z + 12\bar{z}^3,$

$$K_{032} = -8z^2r - 83\bar{z}^2r + 16r^2 + 16z\bar{z} - 16,$$

$K_{033} = 6z^3 - 16rz + 4\bar{z}^2z - 4\bar{z},$

$K_{040} = 8z\bar{z} - 8,$

$K_{041} = 4rz + 14\bar{z} - 8\bar{z}^2z,$

$K_{042} = -6\bar{z}^2 - 6z^2 - 4r + 6zr\bar{z},$

$K_{043} = 10z + 4\bar{z}r - 4z^2\bar{z},$

$K_{050} = -4r,$

$K_{051} = -6z + 4r\bar{z},$

$K_{052} = -4r^2 + 4z\bar{z} - 8,$

$K_{053} = 12zr - 6\bar{z},$

$$K_{121} = 12z^2\bar{z}^2 - 2\bar{z}^2r - 2z^2r - 4r^2 - 24z\bar{z},$$

$$K_{122} = -4\bar{z} + 3z^3 + 16zr - 9z^2\bar{z}r + 7z\bar{z}^2 + 2\bar{z}r^2,$$

$$K_{123} = 6z^3\bar{z} - 8r - 7rz\bar{z} + 3\bar{z}^2 - 9z^2,$$

$$K_{131} = -10\bar{z}^3z - 10z^3\bar{z} + 7\bar{z}^2 + 7z^2 - 8r + 29rz\bar{z},$$

$$K_{132} = 8z^3r + 12z - 3\bar{z}^3 + 7z\bar{z}^2r$$

$$- 15z^2\bar{z} - 18r^2 z + 4\bar{z}r,$$

$$K_{113} = 4r^2 - 6z^2 r + 4z\bar{z} + 8, \qquad K_{133} = -6z^4 - 4\bar{z}^2 z^2 + 2\bar{z}^2 r + 18z^2 r + 4z\bar{z} - 4r^2,$$

$$K_{141} = 8z^2\bar{z}^2 - 11z\bar{z} - 4z^2 r - 4\bar{z}^2 r + 4r^2 + 8, \qquad K_{151} = -4r + 6z^2 + 6\bar{z}^2 - 4rz\bar{z},$$

$$K_{142} = -2\bar{z} + 6z^3 - 6z^2\bar{z}r + 2\bar{z}r^2 + 8z\bar{z}^2 + 2zr, \qquad K_{152} = 4r^2 z - 2z - 4z^2\bar{z} - 4r\bar{z},$$

$$K_{143} = 4z^3\bar{z} - 5z\bar{z}r - 13z^2 - 3\bar{z}^2 + 12r, \qquad K_{153} = -2z^2 r + 8z\bar{z} - 8,$$

$$K_{202} = 8r^2 - 4z\bar{z} - 8, \qquad K_{212} = -8r^3 + 5rz\bar{z} + 3z^2 + 3\bar{z}^2 + 12r,$$

$$K_{203} = -4zr + 6\bar{z}, \qquad K_{213} = 4zr^2 - 8r\bar{z} - 6z,$$

$$K_{222} = 7r^2 z\bar{z} - 2z^2\bar{z}^2 - 5rz^2 - 5r\bar{z}^2 - 8r^2 - 8z\bar{z} + 16,$$

$$K_{223} = -4\bar{z} - 4rz^2\bar{z} + 4z\bar{z}^2 + 12zr + 2r^2\bar{z},$$

$$K_{232} = -6r^2 z^2 - 6r^2\bar{z}^2 - 24r + 4z^2 + 4\bar{z}^2 + 2\bar{z}^3 z + 2z^3\bar{z} + 12r^3 + 12rz\bar{z},$$

$$K_{233} = 3\bar{z}^2 zr - 10r^2 z - 7\bar{z}z^2 + 4z^3 r - 3\bar{z}^3 + 4r\bar{z} + 4z,$$

$$K_{242} = 24z\bar{z}r^2 - 2z^2\bar{z}^2 - 7z^2 r - 7\bar{z}^2 r + 4z\bar{z} - 8,$$

$$K_{243} = -3rz^2\bar{z} + 5z\bar{z}^2 + 3z^3 + 2r^2\bar{z} - 2\bar{z},$$

$$K_{252} = -4r^3 + 12r + 7rz\bar{z} - 3z^2 - 3\bar{z}^2, \qquad K_{323} = 2z^2\bar{z}^2 - 8z\bar{z} - 4r^2 + 8z\bar{z},$$

$$K_{253} = 2r^2 z - 2\bar{z}z^2 - 4r\bar{z} + 2z, \qquad K_{333} = -2\bar{z}z^3 - 2z\bar{z}^3 + 7rz\bar{z} + 5z^2 + 5\bar{z}^2 - 8r,$$

$$K_{303} = 2z\bar{z} - 8, \qquad K_{343} = 2z^2\bar{z}^2 - 2r\bar{z}^2 - 2rz^2 + 4r^2 - 10z\bar{z} + 8,$$

$$K_{313} = -2rz\bar{z} + 12r, \qquad K_{353} = -1rz\bar{z} + 3z^2 + 3\bar{z}^2 - 4r.$$

Приложение 2. Перечень "первых" полиномов Чебышева 1-го рода от трех переменных ($\overline{T}_{i,j,k}(z,r,\bar{z}) = T_{k,j,i}(\bar{z},r,z)$)

$$T_{000} = 1, \qquad T_{111} = rz\bar{z} - 3\bar{z}^2 + 4r - 3z^2,$$

$$T_{100} = z, \qquad T_{030} = -3rz\bar{z} - 3r + 3z^2 + 3\bar{z}^2 + r^3,$$

$T_{010} = r,$

$T_{200} = z^2 - 2r,$

$T_{110} = rz - 3\bar{z},$

$T_{101} = z\bar{z} - 4,$

$T_{020} = 2 - 2z\bar{z} + r^2,$

$T_{300} = 3\bar{z} - 3rz + z^3,$

$T_{210} = -2r^2 + z^2 r - z\bar{z} + 4,$

$T_{201} = -2\bar{z}r + \bar{z}z^2 - z,$

$T_{120} = 5z - 2\bar{z}z^2 + r^2 z - \bar{z}r,$

$T_{400} = 4z\bar{z} - 4z^2 r + z^4 + 2r^2 - 4,$

$T_{310} = 5\bar{z}r - 3r^2 z + z^3 r - \bar{z}z^2 + z,$

$T_{301} = 3\bar{z}^2 - 3rz\bar{z} + z^3\bar{z} + 2r - z^2,$

$$T_{220} = 2r + 4rz\bar{z} - 2r^3 + 2z^2 - 2z^3\bar{z} + r^2 z^2 - 3\bar{z}^2,$$

$T_{211} = -2r^2\bar{z} + z^2\bar{z}r - z\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 8rz - 3z^3,$

$T_{202} = -2\bar{z}^2 r + z^2\bar{z}^2 + 4r^2 - 2z^2 r - 4,$

$$T_{130} = -2rz - r^2\bar{z} - 3z^2\bar{z}r + 3z^3 + 5z\bar{z}^2 + zr^3 - 5\bar{z},$$

$T_{121} = 10z\bar{z} - 2z^2\bar{z}^2 + r^2 z\bar{z} - \bar{z}^2 r - z^2 r - 8,$

$$T_{040} = 6 - 8z\bar{z} + 4\bar{z}^2 r - 4r^2 + 4z^2 r + 3z^2\bar{z}^2 - 4r^2 z\bar{z} + r^4.$$

Приложение 3. Перечень “первых” полиномов Чебышева 2-го рода от трех переменных ($\overline{T}_{i,j,k}(z,r,\bar{z}) = T_{k,j,i}(\bar{z},r,z)$)

$U_{000} = 1,$

$U_{100} = z,$

$U_{010} = r,$

$U_{200} = -r + z^2,$

$U_{110} = zr - \bar{z},$

$U_{101} = -1 + z\bar{z},$

$U_{020} = -z\bar{z} + r^2,$

$U_{300} = \bar{z} - 2zr + z^3,$

$U_{210} = -r^2 + rz^2 + 1 - z\bar{z},$

$U_{201} = -\bar{z}r + \bar{z}z^2 - z,$

$U_{120} = z - \bar{z}z^2 + zr^2 - \bar{z}r,$

$U_{111} = rz\bar{z} - \bar{z}^2 - z^2,$

$U_{030} = -r - 2rz\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + r^3,$

$U_{400} = -1 + 2z\bar{z} + r^2 - 3rz^2 + z^4,$

$U_{310} = 2\bar{z}r - 2zr^2 + rz^3 - \bar{z}z^2 + z,$

$U_{301} = \bar{z}^2 - 2rz\bar{z} + z^3\bar{z} + r - z^2,$

$U_{220} = r - r^3 + z^2 - z^3\bar{z} + r^2 z^2,$

$U_{211} = \bar{z} - \bar{z}r^2 + \bar{z}rz^2 - z\bar{z}^2 + zr - z^3,$

$U_{202} = -z\bar{z} + r^2 - r\bar{z}^2 - rz^2 + z^2\bar{z}^2,$

$U_{130} = -2\bar{z}rz^2 + z^3 + 2z\bar{z}^2 + zr^3 - \bar{z} - \bar{z}r^2,$

$U_{121} = -r\bar{z}^2 + 3z\bar{z} - z^2\bar{z}^2 + r^2 z\bar{z} - 1 - rz^2,$

$$U_{040} = 2rz^2 + 2r\bar{z}^2 - 2r^2 + 1 - 2z\bar{z} + z^2\bar{z}^2 - 3r^2 z\bar{z} + r^4.$$

Литература

1. T. N. Koornwinder, *Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators* I–IV. — Indagationes Mathematicae Proc. **77** (1974), 48–66, 357–81.
2. G. J. Heckman, *Root systems and hypergeometric functions* II. — Comp. Math. **64** (1987), 353–73.
3. M. E. Hoffman, W. D. Withers, *Generalized Chebyshev polynomials associated with affine Weyl groups.* — Trans. Am. Math. Soc. **308** (1988), 91–104.
4. R. J. Beerends, *Chebyshev polynomials in several variables and the radial part Laplace–Beltrami operator.* — Trans. Am. Math. Soc. **328** (1991), 770–814.
5. A. Klimyk, J. Patera, *Orbit functions.* — SIGMA **2** 006 (2006).
6. V. D. Lyakhovsky, Ph. V. Uvarov, *Multivariate Chebyshev polynomials.* — J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013), 125201.
7. B. N. Ryland, H. Z. Munthe–Kaas, *On multivariate Chebyshev polynomials and spectral approximations on triangles Spectral and High OrderMethods for Partial Differential Equations.* — Lecture Notes in Computer Science and Engineering **76**, Berlin, Springer (2011), 19–41.
8. B. Shapiro, M. Shapiro, *On Eigenvalues of Rectangular Matrices.* — Тр. МИАН **267** (2009), 258–265.
9. П. П. Кулиш, В. Д. Ляховский, О. В. Постнова, *Функция кратностей для тензорных степеней модулей алгебры* A_n. — ТМФ **171** (2012), 283–293.
10. P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, *Tensor power decomposition.* B_n*-case.* — Journal of Physics: Conference Series **343** (2012), 012095.
11. P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, *Tensor powers for non-simply laced Lie algebras* B_2*-case.* — Journal of Physics: Conference Series **346** (2012), 012012.
12. V. D. Lyakhovsky, *Multivariate Chebyshev polynomials in terms of singular elements.* — Theoretical and Mathematical Physics **175** (2013), 797–805.
13. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Chebyshev–Koornwinder oscillator.* — Theoretical and Mathematical Physics **175** (2013), 765–772.
14. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *The algebra of two dimensional generalized Chebyshev–Koornwinder oscillator.* — Journal of Mathematical Physics **55** (2014), 103505.
15. G. Von Gehlen, S. Roan, *The superintegrable chiral Potts quantum chain and generalized Chebyshev polynomials.* — Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory, eds. S. Pakuliak, G. Von Gehlen, NATO Science Series, **35** 155–172, Berlin, Springer (2001).
16. Von Gehlen G 2002 *Onsager's algebra and partially orthogonal polynomials.* — Int. J. Mod. Phys. **B 16** 2129.
17. П. К. Суэтин, *Классические ортогональные многочлены.* Наука, М., 1979.
18. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI, Мир, М., 1972.
19. Ken B. Dunn, R. Lidl, *Generalizations of the classical Chebyshev polynomials to polynomials in two variables.* — Czech. Math. J. **32** (1982), 516–528.

20. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. А. Соколов, *О вычислении производящих функций обобщенных полиномов Чебышева нескольких переменных.* Препринт ПОМИ 13/2014.
21. SUN JiaChang, *A new class of three-variable orthogonal polynomials and their recurrences relations.* — Science in China, Series A: Mathematics, Jun. **51** (2008) 1071–1092.

Sokolov M. A. Generating functions of Chebyshev polynomials in three variables.

In this paper generating functions of three-variable Chebyshev polynomials (of the first, as well as of the second type) associated with the root system of A_3 Lie algebra are obtained.

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет
E-mail: masokolov@gmail.com

Поступило 11 марта 2015 г.