

А. Г. Пронько

## ПЯТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ

Посвящается Петру Петровичу Кулишу  
в связи с его 70-летием

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Создание квантового метода обратной задачи [1] (см. также [2]) дало мощный толчок исследованию квантовых интегрируемых моделей. Важным объектом исследований являлись одномерные бозонные модели, в частности, связанные с  $q$ -деформациями алгебры Гейзенберга [3–5]. В одном из предельных случаев ( $q \rightarrow 0$ ) алгебра  $q$ -бозонов описывает операторы квантовой фазы, а связанная с ней одномерная квантовая цепочка является т.н. фазовой моделью [7]. В рамках квантового метода обратной задачи эта модель описывается перестановочными соотношениями с  $R$ -матрицей пятивершинной модели.

В настоящей работе рассматривается пятивершинная модель на конечной, размера  $M \times 2N$ , решетке с фиксированными граничными условиями, которые соответствуют в квантовом методе обратной задачи скалярному произведению бетевских векторов вне поверхности масс. Для этого скалярного произведения известно представление в виде определителя. Нашей целью является обсуждение этого представления в приложении к описанию различных перечислений плоских разбиений в коробке размера  $N \times N \times (M - N)$ . Показано, что в точке свободных фермионов модели эта формула воспроизводит формулу МакМагона числа плоских разбиений в коробке, а в общем случае произвольных весов (вне точки свободных фермионов) в однородном пределе описывает перечисления с весом определяемым функцией числа скачков вдоль вертикальных (или горизонтальных) рядов. Получены

---

*Ключевые слова:* вершинные модели, фиксированные граничные условия, скалярные произведения, плоские разбиения в коробке, детерминантные представления, ганкелевы матрицы, многократные интегралы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 14-11-00598.

различные представления для статистической суммы пятивершинной модели, которая описывает такие перечисления.

Необходимо отметить, что при изучении квантовых интегрируемых моделей часто возникают результаты имеющие приложения к задачам комбинаторики. Знаменитым примером является формула Изергина–Корепина для статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки [8–10]. Эта формула позволяет доказывать различные утверждения о перечислениях переменных знаковых матриц [11] (см. также [12]). Плоские разбиения допускают интерпретацию в контексте фазовой модели [13] и четырехвершинной модели [14]. Корреляционные функции спиновых цепочек Гейзенберга тесно связаны с перечислениями плоских разбиений и случайными блужданиями на решетке [15, 16].

В связи с этими результатами, представляется естественным расширение списка задач комбинаторики которые могут целенаправленно решаться с помощью методов основанных на квантовой интегрируемости. Определенный успех достигнутый в этом направлении с использованием шестивершинной модели [17–20] позволяет надеяться, что аналогичный прогресс может быть получен в контексте других моделей, например, пятивершинной модели.

## §2. ДЕТЕРМИНАНТНАЯ ФОРМУЛА ПЯТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

Пятивершинная модель является частным случаем шестивершинной модели, у которой одна из первых четырех вершин, расположенных в стандартном порядке, см. Рис. 1, запрещена (имеет нулевой вес). Напомним, что конфигурации шестивершинной модели обычно изображаются путем размещения стрелок на ребрах квадратной решетки, с условием, что у каждой вершины решетки имеются две входящие и две исходящие стрелки. Эквивалентно, конфигурации модели могут быть изображены в терминах линий протекающих по ребрам решетки. Взаимно-однозначное соответствие между стрелками и линиями вводится, например, по правилу, что если стрелка направлена вниз или влево, то на этом ребре есть линия, а если вправо или вверх, то такое ребро пустое. Нам будет удобно использовать пятивершинную модель определенную таким образом, что ее конфигурации описываются непересекающимися линиями. В силу указанного выше соответствия между описаниями в терминах стрелок и линий, это означает, что в этой модели вершина второго типа имеет вес равный нулю.

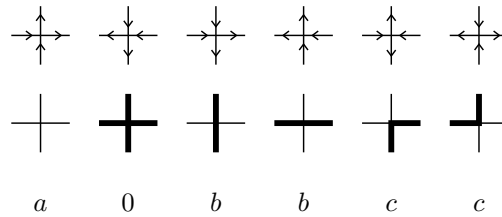


Рис. 1. Шесть конфигураций шестивершинной модели в терминах стрелок на ребрах (первый ряд), жирных линий (второй ряд), и их веса в пятивершинной модели (третий ряд).

Кроме того, будем полагать, что вершины, которые попарно связаны преобразованием обращения всех стрелок, имеют одинаковые веса; в результате, веса вершин будут параметризоваться тремя различными весовыми функциями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , см. Рис. 1.

Здесь мы будем рассматривать пятивершинную модель на конечной квадратной решетке образованной пересечением  $M$  горизонтальных и  $2N$  вертикальных прямых,  $N \leq M$ , с определенными фиксированными граничными условиями, см. Рис. 2. А именно, на горизонтальных внешних ребрах на левой и правой границах все стрелки направлены вправо, на вертикальных внешних ребрах на верхней границе первые  $N$  стрелок направлены вверх и последние  $N$  — вниз, а нижней границе первые  $N$  стрелок направлены вниз и последние  $N$  — вверх. Смысл этих условий состоит в том, что в терминах линий конфигурации модели состоят из  $N$  линий втекающих сверху справа и вытекающих слева снизу, см. пример конфигурации на второй картинке Рис. 2.

Статистическая сумма модели определяется формулой

$$Z = \sum_C \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^{2N} W_{ij}(C) \quad (1)$$

где сумма берется по всем возможным состояниям (размещением стрелок на внутренних ребрах), а весовая функция вершины  $W_{ij}$ , где вершины нумеруются как элементы  $M \times 2N$  матрицы, принимает соответствующее значение веса для стрелочной конфигурации вершины,  $W_{ij} = a, b, c$ .

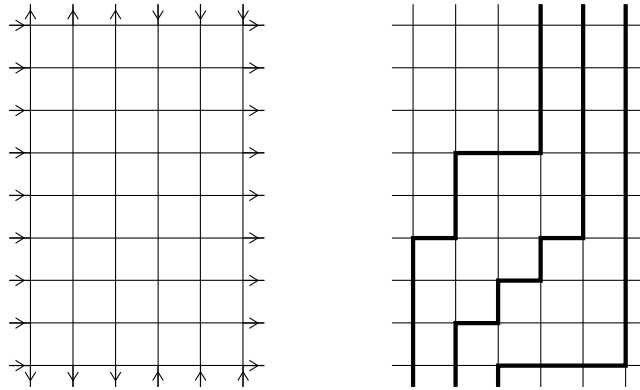


Рис. 2. Фиксированные граничные условия на  $M \times 2N$  решетке (слева) и пример конфигурации пятивершинной модели в терминах линий (справа),  $M = 9$ ,  $N = 3$ .

Определенная таким образом статистическая сумма описывает однородную модель, т.е. модель в которой веса  $a, b, c$  не зависят от координат. Естественным обобщением такой модели является неоднородная модель, в которой  $W_{ij} = a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ . Мы будем рассматривать ниже специальный случай такого обобщения, в котором веса не зависят от номера горизонтального ряда, но зависят от номера вертикального ряда,  $W_{ij} = a_j, b_j, c_j$ .

Наши вычисления будут основаны том факте, что статистическая сумма такой частично-неоднородной пятивершинной модели, при определенной параметризации весов  $a_j, b_j, c_j$ , равна скалярному произведению бетевских состояний вне поверхности масс (без требования выполнения уравнений Бете). Применение квантового метода обратной задачи позволяет получить некоторую детерминантную формулу для этого скалярного произведения [21]. Наши усилия будут направлены изучение статистической суммы в однородном пределе, когда веса становятся независимыми от номера горизонтального ряда,  $a_j \rightarrow a, b_j \rightarrow b, c_j \rightarrow c, j = 1, \dots, 2N$ .

Будем рассматривать следующую параметризацию весов неоднородной модели. Рассмотрим три функции  $a(u), b(u), c(u)$ , явный вид которых указан ниже, и введем, для удобства, два набора параметров  $v_1, \dots, v_N$  и  $u_1, \dots, u_N$ . Будем считать, что веса  $j$ -го вертикального

ряда,  $a_j, b_j, c_j$ , являются соответствующими функциями параметра  $v_j$ , а  $(N + j)$ -го вертикального ряда,  $a_{N+j}, b_{N+j}, c_{N+j}$ , — функциями параметра  $u_j, j = 1, \dots, N$ . В компактном виде:

$$f_j = f(v_j), \quad f_{N+j} = f(u_j), \quad f \in \{a, b, c\}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

В работе [21] замечено, что если функции  $a(u), b(u), c(u)$  выбрать в виде

$$a(u) = u - u^{-1}, \quad b(u) = u, \quad c(u) = 1, \quad (3)$$

то тогда для статистической суммы справедливо представление

$$Z = \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{u_k u_j v_k v_j}{(u_j^2 - u_k^2)(v_k^2 - v_j^2)} \det Q, \quad (4)$$

где матрица  $Q$ , размерности  $N \times N$ , имеет матричные элементы

$$Q_{jk} = \frac{[v_j(u_k - u_k^{-1})]^M (u_k v_j^{-1})^{N-1} - [u_k(v_j - v_j^{-1})]^M (v_j u_k^{-1})^{N-1}}{u_k v_j^{-1} - v_j u_k^{-1}}. \quad (5)$$

Как указано в [16], представление (7) следует из результата доказанного в монографии [2], см. Гл. IX, формулу (6.27).

Для наших целей нам потребуется несколько модифицировать представленный выше результат. Нетрудно видеть, что параметризация (3) соответствует некоторому однородному соотношению между величинами  $a_j, b_j$  и  $c_j$ , а именно, для всех  $j$  выполняется соотношение  $b_j^2 = c_j^2 + a_j b_j$ . Это соотношение накладывает сильное ограничение на возможные значения весов, например, оно исключает выбор всех весов равными друг другу,  $a_j = b_j = c_j$ , что соответствует пересчету конфигураций.

Чтобы ослабить указанное ограничение, мы введем дополнительный параметр в параметризацию (3), который будет не зависеть от  $u$ ; иначе говоря, все веса  $a_j, b_j, c_j, j = 1, \dots, 2N$ , будут также рассматриваться как функции этого параметра. Для этого воспользуемся простым свойством конфигураций пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями, которое заключается в том, что все допустимые конфигурации содержат одинаковое число вершин первого типа, что легко видеть исследуя возможные конфигурации в терминах линий, см. Рис. 1 и 2. В нашем случае число таких вершин равно  $(M - N)N$ . Это свойство означает, что если выполнить замену  $a_j \mapsto a_j/\Delta, j = 1, \dots, 2N$ , то тогда статистическая сумма умножится на известный фактор, а именно,  $Z \mapsto \Delta^{-(M-N)N} Z$ .

Таким образом, имеет место следующее утверждение модифицирующее представленный выше результат. Если функции  $a(u)$ ,  $b(u)$ ,  $c(u)$  выбрать в виде

$$a(u) = \frac{u - u^{-1}}{\Delta}, \quad b(u) = u, \quad c(u) = 1, \quad (6)$$

то тогда статистическая сумма равна

$$Z = \frac{1}{\Delta^{(M-N)N}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{u_k u_j v_k v_j}{(u_j^2 - u_k^2)(v_k^2 - v_j^2)} \det Q, \quad (7)$$

где матрица  $Q$  дается формулой (5).

Сделанная нами модификация интересна тем, что позволяет рассмотреть предел  $\Delta \rightarrow 0$ . А именно, перейдем от параметров  $v_j$ ,  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , к параметрам  $\nu_j$ ,  $\mu_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , соответственно, по формулам

$$v_j = \exp(\Delta \nu_j / 2), \quad u_j = \exp(\Delta \mu_j / 2), \quad j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

и, полагая, что все параметры  $\nu_j$ ,  $\mu_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , не зависят от  $\Delta$ , перейдем пределу  $\Delta \rightarrow 0$  в формулах (5)–(7). В результате получим, что если веса  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N$ , такие что

$$f_j = f^{\Delta=0}(\nu_j), \quad f_{N+j} = f^{\Delta=0}(\mu_j), \quad f \in \{a, b, c\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (9)$$

где

$$f^{\Delta=0}(\mu) \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(\exp(\Delta \mu / 2)), \quad (10)$$

или, в явном виде,

$$a^{\Delta=0}(\mu) = \mu, \quad b^{\Delta=0}(\mu) = c^{\Delta=0}(\mu) = 1, \quad (11)$$

то тогда статистическая сумма такой модели  $Z^{\Delta=0} \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} Z$  дается формулой

$$Z^{\Delta=0} = \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{(\mu_j - \mu_k)(\nu_k - \nu_j)} \det Q^{\Delta=0}, \quad (12)$$

где  $N \times N$  матрица  $Q^{\Delta=0}$  имеет элементы

$$Q_{jk}^{\Delta=0} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Q_{jk}}{\Delta^{M-1}} = \frac{\mu_k^M - \nu_j^M}{\mu_k - \nu_j}. \quad (13)$$

Если далее рассмотреть предел  $\nu_1, \dots, \nu_N, \mu_1, \dots, \mu_N \rightarrow 1$ , то, как видно из (11), такая модель будет содержать все веса равными друг другу,  $a_j = b_j = c_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, 2N$ , а ее статистическая сумма (число

конфигураций) будет даваться значением соответствующего предела в (12).

Рассмотренный нами предел  $\Delta \rightarrow 0$  имеет простой смысл в терминах общей шестивершинной модели и есть не что иное, как предел к условию свободных фермионов<sup>1</sup>. Это непосредственно следует из формул (6), которые описывают параметризацию отношений трех весов  $a : b : c$  в терминах двух параметров  $u$  и  $\Delta$ , где второй параметр может быть определен в терминах исходных весов как соотношение

$$\Delta = \frac{b^2 - c^2}{ab}. \quad (14)$$

Таким образом, параметр  $\Delta$  имеет такой же смысл как и аналогичный параметр в шестивершинной модели (см., например, [22]). При  $\Delta = 0$  имеем  $b = c$ , и, поскольку вес второй вершины Рис. 1 равен нулю, то при произвольном значении веса  $a$  условие свободных фермионов удовлетворено.

Отметим, что, как следует из нашего обсуждения выше, предел свободных фермионов в пятивершинной модели соответствует переходу в тригонометрической параметризации весов к ее рациональному пределу. Это является естественным распространением аналогичной процедуры из шестивершинной модели и может быть реализовано с использованием объектов квантового метода обратной задачи. Например,  $R$ -матрица соответствующая пятивершинной модели с весами (6) содержит явно параметр  $\Delta$  (при  $\Delta = 1$  воспроизводится  $R$ -матрица работы [7]) и допускает описанный выше рациональный предел. Подробное обсуждение этих аспектов выходит за рамки нашего обсуждения и будет представлено отдельно.

### §3. ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ

Существует взаимно-однозначное соответствие между конфигурациями пятивершинной модели на  $M \times 2N$  решетке с фиксированными граничными условиями Рис. 2 и плоскими разбиениями в коробке размера  $N \times N \times (M - N)$ . Это соответствие, дополненное идентификацией весов модели с мерой на множестве плоских разбиений позволяет использовать представление (7) для перечислений плоских разбиений.

<sup>1</sup>Напомним, что условие свободных фермионов общей шестивершинной модели имеет вид  $w_1 w_2 + w_3 w_4 = w_5 w_6$ , где  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  есть вес  $i$ -ой вершины на Рис. 1.

Плоские разбиения удобно рассматривать как трехмерные диаграммы Юнга. Напомним (см., например, [23]), что плоские разбиения имеют естественное представление в виде таблиц

$$\begin{array}{cccc}
 \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \dots \\
 \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \dots \\
 \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & \lambda_{3,3} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array} \tag{15}$$

элементами которых являются целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям невозрастания вдоль столбцов и строк (т.е.  $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i',j'}$  для всех  $i \leq i'$  и  $j \leq j'$ , соответственно); условие, что они находятся в коробке означает, что размер таблиц и максимальное значение элементов таблиц ограничены размерами (т.е.  $\lambda_{i,j} = 0$  при  $i \geq a$  и  $j \geq b$ , и также  $\lambda_{i,j} \leq c$  при  $i \leq a$  и  $j \leq b$ ). Рассматривая элементы таблиц как значения высот, эти таблицы имеют естественную интерпретацию как трехмерный аналог диаграмм Юнга.

Взаимно-однозначное соответствие между конфигурациями пятивершинной модели и трехмерными диаграммами Юнга основано на локальном соответствии между вершинами модели и фрагментами изображения трехмерных диаграмм Юнга на плоскости, см. Рис. 3. При этом линии пятивершинной модели отождествляются с плоскими проекциями градиентных линий трехмерных диаграмм Юнга, например, в  $(xz)$ -плоскости. Указанная интерпретация позволяет отождествить диаграммы Юнга ограниченные размерами  $A \times B \times C$ , с пятивершинной моделью на  $(A + B) \times (A + C)$  решетке с  $B$  линиями, где  $A, B, C = 1, 2, \dots$ , вообще говоря, могут быть произвольны [24]. Обсуждавшейся выше пятивершинной модели на  $M \times 2N$  решетке соответствуют плоские разбиения в коробке с двумя сторонами равными друг другу,  $A = B = N$ , и  $C = M - N$ .

Обозначим множество все плоских разбиений в  $A \times B \times C$  коробке как  $\Omega_{A,B,C}$ . Перечисления плоских разбиений, в которых диаграмма  $\lambda$  входит с весом  $W(\lambda)$ , являются функционалом от  $W(\lambda)$ , и будут обозначаться как  $\mathcal{N}_{A,B,C}[W]$ . Перечисления есть сумма

$$\mathcal{N}_{A,B,C}[W] = \sum_{\lambda \in \Omega_{A,B,C}} W(\lambda). \tag{16}$$



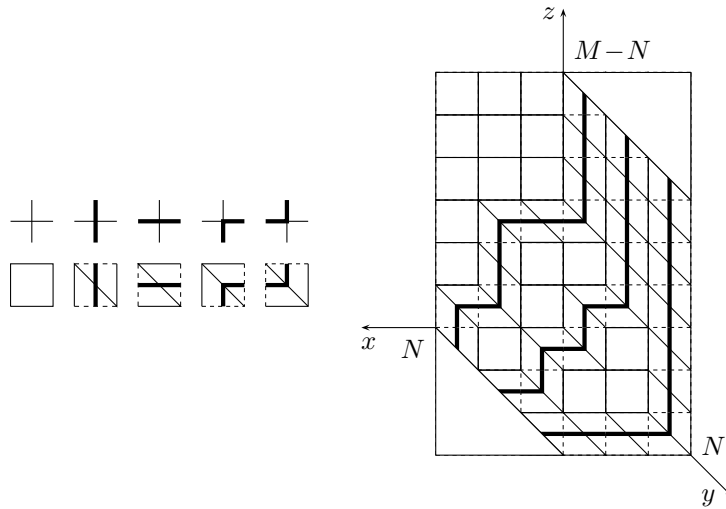


Рис. 3. Соответствие между вершинами пятивершинной модели и плоскими фрагментами изображения трехмерных диаграмм Юнга (слева) и конфигурация показанная на Рис. 2 как плоская проекция трехмерной диаграммы Юнга (справа).

Простейший пример перечислений — это собственно число плоских разбиений, когда весовая функция  $W(\lambda) \equiv 1$ . В этом случае перечисления связаны со статистической суммой пятивершинной модели, у которой все веса равны,  $a_j = b_j = c_j = 1$ . Рассматривая статистическую сумму модели при  $\Delta = 0$  как функцию параметров  $\nu_1, \dots, \nu_N$  и  $\mu_1, \dots, \mu_N$ , см. (11), и обозначая  $Z^{\Delta=0}(\mu) \equiv Z^{\Delta=0}(\mu, \dots, \mu; \mu, \dots, \mu)$ , имеем

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}[1] = Z^{\Delta=0}(1). \quad (17)$$

Рассмотрим теперь обобщение простых (однородных) перечислений на случай когда вес плоского разбиения  $\lambda$  зависит от его “объема”  $V(\lambda)$ , а именно

$$W(\lambda) = q^{V(\lambda)}, \quad V(\lambda) \equiv \sum_{i,j \geq 0} \lambda_{ij}, \quad q \in \mathbb{C}. \quad (18)$$

Такие перечисления также связаны с пятивершинной моделью [25]. Отождествление весов модели основано на наблюдении, что если два плоских разбиения  $\lambda$  и  $\lambda'$  таковы, что  $V(\lambda) - V(\lambda') = 1$ , то тогда плоская проекция (аналогичная показанной на Рис. 3) трехмерной диаграммы Юнга соответствующая  $\lambda$  отличается от таковой для  $\lambda'$  сдвигом одного из квадратов на одну позицию вправо и вниз. В результате, перечисления (18) оказываются эквивалентны статистической сумме пятивершинной модели с весами  $a_j = q^j$ ,  $b_j = c_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, 2N$ , что соответствуют случаю  $\Delta = 0$  и значению параметров  $\nu_j = q^j$ ,  $\mu_j = q^{N+j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Таким образом,

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}[q^V] = \frac{1}{q^{\frac{(M-N)N(N+1)}{2}}} Z^{\Delta=0}(q, \dots, q^N; q^{N+1}, \dots, q^{2N}), \quad (19)$$

где нормировочный множитель равен весу конфигурации, соответствующей диаграмме с нулевым объемом.

Интересно отметить, что при указанном выборе параметров определитель в формуле (12) может быть вычислен с помощью формулы Куперберга (см. [11], Лемма 10), которая может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ \frac{1 - z^{j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}} \right] &= q^{\frac{(2N-1)(N-1)N}{6}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (1 - q^{k-j})^2 \prod_{j, k=1}^N \frac{1 - q^{j-k} z}{1 - q^{j+k-1}}. \quad (20) \end{aligned}$$

Применяя (20) при  $z = q^M$ , для статистической суммы получим

$$Z^{\Delta=0}(q, \dots, q^N; q^{N+1}, \dots, q^{2N}) = q^{\frac{(M-N)N(N+1)}{2}} \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{j-k} z}{1 - q^{j+k-1}} \Big|_{z=q^M}, \quad (21)$$

и из (19) имеем

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}[q^V] = \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{j+M-k}}{1 - q^{j+k-1}}, \quad (22)$$

что есть не что иное как формула МакМагона для перечислений плоских разбиений в коробке,

$$\mathcal{N}_{A,B,C}[q^V] = \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B \prod_{l=1}^C \frac{1 - q^{j+k+l-1}}{1 - q^{j+k+l-2}} = \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B \frac{1 - q^{j+B-k+C}}{1 - q^{j+k-1}} \quad (23)$$

при  $A = B = N$  и  $C = M - N$ .

Рассмотрим теперь перечисления плоских разбиений которые соответствуют пятивершинной модели при  $\Delta \neq 0$ . Мы ограничимся здесь случаем когда веса не зависят от положения вершины (однородная модель).

Чтобы получить интерпретацию этой модели в терминах плоских разбиений, обратимся снова к Рис. 3. Напомним, что во всех конфигурациях число вершин первого типа (см. Рис. 1) фиксированно (равно  $N(M - N)$ ), а число вершин пятого типа равно числу вершин шестого типа. Рассматривая статистическую сумму как функцию параметров  $v_1, \dots, v_N$  и  $u_1, \dots, u_N$ , см. (6), и обозначая  $Z(u) \equiv Z(u, \dots, u; u, \dots, u)$ , получим, что статистическая сумма однородной модели имеет вид

$$Z(u) = \left( \frac{u - u^{-1}}{\Delta} \right)^{N(M-N)} u^{N(M+N-2)} P(u^{-2}), \quad (24)$$

где  $P(u^{-2})$  есть некоторый полином, степень которого равна разности между максимальным и минимальным числом пар вершин пятого и шестого типов,  $\deg P = N(N - 1)$ . Префактор в (24) равен весу конфигурации, которая соответствует трехмерной диаграмме Юнга с нулевым объемом. Как видно из Рис. 3, вершины пятого типа соответствуют скачкам вдоль градиентных линий; коэффициент члена  $k$ -ой степени в полиноме  $P(u^{-2})$  равен числу трехмерных диаграмм Юнга у которых  $k$  скачков вдоль вертикальных рядов. Более точно, рассмотрим функцию числа скачков вдоль вертикальных рядов:

$$J_V(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \theta(\lambda_{i,j} - \lambda_{i+1,j}), \quad (25)$$

где  $\theta(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , — функция Хевисайда,

$$\theta(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Используя функцию числа скачков естественно рассмотреть перечисления вида  $\mathcal{N}_{A,B,C}(x^{-J_V})$ . Полином  $P(u^{-2})$  в (24) описывает эти перечисления в случае когда  $A = B = N$ ,  $C = M - N$ , а именно, имеет

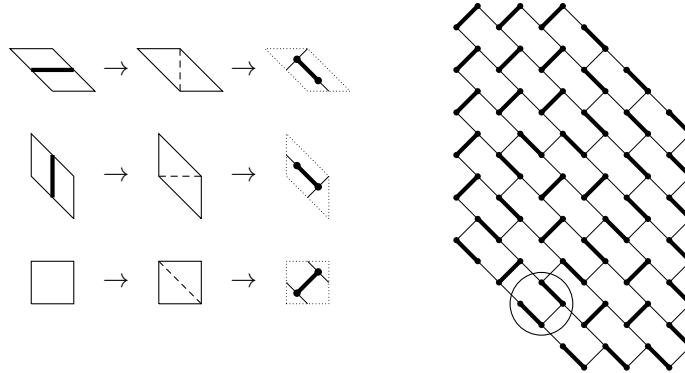


Рис. 4. Преобразование ромбов в димеры (слева) и конфигурация Рис. 3 в терминах димеров на решетке типа кирпичная кладка (справа). Кругом обведена пара взаимодействующих димеров.

место соотношение  $\mathcal{N}_{N,N,M-N}(x^{-J_V}) = P(x^{-1})$ . В терминах статистической суммы пятивершинной модели,

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}[x^{-J_V}] = \frac{\Delta^{N(M-N)}}{(x-1)^{N(M-N)} x^{N(N-1)}} Z(\sqrt{x}). \quad (27)$$

Полностью аналогично, можно рассмотреть функцию скачков вдоль горизонтальных рядов

$$J_H(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} \theta(\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j+1}), \quad (28)$$

и рассмотреть перечисления  $\mathcal{N}_{A,B,C}(x^{-J_H})$ . В рассматриваемой нами модели  $A = B = N$ , и поэтому, в силу очевидной симметрии,

$$\mathcal{N}_{N,N,M-N}(x^{-J_H}) = \mathcal{N}_{N,N,M-N}(x^{-J_V}). \quad (29)$$

Наконец, отметим одну интересную интерпретацию введенных нами перечислений связанных с числом скачков вдоль вертикальных рядов. Для этого воспользуемся хорошо известной интерпретацией трехмерных диаграмм Юнга как укладок ромбами шестиугольника (см., например, [26]). В используемой нами плоской проекции трехмерных диаграмм Юнга такими ромбами являются два типа ромбов с углами

$45^\circ$  и  $135^\circ$  и квадраты, см. Рис. 3. Далее, воспользуемся интерпретацией плоских укладок как задачу о димерах, где димеры указывают склеивание треугольников в ромбы; три типа ромбов соответствуют склеиванию вдоль одной из трех сторон треугольника, см. Рис. 4. При этом, задача о димерах формулируется для решетки типа кирпичная кладка. В терминах задачи о димерах, параметр  $u$  описывает взаимодействие димеров. А именно, каждый димер имеет “заряд”  $u^{-1}$  и димеры взаимодействуют если оказываются друг напротив друга на длинных сторонах одного “кирпича”; конфигурация с  $n$  парами димеров имеет вес  $x^{-n} = u^{-2n}$ . Статистическая сумма этих взаимодействующих димеров есть в точности перечисления  $\mathcal{N}_{N,N,M-N} [x^{-Jv}]$ , описываемые статистической суммой  $Z(\sqrt{x})$ , см. (27).

#### §4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА В ОДНОРОДНОМ ПРЕДЕЛЕ

Рассмотрим задачу вывода представления для статистической суммы в пределе, когда все параметры  $v_1, \dots, v_N, u_1, \dots, u_N$  стремятся к одному значению (однородный предел).

Чтобы найти выражение для указанного предела в представлении (7), мы воспользуемся двумя соотношениями. Первое соотношение заключается в том, что если функция  $F(x, y)$  дифференцируема по каждой переменной как минимум  $N - 1$  раз, то тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_1, \dots, x_N \rightarrow x \\ y_1, \dots, y_N \rightarrow y}} \left( \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{(x_k - x_j)(y_k - y_j)} \right) \det_{1 \leq j, k \leq N} F(x_k, y_j) \\ = \left[ \prod_{j=1}^N \frac{1}{(j-1)!} \right]^2 \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} F(x, y) \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Это соотношение доказывается путем разложения функции  $F(x, y)$  в ряд Тейлора и последовательном вычитании строк и столбцов определителя (см., например, [10]).

Второе соотношение описывает значение предела  $y \rightarrow x$  в выражении выше в случае, когда функция  $F(x, y)$  имеет некоторый специальный вид. А именно, если функция  $h(x)$  дифференцируема как

минимум  $2N - 1$  раз, то тогда

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right] \\ = \left[ \prod_{j=1}^N (j-1)! \right]^2 \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ \frac{1}{(j+k-1)!} \partial_x^{j+k-1} h(x) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Действительно, воспользуемся теоремой Коши и перепишем матричные элементы определителя в левой части (31) в виде

$$\begin{aligned} \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} \frac{h(x) - h(y)}{x - y} &= \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} \frac{1}{x - y} \oint \left( \frac{h(z)}{z - x} - \frac{h(z)}{z - y} \right) \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} \oint \frac{h(z)}{(z - x)(z - y)} \frac{dz}{2\pi i} \\ &= (j-1)!(k-1)! \oint \frac{h(z)}{(z - x)^j (z - y)^k} \frac{dz}{2\pi i}, \end{aligned} \quad (32)$$

где интеграл берется по некоторому простому замкнутому контуру охватывающему точки  $z = x$  и  $z = y$ . Полагая в последнем выражении  $y = x$  и вновь пользуясь теоремой Коши, в результате приходим к выражению в правой части (31).

Комбинируя (30) и (31) имеем следующее предельное соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_1, \dots, x_N, \\ y_1, \dots, y_N \rightarrow x}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{(x_k - x_j)(y_k - y_j)} \det_{1 \leq j, k \leq N} \frac{h(x_j) - h(y_k)}{x_j - y_k} \\ = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ \frac{1}{(j+k-1)!} \partial_x^{j+k-1} h(x) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Это соотношение решает задачу о переходе в выражении для статистической суммы (7) к однородному пределу.

Выбирая подходящим образом переменные  $x_1, \dots, x_N$  и  $y_1, \dots, y_N$ , например, полагая  $x_j = u_j^2$ ,  $y_j = v_j^2$ ,  $j = 1, \dots, N$ , для статистической суммы  $Z = Z(u) = Z(\sqrt{x})$  получим представление

$$Z = \frac{(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} x^{(M+1)N}}{\Delta^{N(M-N)}} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ \frac{1}{(j+k-1)!} \partial_x^{j+k-1} \frac{(x-1)^M}{x^{M-N+1}} \right]. \quad (34)$$

Таким образом, статистическая сумма в однородном пределе выражается через определитель ганкелевой матрицы.

Представление (34) может быть использовано для вывода эквивалентных представлений для статистической суммы. В первую очередь необходимо отметить, что с его помощью статистическая сумма может быть представлена как многократный контурный интеграл. Воспользуемся опять теоремой Коши и перепишем матричные элементы в виде интеграла,

$$\frac{1}{(j+k-1)!} \partial_x^{j+k-1} \frac{(x-1)^M}{x^{M-N+1}} = \oint \frac{(z-1)^M}{z^{M-N+1}(z-x)^{j+k}} \frac{dz}{2\pi i}, \quad (35)$$

где контуром интегрирования является любой простой положительно ориентированный контур вокруг точки  $z = x$ . Используя тождество

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left( \oint (z-x)^{2N-j-k} f(z; x) \frac{dz}{2\pi i} \right) \\ = \frac{1}{N!} \oint \cdots \oint \prod_{j=1}^N f(z_j; x) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)^2 \frac{d^N z}{(2\pi i)^N}, \end{aligned} \quad (36)$$

где функция  $f(z)$  может также зависеть каких-либо дополнительных параметров, для статистической суммы получим

$$\begin{aligned} Z = \frac{(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\Delta^{N(M-N)}} x^{(M+1)N} \oint \cdots \oint \prod_{j=1}^N \frac{(z_j-1)^M}{z_j^{M-N+1}(z_j-x)^{2N}} \\ \times \prod_{j < k} (z_j - z_k)^2 \frac{d^N z}{(2\pi i)^N}. \end{aligned} \quad (37)$$

Многократный интеграл в (37) интересен тем, что он очень похож на интеграл, обсуждавшийся в [28]. Это обстоятельство позволяет вывести еще одну формулу в терминах определителя ганкелевой матрицы.

Стартовым преобразованием является обратный переход к определителю (пока еще не являющимся ганкелевым) с помощью более общего, чем (36), тождества

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ \oint (z-x)^{N-j} (z-y)^{N-k} f(z; x, y) \frac{dz}{2\pi i} \right] \\ = \frac{1}{N!} \oint \cdots \oint \prod_{j=1}^N f(z_j; x, y) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)^2 \frac{d^N z}{(2\pi i)^N}. \end{aligned} \quad (38)$$

Выбирая функцию  $f(z; x, y)$  в виде

$$f(z; x, y) = \frac{(z - y)^M}{z^{M-N+1}(z - x)^{2N}}, \quad (39)$$

а именно так, чтобы правая часть в (37) воспроизводилась при  $y = 1$ , применение тождества выше дает

$$Z = \frac{1}{\Delta^{N(M-N)}} \prod_{j=1}^N \frac{N!}{(N+j-1)!} \prod_{k=1}^N \frac{(M+N-k)!}{(M+N-1)!} \times x^{(M+1)N} \det_{1 \leq j, k \leq N} [\partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} g(x, y)] \Big|_{y=1}, \quad (40)$$

где мы ввели функцию

$$g(x, y) \equiv \oint \frac{(z - y)^{M+N-1}}{z^{M-N+1}(z - x)^{N+1}} \frac{dz}{2\pi i}. \quad (41)$$

Дальнейшие преобразования используют свойства определителей и явный вид функции  $g(x, y)$ . Во-первых, заметим, что последовательно вычитая строки и столбцы нетрудно доказать тождество

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [\partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} g(x, y)] = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ \frac{1}{x^{j-1} y^{k-1}} (x \partial_x)^{j-1} (y \partial_y)^{k-1} g(x, y) \right]. \quad (42)$$

Полностью аналогично, для любых констант  $\alpha$  и  $\beta$ , можно доказать тождество

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x \partial_x)^{j-1} (y \partial_y)^{k-1} g(x, y)] \\ = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ x^\alpha y^\beta (x \partial_x)^{j-1} (y \partial_y)^{k-1} \frac{g(x, y)}{x^\alpha y^\beta} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Во-вторых, воспользуемся явным видом функции  $g(x, y)$ , из которого следует, что эта функция является однородной функцией своих аргументов, а именно, обладает свойством

$$g(x, y) = y^{N-2} g(x/y, 1). \quad (44)$$

Обозначая  $g(x) \equiv g(x, 1)$  и используя тот факт, что

$$(y \partial_y)^n g(x/y) = (-x \partial_x)^n g(x/y), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (45)$$



использование всех свойств в результате показывает, что исходный определитель выражается через определитель ганкелевой матрицы:

$$\begin{aligned} & \det_{1 \leq j, k \leq N} [\partial_x^{j-1} \partial_y^{k-1} g(x, y)] \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \frac{y^{N(N-2)}}{x^{\frac{N(N-1)}{2}} y^{\frac{N(N-1)}{2}}} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x \partial_x)^{j+k-2} g(x)]. \end{aligned} \quad (46)$$

В-третьих, получим явное выражение для функции  $g(x)$ . Из (41) следует, что

$$g(x) = \frac{1}{N!} \partial_x^N \frac{(x-1)^{M+N-1}}{x^{M-N+1}}. \quad (47)$$

Используя формулу (см., например, [29, §2.8, (17)])

$$\partial_x^n \frac{1}{(x-1)^a x^b} = \frac{(b)_n}{(x-1)^{a+n} x^b} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, -n-a-b+1 \\ -n-b+1 \end{matrix} \middle| x \right), \quad (48)$$

где  $(b)_n$  — символ Похгаммера, получим

$$g(x) = \binom{M}{N} \frac{(x-1)^{M-1}}{x^{M+1}} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -N, N-1 \\ -M \end{matrix} \middle| x \right). \quad (49)$$

Наконец, в-четвертых, заметим, что присутствующий здесь множитель  $1/x^{M+1}$  может быть вынесен из-под знака определителя в правой части (46), в силу тождества

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [(x \partial_x)^{j+k-2} g(x)] = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ x^\alpha (x \partial_x)^{j+k-2} \frac{g(x)}{x^\alpha} \right], \quad (50)$$

которое аналогично тождествам, использованным выше.

В итоге, приходим к следующему представлению для статистической суммы

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\Delta^{N(M-N)}} \binom{M}{N}^N \prod_{j=1}^N \frac{N!}{(N+j-1)!} \prod_{k=1}^N \frac{(M+N-k)!}{(M+N-1)!} \\ &\quad \times \frac{1}{x^{\frac{N(N-1)}{2}}} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x \partial_x)^{j+k-2} p(x)], \end{aligned} \quad (51)$$

где функция  $p(x)$  дается формулой

$$p(x) = (x-1)^{M-1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -N, N-1 \\ -M \end{matrix} \middle| x \right). \quad (52)$$

Полученное представление позволяет получить интересную интерпретацию статистической суммы. Сделаем в выражении для функции  $p(x)$  преобразование Эйлера гипергеометрической функции

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right) \quad (53)$$

и перейдем от переменной  $x$  к переменной  $t = x/(x-1)$ . Тогда элементы ганкелевой матрицы в (51) переписутся в виде

$$(x\partial_x)^{j+k-2}p(x) = \delta^{j+k-2}(t-1)^b {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| t\right), \quad \delta \equiv t(t-1)\partial_t, \quad (54)$$

где

$$a = -N, \quad b = M + N - 1, \quad c = -M. \quad (55)$$

Формула (54) показывает, что выражение (51) для статистической суммы является не чем иным, как  $\tau$ -функцией шестого уравнения Пенлеве, отвечающая классическим решениям [30] (см. также обсуждение в [31], где выводится связь представлений типа (51) с ансамблями случайных матриц).

Автор признателен Н. М. Боголюбову и А. В. Китаеву за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга*. — УМН **34** (1979), no. 5, 13–63.
2. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*. — Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
3. P. P. Kulish, *Quantum difference nonlinear Schroedinger equation*. — Lett. Math. Phys. **5** (1981), 191–197.
4. V. S. Gerdjikov, M. I. Ivanov, P. P. Kulish, *Expansions over the “squared” solutions and difference evolution equations*. — J. Math. Phys. **25** (1984), 25–34.
5. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, G. D. Pang, *Exact solution of a q-boson hopping model*. — Phys. Rev. B **47** (1993), 11945–11498.
6. Н. М. Боголюбов, П. П. Кулиш, *Точно-решаемые модели квантовой нелинейной оптики*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **398** (2012), 26–54.
7. N. M. Bogoliubov, T. Nasar, *On the spectrum of the non-Hermitian phase-difference model*. — Phys. Lett. A **234** (1997), 345–350.
8. V. E. Korepin, *Calculations of norms of Bethe wave functions*. — Commun. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
9. А. Г. Изергин, *Статсумма шестивершинной модели в конечном объеме*. — ДАН **297** (1987), 331–334.

10. A. G. Izergin, D. A. Coker, V. E. Korepin, *Determinant formula for the six-vertex model*. — J. Phys. A **25** (1992), 4315–4334.
11. G. Kuperberg, *Another proof of the alternating-sign matrix conjecture*. — Int. Res. Math. Notices **1996** (1996), 139–150.
12. D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
13. N. M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model*. — J. Phys. A **38** (2005), 9415–9430.
14. Н. М. Боголюбов, *Четырехвершинная модель и случайные укладки*. — Теор. мат. физ. **155** (2008), No. 1, 25–38.
15. N. M. Bogoliubov, S. Malyshev, *Correlation functions of XX0 Heisenberg chain, q-binomial determinants, and random walks*. — Nucl. Phys. B **879** (2014), 268–291.
16. Н. М. Боголюбов, *Скалярные произведения векторов состояний в полностью асимметричных точно решаемых моделях на кольце*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **398** (2012), 5–25.
17. F. Colomo, A. G. Pronko, *The arctic curve of the domain-wall six-vertex model*. — J. Stat. Phys. **138** (2010), 662–700.
18. F. Colomo, A. G. Pronko, *The limit shape of large alternating-sign matrices*. — SIAM J. Discrete Math. **24** (2010), 1558–1571.
19. F. Colomo, A. G. Pronko, *Third-order phase transition in random tilings*. — Phys. Rev. E **88** (2013), 042125.
20. F. Colomo, A. G. Pronko, *Thermodynamics of the six-vertex model in an L-shaped domain*. — Comm. Math. Phys., to be published, 2015.
21. Н. М. Боголюбов, *Пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями*. — Алгебра и анализ **21** (2009), No. 3, 58–78.
22. R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*. — Academic Press, San Diego, CA, 1982.
23. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*. — Addison-Wesley Publishing, 1976.
24. В. С. Капитонов, А. Г. Пронько, *Пятивершинная модель и плоские разбиения в ящике*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **360** (2008), 162–179.
25. В. С. Капитонов, А. Г. Пронько, *Взвешенные перечисления плоских разбиений в ящике и неоднородная пятивершинная модель*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **398** (2012), 125–144.
26. H. Cohn, M. Larsen, J. Propp, *The shape of a typical boxed plane partition*. — New York J. Math. **4** (1998), 137–165.
27. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. — 2nd edn., Oxford University Press, Oxford, 1995.
28. А. Г. Пронько, *О вероятности образования пустоты в свободнофермионной шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **398** (2012), 179–208.
29. A. Erdelyi, *Higher transcendental functions. Vol. 1*. — McGraw-Hill, New York, 1953.
30. К. Окамото, *Studies on the Painlevé equations. I. Sixth Painlevé Equation P<sub>VI</sub>*. — Ann. Mat. Pura Appl. **146** (1987), 337–381.

31. P. J. Forrester, N. S. Witte, *Application of the  $\tau$ -function theory of Painlevé equations to random matrices: PVI, the JUE, CyUE, cJUE and scaled limits.* — Nagoya Math. J. **174** (2004), 29–114.

Pronko A. G. The five-vertex model and enumerations of plane partitions.

We consider the five-vertex model on an  $N \times N$  lattice with fixed boundary conditions of a special type. We discuss a determinantal formula for the partition function in application to description of various enumerations of  $N \times N \times (M - N)$  boxed plane partitions. It is shown, that at the free-fermion point of the model, this formula reproduces MacMahon formula for the number of boxed plane partitions, while for generic weights (out of the free-fermion point) it describes enumerations with the weight depending on the cumulative number of jumps along vertical (or horizontal) rows. Various representations for the partition function, which describes such enumerations, are obtained.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В.А. Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки д. 27,  
191023, Санкт-Петербург  
*E-mail*: `agp@pdmi.ras.ru`

Поступило 16 апреля 2015 г.