Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 433, 2015 г.

С. Э. Деркачев, Д. И. Чичерин

МАТРИЧНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЯНГА–БАКСТЕРА

Петру Петровичу Кулишу
в честь семидесятилетия

§1. Введение

Каждому решению уравнения Янга–Бакстера

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)\,\mathbb{R}_{13}(u)\,\mathbb{R}_{23}(v) = \mathbb{R}_{23}(v)\,\mathbb{R}_{13}(u)\,\mathbb{R}_{12}(u-v) \tag{1}$$

соответствует квантовая интегрируемая система, поэтому классификация его решений представляет собой важную задачу математической физики. Линейный оператор $\mathbb{R}_{ij}(u)$ из (1), заданный на тензорном произведении двух линейных пространств и зависящий от спектрального параметра $u \in \mathbb{C}$, традиционно называется R-*матрицей*. Мы предпочитаем именовать его R-*оператором*, поскольку будем активно использовать бесконечномерные линейные пространства. Операторы в (1) заданы на тензорном произведении трех пространств, при этом каждый R-оператор действует нетривиально только в паре пространств, отмеченных его нижними индексами, и продолжается как единичный оператор на оставшееся пространство из тройки.

Хорошо известно, что решения уравнения Янга–Бакстера (1) могут иметь весьма сложный вид [22, 26]. Однако, следуя логике квантового метода обратной задачи [15,28], кажется естественным предположить, что они являются составными объектами и имеют внутреннюю структуру, т.е. построены из элементарных блоков. А именно, R-оператор допускает *факторизацию*, т.е. представим в виде произведения нескольких более элементарных операторов. Это наблюдение позволило найти общее решение уравнения Янга–Бакстера (1), заданное на тензорном произведении двух бесконечномерных представлений основной серии группы $\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$ [12]. Для ранга один удалось охватить случай

Ключевые слова: уравнение Янга–Бакстера, интегрируемые модели.
Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, проект N 14-11-00598.

тригонометрической и эллиптической деформаций, построив общий R-оператор для модулярного дубля Фаддеева [7] и для эллиптического модулярного дубля [13].

В настоящей работе нас будут интересовать конечномерные представления. Мы покажем, что R-оператор для алгебр ранга один, заданный на тензорном произведении *произвольного* конечномерного и бесконечномерного представлений, также имеет простой факторизованный вид. Такие решения уравнения Янга–Бакстера (1) служат обобщением квантового оператора Лакса, поскольку вместо фундаментального представления во вспомогательном пространстве $\mathbb{C}^2$ используются представления старшего спина в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Рассмотрим решения, инвариантные относительно алгебры Ли $s\ell_2$. В дальнейшем мы также рассмотрим ее тригонометрическую деформацию – модулярный дубль Фаддеева и, как следствие, $U_q(s\ell_2)$, а также эллиптическую деформацию – алгебру Склянина. Коммутационные соотношения для генераторов $s\ell_2$ имеют следующий вид

$$[\,\mathbf{S}^+, \mathbf{S}^-\,] = 2\mathbf{S}, \quad [\,\mathbf{S}\,, \mathbf{S}^\pm\,] = \pm\mathbf{S}^\pm\,. \tag{2}$$

Требование симметрии означает коммутативность R-оператора с копроизведением генераторов

$$[\,\mathbb{R}_{12}(u), \mathbf{S}_1^\pm + \mathbf{S}_2^\pm\,] = 0, \quad [\,\mathbb{R}_{12}(u), \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\,] = 0\,.$$

Линейные пространства, на которых заданы R-операторы, являются пространствами представления алгебры $s\ell_2$. Нас будут интересовать представления $s\ell_2$ на модулях Верма, реализованные в пространстве полиномов $\mathbb{C}[z]$, на которое действуют генераторы $s\ell_2$ – дифференциальные операторы первого порядка, зависящие от параметра $\ell \in \mathbb{C}$ – спина представления,

$$\mathbf{S} = z\partial - \ell\ , \ \mathbf{S}^- = \partial\ , \ \mathbf{S}^+ = -z^2\partial + 2\ell z\ . \tag{3}$$

Для спина ℓ в общем положении генераторы (3) действуют неприводимо на $\mathbb{C}[z]$, так что представление бесконечномерное. Для (полу)-целых значений спина $2\ell = n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ представление становится приводимым, и отщепляется $(n+1)$-мерное неприводимое представление с базисом $\{1, z, z^2, \cdots, z^n\}$. Базисные функции удобно собрать в одну производящую функцию $(z-x)^n$ со вспомогательным параметром x. Разложение по параметру x дает все базисные функции.

В работах [19, 27] была получена элегантная формула для $s\ell_2$-инвариантного решения уравнения Янга–Бакстера (1), заданного на тензорном произведении представлений произвольных спинов

$$\mathbb{R}_{12}(u|s,\ell) = \mathrm{P}_{12}\frac{\Gamma(u-J)}{\Gamma(u+J)}\,, \tag{4}$$

где J – "квадратный корень" из оператора Казимира: $J(J+1) \equiv (\vec{S}_1+\vec{S}_2)^2$; P_{12} – оператор перестановки тензорных сомножителей, $\mathrm{P}_{12}\Phi(z_1,z_2) = \Phi(z_2,z_1)$. Формула (4) справедлива как для конечномерных представлений, так и для бесконечномерных. Оператор J определен формально, и для него не существует явного представления, поэтому формула (4) подразумевает использование разложения тензорного произведение двух представлений на неприводимые, каждое из которых является собственным для J.

В работе [23] была найдена универсальная R-матрица для Янгианного дубля $s\ell_2$, из которой может быть получено альтернативное выражение для (4) в виде произведения трех рядов, составленных из степеней генераторов $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{\pm}$ (2).

Если перейти к функциональной реализации представлений (3), то можно получить явные формулы для решений уравнения Янга–Бакстера (1). А именно, $\mathbb{R}$-оператор, действующий на пространстве полиномов двух переменных $\mathbb{C}[z_1]\otimes\mathbb{C}[z_2]$, имеет следующий вид

$$\mathbb{R}_{12}(u|s,\ell) = \mathrm{P}_{12}\frac{\Gamma(z_{21}\partial_2-2s)}{\Gamma(z_{21}\partial_2-u-s-\ell)}\frac{\Gamma(z_{12}\partial_1+u-s-\ell)}{\Gamma(z_{12}\partial_1-2s)}\,, \tag{5}$$

где $z_{ij}\equiv z_i-z_j$. На пространствах $\mathbb{C}[z_1]$ и $\mathbb{C}[z_2]$ реализованы представления вида (3) с параметрами спина s и ℓ соответственно. Отношение гамма-функций от операторного аргумента можно переписать в виде явного интегрального оператора при помощи интегрального представления для бета-функции Эйлера

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(z_{12}\partial_1+a)}{\Gamma(z_{12}\partial_1+b)}\,\Phi(z_1,z_2)\\ &\qquad=\frac{1}{\Gamma(b-a)}\int_0^1 d\alpha\,\alpha^{a-1}(1-\alpha)^{(b-a-1)}\Phi(\alpha z_1+(1-\alpha)z_2,z_2)\,.\end{aligned}$$

Отметим, что (5) имеет факторизованный вид. Происхождение и смысл этой и других схожих факторизаций объяснен в [11]. Совпадение R-операторов (4) и (5) (с точностью до нормировочного множителя) в случае функциональной реализации алгебры $s\ell_2$ (3) может быть продемонстрировано явным образом [12].

Решение (5) уравнения Янга–Бакстера было построено в [10] для бесконечномерных представлений на модулях Верма и значений спина s, ℓ в общем положении. Случай (полу)-целых спинов потребовал отдельного исследования, связанного с изучением предельных переходов $s \to \frac{n}{2}$, из-за появляющихся расходимостей в (5). В работе [8] было показано, что при (полу)-целом спине $2s = n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ оператор (5) допускает ограничение на конечномерное инвариантное подпространство в первом тензорном сомножителе. Такой оператор задан на тензорном произведении $(n+1)$-мерного пространства представления спина $s = \frac{n}{2}$ и бесконечномерного пространства представления спина ℓ, т.е. является матрицей $(n+1) \times (n+1)$, чьи элементы – дифференциальные операторы, действующие на пространстве полиномов $\mathbb{C}[z]$. Кроме того, была получена явная производящая формула для матричных элементов такого решения уравнения Янга–Бакстера. А именно, действие R-оператора на производящую функцию $(z_1 - x)^n$ конечномерного представления в первом пространстве и на полином $\Phi(z)$ во втором пространстве[1] дается следующим выражением[2]

$$\mathbb{R}_{12}(u|\tfrac{n}{2}, \ell)\,(z_1 - x)^n\,\Phi(z) \tag{6}$$
$$= (z-x)^{-u+\frac{n}{2}+\ell}\,(z_1-z)^{u+\frac{n}{2}+\ell+1}\,\partial_z^n\,(z_1-z)^{-u+\frac{n}{2}-\ell-1}\,(z-x)^{u+\frac{n}{2}-\ell}\,\Phi(z)\,.$$

Раскладывая обе части равенства (6) по степеням вспомогательного параметра x, восстанавливаем матричные элементы оператора $\mathbb{R}_{12}(u|\frac{n}{2}, \ell)$. Если в (6) выбрать (полу)-целым второй спин $2\ell = m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, можно получить ограничение R-оператора на $(m+1)$-мерное представление во втором пространстве. Действуя оператором $\mathbb{R}_{12}(u|\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ на производящую функцию $\Phi(z) = (z-y)^m$, получаем производящую функцию для матричных элементов оператора $\mathbb{R}_{12}(u|\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ – матричного решения уравнения Янга–Бакстера (1) размера $(n+1)(m+1) \times (n+1)(m+1)$. Мы будем рассматривать ограничение R-оператора на конечномерное представление в одном пространстве, так что спин ℓ остается произвольным.

[1] Для упрощения обозначений здесь и далее мы пишем z вместо z_2.

[2] Нормировки в формулах (5) и (6) различны.

Формула (6) содержит в компактном виде все матричные элементы R-оператора. Для того, чтобы получить на основе этой формулы явный вид матрицы R-оператора и понять, насколько просто она устроена, разберем несколько примеров.

При ограничении на двумерное представление (спин $s = \frac{1}{2}$) формула (6) приводит к квантовому L-оператору [15]. Чтобы это увидеть, выберем следующий базис в $\mathbb{C}^2$: $\mathbf{e}_1 = z_1$, $\mathbf{e}_2 = 1$. В матричных обозначениях $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Приравнивая коэффициенты при различных степенях вспомогательного параметра x в выражении

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2},\ell)\,(z_1-x)\,\Phi(z)\\&\qquad=(z-x)^{-u+\ell+1}\,(z_1-z)^{u+\ell+1}\,\partial_z\,(z_1-z)^{-u-\ell}\,(z-x)^{u-\ell}\,\Phi(z)\,,\end{aligned}$$

находим действие R-оператора на элементы базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2},\ell)\,\mathbf{e}_1&=\mathbf{e}_1\,(z\partial-\ell+u)+\mathbf{e}_2\,(-z^2\partial+2\ell z)\,,\\\mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2},\ell)\,\mathbf{e}_2&=\mathbf{e}_1\,\partial+\mathbf{e}_2\,(u+\ell-z\partial)\,,\end{aligned}$$

где подразумевается, что обе части равенства применены к произвольному полиному $\Phi(z)$. Таким образом, матрица оператора $\mathbb{R}_{12}(u-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\ell)$ в выбранном базисе имеет вид

$$\mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2},\ell)=\begin{pmatrix}u-\ell+z\partial & \partial\\ -z^2\partial+2\ell z & u+\ell-z\partial\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u+\mathbf{S} & \mathbf{S}^-\\ \mathbf{S}^+ & u-\mathbf{S}\end{pmatrix} \qquad (7)$$

и совпадает с матрицей L-оператора. Сдвиг спектрального параметра сделан для упрощения формул. Легко проверить прямым вычислением, что L-оператор представим в виде произведения нескольких более простых треугольных матриц

$$\mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2},\ell)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \partial\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}, \qquad (8)$$

где собираются линейные комбинации спектрального параметра и спина

$$u_1 \equiv u-\ell-1, \quad u_2 \equiv u+\ell\,.$$

Факторизация (8) кажется весьма естественной, поскольку как исходный R-оператор (5), так и его ограничение (6) имеют факторизованный вид. Очевидным образом возникает вопрос, существует ли аналогичная (8) матричная факторизованная форма R-оператора для произвольного (полу)-целого спина $s = \frac{n}{2}$?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим следующий нетривиальный пример спина $s = 1$, т.е. трехмерное представление ($n = 2$).

Непосредственное применение формулы (6) приводит к следующей матрице оператора $\mathbb{R}_{12}(u-1|1,\ell)$ в базисе $\mathbf{e}_1 = z_1^2$, $\mathbf{e}_2 = z_1$, $\mathbf{e}_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} u^2+u(2\mathbf{S}-1)+\mathbf{S}(\mathbf{S}-1) & -u\mathbf{S}^- + \mathbf{S}\mathbf{S}^- & (\mathbf{S}^-)^2 \\ -2u\mathbf{S}^+ + 2\mathbf{S}^+\mathbf{S} & u^2-u-2\mathbf{S}^2+\ell(\ell+1) & -2u\mathbf{S}^- - 2\mathbf{S}^-\mathbf{S} \\ (\mathbf{S}^+)^2 & -u\mathbf{S}^+ - \mathbf{S}\mathbf{S}^+ & u^2-u(2\mathbf{S}+1)+\mathbf{S}(\mathbf{S}+1) \end{pmatrix},$$

записанной через генераторы алгебры в представлении (3). Легко убедиться, что она может быть разложена в произведение более простых треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2z & 1 & 0 \\ z^2 & -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2-1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2(u_2-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \partial & \partial^2 \\ 0 & 1 & 2\partial \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} u_1(u_1-1) & 0 & 0 \\ 0 & u_1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2z & 1 & 0 \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Рассмотрение более высоких спинов приводит к следующей общей формуле для матрицы оператора $\mathbb{R}(u-\frac{n}{2}|\frac{n}{2},\ell)$ в базисе $\mathbf{e}_1 = z_1^n, \mathbf{e}_2 = z_1^{n-1}, \ldots, \mathbf{e}_{n+1} = 1$

$$\mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{n}{2}|\tfrac{n}{2},\ell) = Z^{-1}\, U^+(u_2)\, D\, U^-(u_1)\, Z\,. \tag{10}$$

Несколько первых треугольных матриц Z и D (спин $s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$) имеют вид

$$Z_{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \quad Z_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2z & 1 & 0 \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}, \\ Z_{(\frac{3}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3z & 1 & 0 & 0 \\ 3z^2 & 2z & 1 & 0 \\ z^3 & z^2 & z & 1 \end{pmatrix}, \quad Z_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4z & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6z^2 & 3z & 1 & 0 & 0 \\ 4z^3 & 3z^2 & 2z & 1 & 0 \\ z^4 & z^3 & z^2 & z & 1 \end{pmatrix}, \cdots \tag{11}$$

$$D_{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & \partial \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \partial & \partial^2 \\ 0 & 1 & 2\partial \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_{(\frac{3}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & \partial & \partial^2 & \partial^3 \\ 0 & 1 & 2\partial & 3\partial^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3\partial \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \partial & \partial^2 & \partial^3 & \partial^4 \\ 0 & 1 & 2\partial & 3\partial^2 & 4\partial^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3\partial & 6\partial^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\partial \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots \tag{12}$$

так что легко угадывается общая закономерность. Для тех же значений спина диагональные матрицы $U^+(u)$ получаются следующими

$$\begin{aligned} U^+_{(\frac{1}{2})} &= \mathrm{diag}(1, u) \quad U^+_{(1)} = \mathrm{diag}(1, u-1, u(u-1)), \\ U^+_{(\frac{3}{2})} &= \mathrm{diag}(1, u-2, (u-1)(u-2), u(u-1)(u-2)), \\ U^+_{(2)} &= \mathrm{diag}(1, u-3, (u-2)(u-3), (u-1)(u-2)(u-3), \\ &\qquad u(u-1)(u-2)(u-3)), \cdots \end{aligned} \tag{13}$$

а для $U^-(u)$ собственные значения идут в обратном порядке

$$\begin{aligned} U^-_{(\frac{1}{2})} &= \mathrm{diag}(u, 1) \quad U^-_{(1)} = \mathrm{diag}(u(u-1), u-1, 1), \\ U^-_{(\frac{3}{2})} &= \mathrm{diag}(u(u-1)(u-2), (u-1)(u-2), u-2, 1), \\ U^-_{(2)} &= \mathrm{diag}(u(u-1)(u-2)(u-3), (u-1)(u-2)(u-3), \\ &\qquad (u-2)(u-3), u-3, 1) \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, разбор примеров приводит к ясной картине факторизации (10) R-оператора, ограниченного на конечномерное представление в первом пространстве. Формула факторизации (10) дает гораздо более явное описание конечномерных решений уравнения Янга–Бакстера по сравнению со всеми другими известными формами их записи. Формула факторизации (10) эквивалентна производящей формуле для матричных элементов (6) R-оператора и подтверждает ее эффективность при конкретных расчетах. Отметим, что получить формулу факторизации (10), исходя из классического результата (4), представляется весьма затруднительным.

Квантовый оператор Лакса (или L-оператор) является матрицей 2×2 (фундаментальное представление алгебры ранга один двумерно), причем матричные элементы линейны по генераторам алгебры симметрии. Во всех трех случаях: для алгебры Ли $s\ell_2$, а так же для ее тригонометрической и эллиптической деформаций – он допускает факторизованное представление [3,11,25]. Во многом благодаря этому удается решить соответствующие RLL-соотношения для бесконечномерного R-оператора, находя тем самым решение уравнения Янга–Бакстера (1). Цель настоящей работы – показать, что обобщения L-оператора также допускают факторизованное представление. В следующем параграфе мы докажем общую формулу факторизации (10). Помимо алгебры симметрии $s\ell_2$ в работе [8] была получена аналогичная (6) формула для ограничения общего R-оператора на конечномерное подпространство в одном из тензорных сомножителей для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ [12], а также для тригонометрически деформированной алгебры симметрии $s\ell_2$ – модулярного дубля Фаддеева [17]. В работе [9] было выполнено аналогичное ограничение общего R-оператора [13] для эллиптической деформации $s\ell_2$ – алгебры Склянина [36] и эллиптического модулярного дубля [38]. Поскольку конечномерные представления $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ имеют вид тензорного произведения пары представлений $s\ell_2$, то матричная факторизация R-операторов для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ не отличается существенно от формулы (10) и мы не будем на ней останавливаться. В параграфах 3, 4 представлено обобщение рассмотренных в настоящем параграфе формул на случай модулярного дубля Фаддеева и найден тригонометрический аналог формулы факторизации (10) – формула (35). В параграфе 5 указан эллиптический аналог (10) – формула факторизации (63).

§2. Рациональная факторизация

В этом параграфе мы докажем, что матричная формула факторизации (10) эквивалентна исходной формуле (6) для матричных элементов R-оператора. Доказательство состоит из двух этапов. На первом этапе мы перепишем матричную формулу (10) в операторном виде. На втором этапе применим получившийся оператор к функции $(z_1 - x)^n\,\Phi(z)$ и преобразуем результат к виду (6).

Рассмотрим для простоты пример спина $s = 1$ и попробуем переписать формулу факторизации (10) в операторном виде. Как было проверено ранее, матрица оператора $\mathbb{R}_{12}(u-1|1,\ell)$ факторизуется, т.е. строится из матриц $Z_{(1)}$, $D_{(1)}$, $U^{\pm}_{(1)}$ (см. (11), (12), (13), (14))

$$\mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{n}{2}|1,\ell) = Z^{-1}_{(1)}\,U^{+}_{(1)}(u_2)\,D_{(1)}\,U^{-}_{(1)}(u_1)\,Z_{(1)}\,. \tag{15}$$

Дадим теперь операторную интерпретацию каждого матричного сомножителя из предыдущей формулы. Матрицы $Z_{(1)}$ и $D_{(1)}$ допускают простое экспоненциальное представление

$$Z_{(1)} = \exp\left(z\mathbf{D}_{(1)}\right); \quad D_{(1)} = \mathbf{C}_{(1)} \exp\left(\partial\,\mathbf{D}_{(1)}\right) \mathbf{C}_{(1)}\,,$$

где числовые матрицы

$$\mathbf{D}_{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрицы $U^{+}_{(1)}$ и $U^{-}_{(1)}$ связаны сопряжением

$$U^{+}_{(1)}(u_2) = \mathbf{C}_{(1)}\, U^{-}_{(1)}(u_2)\, \mathbf{C}_{(1)}\,.$$

Подставляя предыдущие формулы в (15) и учитывая, что $\mathbf{C}_{(1)}\,\mathbf{C}_{(1)} = \mathbb{1}$, получаем следующее представление для матрицы (15)

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_{12}(u-1|1,\ell) \\ &= \exp\left(-z\,\mathbf{D}_{(1)}\right) \mathbf{C}_{(1)}\, U^{-}_{(1)}(u_2) \exp\left(\partial\,\mathbf{D}_{(1)}\right) \mathbf{C}_{(1)}\, U^{-}_{(1)}(u_1) \exp\left(z\,\mathbf{D}_{(1)}\right). \end{aligned}$$

Составные матричные блоки в этом выражении имеют ясную операторную интерпретацию в базисе $\mathbf{e}_1 = z_1^2$, $\mathbf{e}_2 = z_1$, $\mathbf{e}_3 = 1$:

- нижнетреугольная матрица $\mathbf{D}_{(1)}$ (16) является матрицей оператора дифференцирования ∂_{z_1} в используемом базисе,
- матрица $\mathbf{C}_{(1)}$ (16) является матрицей оператора инверсии $\widehat{\mathrm{C}}_1 \equiv \widehat{\mathrm{C}} \otimes \mathbb{1} : z_1^k \to z_1^{n-k}$ при $n = 2$ в используемом базисе,
- диагональная матрица $U^{-}_{(1)}(u)$ является матрицей оператора $\frac{\Gamma(z_1\partial_1+u+1-n)}{\Gamma(u+1-n)}$ при $n = 2$ в используемом базисе.

Пример спина $s = 1$ (т.е. $n = 2$) был подробно рассмотрен только из соображений наглядности, и все предыдущие формулы очевидным образом обобщаются на случай произвольного n. В итоге получаем операторную версию матричной формулы формулы факторизации (10) в базисе $\mathbf{e}_1 = z_1^n\,, \mathbf{e}_2 = z_1^{n-1}, \ldots, \mathbf{e}_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{n}{2}|\tfrac{n}{2},\ell) = \exp\left(-z\,\partial_1\right) \widehat{\mathrm{C}}_1\, \frac{\Gamma(z_1\partial_1+u_2+1-n)}{\Gamma(u_2+1-n)} \exp\left(\partial\,\partial_1\right) \\ \times\, \widehat{\mathrm{C}}_1\, \frac{\Gamma(z_1\partial_1+u_1+1-n)}{\Gamma(u_1+1-n)} \exp\left(z\,\partial_1\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Переходим ко второму этапу доказательства. Применим оператор (17) к полиному $(z_1 - x)^n\, \Phi(z)$ и убедимся, что результат совпадает с исходной формулой для матричных элементов R-оператора (6). Будем последовательно применять операторы, входящие в (17). Первый шаг – сдвиг $z_1 \to z_1 + z$

$$\begin{aligned}\exp\left(z\, \partial_1\right)\, (z_1 - x)^n\, \Phi(z) &= (z_1 + z - x)^n\, \Phi(z) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, z_1^k\, (z-x)^{n-k}\, \Phi(z)\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Второй шаг – действие оператора $\frac{\Gamma(z_1\partial_1 + u_2 + 1 - n)}{\Gamma(u_2+1-n)}$ на предыдущее выражение, что эффективно сводится к замене $z_1\partial_1 \to k$ при действии на z_1^k из (18) и дает

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, \frac{\Gamma(k + u_2 + 1 - n)}{\Gamma(u_2 + 1 - n)}\, z_1^k\, (z-x)^{n-k}\, \Phi(z)\,. \tag{19}$$

Третий шаг – действие операторов $\widehat{\mathrm{C}}_1$ и $\exp\left(\partial\, \partial_1\right)$ на z_1^k из (19)

$$\begin{aligned}\exp\left(\partial\, \partial_1\right)\, \widehat{\mathrm{C}}_1\, z_1^k &= \exp\left(\partial\, \partial_1\right)\, z_1^{n-k} = (z_1 + \partial)^{n-k} \\ &= \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{p!(n-k-p)!}\, z_1^{n-k-p}\, \partial^p\,,\end{aligned} \tag{20}$$

последний шаг – действие оператора $\exp\left(-z\, \partial_1\right)\, \widehat{\mathrm{C}}_1\, \frac{\Gamma(z_1\partial_1 + u_2 + 1 - n)}{\Gamma(u_2+1-n)}$ на z_1^{n-k-p} из (20)

$$\begin{aligned}&\exp\left(-z\, \partial_1\right)\, \widehat{\mathrm{C}}_1\, \frac{\Gamma(z_1\partial_1 + u_2 + 1 - n)}{\Gamma(u_2 + 1 - n)}\, z_1^{n-k-p} \\ &\qquad = (z_1 - z)^{k+p}\, \frac{\Gamma(u_2 + 1 - k - p)}{\Gamma(u_2 + 1 - n)}\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Собирая вместе (19), (20), (21), получаем окончательный результат

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}_{12}(u - \tfrac{n}{2}|\tfrac{n}{2}, \ell)\, (z_1 - x)^n\, \Phi(z) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(u_1 + 1 - n + k)}{\Gamma(u_1 + 1 - n)} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{p!(n-k-p)!} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(u_2 + 1 - k - p)}{\Gamma(u_2 + 1 - n)}\, (z_1 - z)^{k+p}\, \partial_z^p\, (z-x)^{n-k}\, \Phi(z)\,.\end{aligned} \tag{22}$$

Предыдущая формула дает операторную переформулировку матричной формулы (10) и описывает результат применения матрицы (10) с операторными элементами к $(n+1)$-мерному вектору $(z_1-x)^n$ и действие ее матричных элементов на произвольный полином $\Phi(z)$. Для завершения доказательства формулы факторизации (10) осталось проверить, что правая часть (22) совпадает с правой частью формулы (6) со сдвинутым спектральным параметром $u \to u - \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{12}(u-\tfrac{n}{2}|\tfrac{n}{2},\ell)\,(z_1-x)^n\,\Phi(z) = (z-x)^{-u_1-1+n}\,(z_1-z)^{u_2+1} \\ \times \partial_z^n\,(z_1-z)^{-u_2-1+n}\,(z-x)^{u_1+1}\,\Phi(z)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Основной трюк при доказательстве нужного тождества – использование формулы Коши для вычисления интеграла по вычетам

$$\partial_z^p\,F(z) = \frac{p!}{2\pi\mathrm{i}}\oint \frac{d\lambda}{(\lambda-z)^{p+1}}F(\lambda)\,, \tag{24}$$

где замкнутый контур интегрирования вокруг точки z не содержит особенностей аналитической функции $F(\lambda)$.

Рассмотрим правую часть (22) и преобразуем ее, сократив $(n-k)!$ и сделав замену индекса суммирования во второй сумме $p \to n-k-p$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\frac{\Gamma(u_1+1-n+k)}{\Gamma(u_1+1-n)}\sum_{p=0}^{n-k}\frac{1}{p!(n-k-p)!}\frac{\Gamma(u_2+1-n+p)}{\Gamma(u_2+1-n)} \\ \times (z_1-z)^{n-p}\,\underline{\partial_z^{n-k-p}\,(z-x)^{n-k}\,\Phi(z)}\,. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся интегральным представлением (24) для подчеркнутого множителя

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\frac{\Gamma(u_1+1-n+k)}{\Gamma(u_1+1-n)}\sum_{p=0}^{n-k}\frac{1}{p!(n-k-p)!}\frac{\Gamma(u_2+1-n+p)}{\Gamma(u_2+1-n)} \\ &\qquad \times (z_1-z)^{n-p}\,\frac{(n-k-p)!}{2\pi\mathrm{i}} \times \oint \frac{d\lambda\,(\lambda-x)^{n-k}}{(\lambda-z)^{n-k-p+1}}\,\Phi(\lambda) \\ &= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint \frac{d\lambda}{(\lambda-z)^{n+1}}(z_1-z)^n(\lambda-x)^n \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(u_1+1-n+k)}{k!\Gamma(u_1+1-n)}\,\left(\frac{\lambda-z}{\lambda-x}\right)^k \end{aligned} \tag{25}$$

$$\times \sum_{p=0}^{n-k} \frac{\Gamma(u_2+1-n+p)}{p!\Gamma(u_2+1-n)} \left(\frac{\lambda - z}{z_1 - z}\right)^p \Phi(\lambda)\,.$$

Оба суммирования в предыдущем выражении можно распространить до бесконечности, так как возникающие при этом слагаемые содержат $(\lambda - z)^m$, $m \geqslant n+1$ и, следовательно, не дают вклада в интеграл. Образовавшиеся ряды Тейлора относятся к биномиальному типу

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)} z^k\,,$$

что позволяет выполнить суммирование в (25) в замкнутом виде

$$\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint \frac{d\lambda}{(\lambda - z)^{n+1}} (z_1 - z)^n (\lambda - x)^n \\ \times \left(1 - \frac{\lambda - z}{\lambda - x}\right)^{n-u_1-1} \left(1 - \frac{\lambda - z}{z_1 - z}\right)^{n-u_2-1} \Phi(\lambda)\,.$$

После перегруппировки степеней в предыдущем выражении вычислим интеграл по вычетам согласно (24), что сразу приводит к желаемому ответу (23)

$$(z-x)^{-u_1-1+n}(z_1-z)^{u_2+1}\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint \frac{\mathrm{d}\lambda}{(\lambda-z)^{n+1}} (\lambda-x)^{u_1+1}(z_1-\lambda)^{n-u_2-1}\Phi(\lambda) \\ = (z-x)^{-u_1-1+n}(z_1-z)^{u_2+1}\,\partial_z^n\,(z_1-z)^{-u_2-1+n}(z-x)^{u_1+1}\,\Phi(z)\,.$$

Таким образом, тождество (23), а вместе с ним и матричная формула факторизации (10) для оператора $\mathbb{R}_{12}(u - \frac{n}{2}|\frac{n}{2}, \ell)$ доказаны.

§3. Модулярный дубль

В этом параграфе мы переходим к исследованию решений уравнения Янга–Бакстера (1) с симметрией модулярного дубля. Модулярный дубль квантовой группы $U_q(s\ell_2)$ был введен Л. Д. Фадеевым в [17]. Эта алгебра образована двумя наборами генераторов $\mathbf{E}\,, \mathbf{K}\,, \mathbf{F}$ и $\widetilde{\mathbf{E}}\,, \widetilde{\mathbf{F}}\,, \widetilde{\mathbf{K}}$. Стандартные коммутационные соотношения между $\mathbf{E}\,, \mathbf{K}\,, \mathbf{F}$, которые образуют квантовую алгебру $U_q(s\ell_2)$ с параметром деформации $q = e^{\mathrm{i}\pi\tau}$ (предполагаем, что $\tau \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$, т.е. q – не корень из единицы)

$$[\,\mathbf{E}\,, \mathbf{F}\,] = \frac{\mathbf{K}^2 - \mathbf{K}^{-2}}{q - q^{-1}} \quad \mathbf{K}\,\mathbf{E} = q\,\mathbf{E}\,\mathbf{K} \quad \mathbf{K}\,\mathbf{F} = q^{-1}\,\mathbf{F}\,\mathbf{K}\,, \tag{26}$$

дополнены аналогичными коммутационными соотношениями для $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{F}}$, $\widetilde{\mathbf{K}}$ с параметром деформации $\widetilde{q} = e^{\mathrm{i}\pi/\tau}$. Генераторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ коммутируют с $\widetilde{\mathbf{E}}$ и $\widetilde{\mathbf{F}}$. Генератор $\mathbf{K}$ антикоммутирует с $\widetilde{\mathbf{E}}$ и $\widetilde{\mathbf{F}}$; $\widetilde{\mathbf{K}}$ антикоммутирует с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$; $\mathbf{K}$ и $\widetilde{\mathbf{K}}$ коммутируют.

Благодаря наличию двух копий генераторов пространство представления модулярного дубля фиксируется однозначно. Представления модулярного дубля изучались в работах [5, 17, 18, 21, 31]. Воспользуемся следующей параметризацией $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$, где $\omega, \omega' \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\omega > 0$, $\operatorname{Im}\omega' > 0$, и наложено условие нормировки $\omega\omega' = -\frac{1}{4}$. Тогда

$$q = \exp\left(\mathrm{i}\pi\omega'/\omega\right), \quad \widetilde{q} = \exp\left(\mathrm{i}\pi\omega/\omega'\right),$$

так что перестановка $q \rightleftarrows \widetilde{q}$ эквивалентна $\omega \rightleftarrows \omega'$. Также нам потребуется обозначение $\omega'' = \omega + \omega'$.

Мы будем иметь дело с представлением π_s модулярного дубля, в котором генераторы $\mathbf{K}_s = \pi_s(\mathbf{K})\,, \mathbf{E}_s = \pi_s(\mathbf{E})\,, \mathbf{F}_s = \pi_s(\mathbf{F})$ реализованы конечно-разностными операторами, действующими на пространстве голоморфных функций, быстро убывающих вдоль контуров параллельных вещественной оси. Это представление параметризуется комплексным числом s, называемым *спином* представления, а генераторы имеют вид [5–7]

$$\mathbf{K}_s = e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2\omega}\widehat{p}} \qquad \begin{aligned} (q-q^{-1})\mathbf{E}_s &= e^{\frac{\mathrm{i}\pi x}{\omega}}\left[e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2\omega}(\widehat{p}-s-\omega'')} - e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2\omega}(\widehat{p}-s-\omega'')}\right], \\ (q-q^{-1})\mathbf{F}_s &= e^{-\frac{\mathrm{i}\pi x}{\omega}}\left[e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2\omega}(\widehat{p}+s+\omega'')} - e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2\omega}(\widehat{p}+s+\omega'')}\right], \end{aligned} \tag{27}$$

где $\widehat{p}$ обозначает оператор импульса в координатном представлении $\widehat{p} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\,\partial_x$. Выражения для генераторов $\widetilde{\mathbf{K}}_s\,, \widetilde{\mathbf{E}}_s\,, \widetilde{\mathbf{F}}_s$ получаются из предыдущих при помощи замены $\omega \rightleftarrows \omega'$.

В теории представлений модулярного дубля естественным образом возникает специальная функция – некомпактный квантовый дилогарифм. В контексте квантовых интегрируемых систем он был найден в [16]. Его свойства исследованы в работах [18, 43]. Нам в основном потребуется не сам квантовый дилогарифм, а другая тесно связанная с ним специальная функция, заданная интегральным представлением

$$D_a(z) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t}\,\frac{\sin(at)\cos(zt)}{\sin(\omega t)\sin(\omega' t)}\right), \tag{28}$$

где контур интегрирования обходит сверху полюс при $t = 0$. Через эту функцию выражается R-матрица модели Фаддеева-Волкова [2,20]. Множество тождеств с этой функцией можно найти в [6]. Она естественным образом возникает как сплетающий оператор эквивалентных представлений модулярного дубля.

Далее укажем только те базовые свойства $D_a(z)$, которые нам потребуются. Функция $D_a(z)$ четна

$$D_a(z) = D_a(-z); \quad D_a(z)D_{-a}(z) = 1; \quad D_0(z) = 1\,. \tag{29}$$

Из (28) очевидно, что она инвариантна при перестановке $\omega \rightleftarrows \omega'$. Она удовлетворяет паре конечно-разностных уравнений первого порядка

$$\frac{D_a(z-\omega')}{D_a(z+\omega')} = \frac{\cos\frac{\pi}{2\omega}(z-a)}{\cos\frac{\pi}{2\omega}(z+a)}; \quad \frac{D_a(z-\omega)}{D_a(z+\omega)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2\omega'}(z-a)}{\cos\frac{\pi}{2\omega'}(z+a)}\,, \tag{30}$$

так что 2ω и $2\omega'$ имеют смысл ее квази-периодов.

Для спина s в общем положении представление π_s неприводимо и бесконечномерно. Отметим, что оно не является модулем Верма, поскольку не существует вектора младшего веса $\Omega(x)$ из пространства представления: $\mathbf{F}_s\,\Omega(x) = 0$, $\widetilde{\mathbf{F}}_s\,\Omega(x) = 0$, $\mathbf{K}_s\,\Omega(x) = \lambda\,\Omega(x)$, $\widetilde{\mathbf{K}}_s\,\Omega(x) = \widetilde{\lambda}\,\Omega(x)$. Представление π_s является деформированным аналогом основной серии представлений группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Ситуация меняется коренным образом для значений спина $s = s_{n,m} \equiv -\omega''-n\omega-m\omega'$, где $n, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, которые образуют решетку на комплексной плоскости (или линию, при вещественном ω/ω'). В этом случае представление π_s становится приводимым, и от него отщепляется $(n+1)(m+1)$-мерное неприводимое представление. Поскольку нам потребуются конечномерные представления, остановимся подробнее на их описании. Базис $(n+1)(m+1)$-мерного представления образован мономами

$$\widetilde{X}^{n-2k}X^{m-2l} \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \cdots, n\,, \quad l = 0, 1, \cdots, m\,,$$

по переменным

$$X \equiv X(x) = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2\omega}x} \quad \widetilde{X} \equiv \widetilde{X}(x) = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2\omega'}x}\,. \tag{31}$$

Таким образом конечномерное представление модулярного дубля сводится к тензорному произведению конечномерных представлений $U_q(s\ell_2)$ и $U_{\widetilde{q}}(s\ell_2)$. Для наших целей будет достаточно конечномерных представлений спина $s = s_m \equiv -\omega'' - m\omega'$, $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, что эффективно сводится к использованию лишь одной половины модулярного дубля. Используя D-функцию (28), базисные векторы X^{m-2l},

$l = 0, 1, \cdots, m$, можно собрать вместе и упаковать в один объект. В самом деле $D_{m\omega'}(x-y)$ служит производящей функцией $(m+1)$-мерного представления и сводится к конечному произведению при помощи рекуррентных формул типа (30)

$$D_{m\omega'}(x-y) = \prod_{l=0}^{m-1} \left(Y^{-1} X\, q^{\frac{m-1}{2}-l} + Y X^{-1}\, q^{-\frac{m-1}{2}+l} \right), \qquad Y \equiv Y(y) = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2\omega} y}, \tag{32}$$

где y является вспомогательным параметром.

§4. Тригонометрическая факторизация

Обратимся теперь к решениям уравнения Янга–Бакстера (1), инвариантным относительно модулярного дубля. Последнее означает, что R-оператор коммутирует с ко-произведением всех шести генераторов. Отметим, что симметрийные ограничения, налагаемые лишь одной $U_q(s\ell_2)$, недостаточны, чтобы однозначно (с точностью до числовой нормировки) фиксировать R-оператор. Впервые R-оператор, определенный на тензорном произведении двух бесконечномерных представлений $\pi_{s_{(1)}} \otimes \pi_{s_{(2)}}$ был построен в [6] в форме схожей с (4), только роль бета-функции Эйлера играет D-функция (28). Относительно такой реализации R-оператора справедливы все те замечания, что и для (4). В [7] была найдена более явная форма этого R-оператора, благодаря использованию реализации генераторов (27). Было показано, что R-оператор представим в виде произведения четырех R-матриц модели Фаддеева-Волкова [20] и является интегральным оператором. В работах [29,30] была найдена в замкнутом виде R-матрица для $U_q(s\ell_2)$, заданная на тензорном произведении двух произвольных представлений старшего веса. В работе [24] при помощи универсальной R-матрицы выведена универсальная формула факторизации для R-оператора.

В [8], основываясь на выражении для интегрального R-оператора, действующего в тензорном произведении двух бесконечномерных представлений $\pi_{s_{n,m}} \otimes \pi_s$, было найдено его ограничение на конечномерное представление в первом тензорном сомножителе при $s_{n,m} \equiv -\omega'' - n\omega - m\omega'$, n, $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Отметим, что в работе [31] аналогичное ограничение было получено для 6j-символов.

Как было пояснено в предыдущем параграфе, мы будем иметь дело с представлениями спина $s_m \equiv -m\omega' - \omega''$. В этом случае действие R-оператора на производящую функцию конечномерного представления (32) дается формулой[3]

$$\mathbb{R}_{12}(u|s_m, s) \cdot D_{m\omega'}(x_{13})\,\Phi(x_2) = D_{u_2}(x_{12})\times \\ \cdot\, D_{-u_1+m\omega'}(x_{23}) \cdot D_{m\omega'}(\widehat{p}_2) \cdot D_{-u_2+m\omega'}(x_{12})\,D_{u_1}(x_{23})\,\Phi(x_2)\,. \tag{33}$$

где x_3 – вспомогательный параметр производящей функции. Напомним, что мы используем сокращенные обозначения $x_{ij} \equiv x_i - x_j$. Вместо спектрального параметра u и спина s использована другая пара параметров

$$u_1 = u + \frac{s}{2}; \quad u_2 = u - \frac{s}{2}\,,$$

выбор которых диктуется простотой формулы. $D_{m\omega'}(\widehat{p}_2)$ из (33) является конечно-разностным оператором, который факторизуется в произведение m конечно-разностных операторов первого порядка в виду свойства (32) D-функции.

Производящая формула (33) однозначно задает решение уравнения Янга–Бакстера, которое является матрицей размера $(m+1)\times(m+1)$ с операторными элементами. Согласно (33) они являются конечно-разностными операторами порядка m. С ее помощью найдем более явный вид ограниченного R-оператора. А именно, в базисе

$$\mathbf{e}_j = X_1^{m+2-2j}, \quad j = 1, \ldots, m+1\,, \tag{34}$$

где $X_1 = X_1(x_1)$ (31), имеет место формула факторизации

$$\mathbb{R}_{12}(u|s_m, s) = Z\,M(u_2)\,D\,M(u_1)\,Z^{-1}\,. \tag{35}$$

Она является тригонометрическим аналогом рациональной факторизации (10). Здесь матрицы Z и D диагональны

$$(Z)_{kj} = \delta_{kj}\,X_2^{2k-m-2}; \quad (D)_{kj} = \delta_{kj}\,q^{(m-1)(m+2-2k)}\,e^{(m+2-2k)\omega'\partial_2}\,, \tag{36}$$

причем вся зависимость от координаты x_2 сосредоточена в матрице Z, а от импульса $\widehat{p}_2$ – в матрице D. Числовая матрица $M(u)$ имеет

[3]По сравнению с [8] здесь выполнен сдвиг спектрального параметра u.

следующий явный вид

$$
\begin{aligned}
&(M(u))_{kj} \\
&= \sum_p \frac{(q^2;q^2)_{j-1}(q^2;q^2)_{m-j+1}\, q^{(k-p-1)^2+p(p+2-2j)+(j-1)m-\frac{m^2}{2}}}{(q^2;q^2)_p(q^2;q^2)_{j-1-p}(q^2;q^2)_{k-p-1}(q^2;q^2)_{m+2-j-k+p}} \\
&\qquad\qquad \times U^{2(2p-j-k+2)+m}\,,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

где суммирование по p от $\max(0, k+j-2-m)$ до $\min(k-1, j-1)$. q-символ Похгаммера $(q^2;q^2)_k \equiv (1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})$; $U \equiv U(u) = e^{\frac{i\pi u}{2\omega}}$.

Проиллюстрируем формулу (37), указав несколько первых матриц $M(u)$, $m = 1, 2, 3$. Для упрощения формул воспользуемся обозначением $M^{(m)} = M^{(m)}(u+m)$,

$$
M^{(1)} = \begin{pmatrix} U & U^{-1} \\ U^{-1} & U \end{pmatrix}\,, \quad M^{(2)} = \begin{pmatrix} U^2 & 1 & U^{-2} \\ q+q^{-1} & qU^2+q^{-1}U^{-2} & q+q^{-1} \\ U^{-2} & 1 & U^2 \end{pmatrix}\,,
$$

$$
M^{(3)} = \begin{pmatrix} U^3 & U & U^{-1} & U^{-3} \\ (q^2+1+q^{-2})U & q^2U^3+(1+q^{-2})U^{-1} & q^{-2}U^{-3}+(1+q^2)U & (q^2+1+q^{-2})U^{-1} \\ (q^2+1+q^{-2})U^{-1} & q^{-2}U^{-3}+(1+q^2)U & q^2U^3+(1+q^{-2})U^{-1} & (q^2+1+q^{-2})U \\ U^{-3} & U^{-1} & U & U^3 \end{pmatrix}.
$$

В случае $m = 1$ R-оператор ограничивается на двумерное фундаментальное представление, что соответствует квантовому тригонометрическому оператору Лакса [6]. Факторизация L-оператора XXZ-цепочки была впервые обнаружена в контексте киральных моделей Поттса в [4].

Перейдем к доказательству (35). Для этого явно представим конечно-разностный оператор $D_{m\omega'}(\widehat{p}_2)$ из (33) в виде суммы операторов сдвига

$$
D_{m\omega'}(\widehat{p}_2) = \sum_{j=1}^{m+1} d_j\, e^{(m+2-2j)\omega'\partial_2}
\tag{38}
$$

с числовыми коэффициентами d_j, явное выражение для которых будет указано в дальнейшем (см. (47)). Далее переупорядочим факторы в (33), собрав слева от операторов сдвига все функции, зависящие от

u_2, а справа – функции, зависящие от u_1,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}_{12}(u|s_m,s)\cdot D_{m\omega'}(x_{13})\,\Phi(x_2)\\
&=\sum_{j=1}^{m+1} d_j\,D_{u_2}(x_{12})\,D_{-u_2+m\omega'}(x_{12}+(2j-m-2)\omega') \qquad (39)\\
&\times e^{(m+2-2j)\omega'\partial_2}\,D_{u_1}(x_{23})\,D_{-u_1+m\omega'}(x_{23}+(2j-m-2)\omega')\,\Phi(x_2)\,.
\end{aligned}$$

В результате вся зависимость от координат в (39) собралась в паре функций вида $D_u(x)D_{-u+m\omega'}(x+(2j-m-2)\omega')$, где $j=1,\dots,m+1$. При помощи рекуррентных соотношений типа (30) можно убедиться, что эта функция является на самом деле конечным произведением

$$\begin{aligned}
&D_u(x)D_{-u+m\omega'}(x+(2j-m-2)\omega')\\
&=U^{m+2-2j}\,q^{j-\frac{m}{2}-1}\,X^m\prod_{k=0}^{m-j}\left(1+q\,X^{-1}\,U^{-1}\,q^{2k}\right) \qquad (40)\\
&\times\prod_{k=0}^{j-2}\left(1+q^{3-2j}\,X^{-1}\,U\,q^{2k}\right)\,.
\end{aligned}$$

Перепишем правую часть (40) в виде суммы, в которой участвуют числовые коэффициенты $d_{jk}(u)$, явное выражение для которых пока что нам не потребуется (см. (48)),

$$D_u(x)D_{-u+m\omega'}(x+(2j-m-2)\omega')=\sum_{k=1}^{m+1}d_{jk}(u)\,X^{m+2-2k}\,. \qquad (41)$$

Вычислим теперь матрицу оператора $\mathbb{R}_{12}(u|s_m,s)$ в базисе (34). Для этого подставим в (39) по обе стороны от оператора сдвига разложения (41) и разложим обе части (39) по независимым степеням вспомогательного параметра $X_3=X_3(x_3)$ (31). Производящая функция $D_{m\omega'}(x_{13})$ разлагается по базису (34) и степеням X_3 согласно (32). В результате (39) сводится к

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}_{12}(u|s_m,s)\cdot d_k\mathbf{e}_k\,\Phi(x_2) \qquad (42)\\
&=\sum_{i=1}^{m+1}\mathbf{e}_i\left(\sum_{j=1}^{m+1}d_{ji}(u_2)\,X_2^{2i-m-2}d_j e^{(m+2-2j)\omega'\partial_2}d_{jk}(u_1)X_2^{m+2-2k}\right)\Phi(x_2).
\end{aligned}$$

Матричные элементы оператора $\mathbb{R}$ определяются как коэффициенты разложения вектора $\mathbb{R}\,\mathbf{e}_k$ по базису (34): $\mathbb{R}\,\mathbf{e}_k=\sum_{i=1}^{m+1}\mathbf{e}_i\,(\mathbb{R})_{ik}$, так что

(42) позволяет мгновенно извлечь матричные элементы $\mathbb{R}_{12}(u|s_m, s)$,

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}_{12}(u|s_m, s))_{ik} = \left(X_2^{-(m+2-2i)}\, d_{pi}(u_2)\, d_p\right) \\ \times \left(\delta_{pj} e^{(m+2-2j)\omega' \partial_2}\right) \left(\frac{d_{jk}(u_1)}{d_k}\, X_2^{m+2-2k}\right).\end{aligned} \tag{43}$$

В предыдущей формуле по повторяющимся значкам p, j подразумевается суммирование. Кроме того, мы записали матричные элементы в операторном виде, опустив произвольную функцию $\Phi(x_2)$. Таким образом, (43) имеет факторизованный вид, а именно это произведение трех матриц: в середине стоит диагональная матрица из операторов сдвига, а слева и справа – матрицы, построенные из $d_{jk}(u)$, d_k и $X_2^{\pm(m+2-2k)}$. Из них можно выделить диагональные матрицы, содержащие только степени X_2, так что в итоге получаем следующую формулу факторизации

$$\mathbb{R}_{12}(u|s_m, s) = Z\, M_2(u_2)\, \overline{D}\, M_1(u_1)\, Z^{-1}\,. \tag{44}$$

Диагональная матрица Z определена в (36). Диагональная матрица $\overline{D}$ слегка отличается от матрицы D из (36),

$$(\overline{D})_{ik} = \delta_{ik}\, e^{(m+2-2k)\omega' \partial_2}\,.$$

Числовые матрицы $M_1(u)$, $M_2(u)$ строятся из коэффициентов $d_{jk}(u)$, d_k,

$$(M_1(u))_{ik} = \frac{d_{ik}(u)}{d_k}; \quad (M_2(u))_{ik} = d_k\, d_{ki}(u)\,. \tag{45}$$

Формула факторизации (44) несколько отличается от (35). Для того, чтобы привести (44) к виду (35), вычислим коэффициенты $d_{jk}(u)$, d_k, определенные разложениями (38) и (41). Это легко сделать при помощи q-биномиального разложения

$$(-x; q^2)_m \equiv \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 + x\, q^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(q^2;q^2)_m\, q^{k(k-1)}}{(q^2;q^2)_k (q^2;q^2)_{m-k}}\, x^k\,. \tag{46}$$

В самом деле, функция $D_{m\omega'}$, определяющая коэффициенты d_j (38), есть произведение (32) вида (46), так что

$$d_k = \frac{(q^2;q^2)_m\, q^{(k-1)(k-m-1)}}{(q^2;q^2)_{k-1} (q^2;q^2)_{m-k+1}}\,. \tag{47}$$

В свою очередь коэффициенты $d_{jk}(u)$ (см. (41)) находятся из произведения двух q-биномиальных разложений (40). Мы опускаем промежуточные выкладки и приводим только окончательный результат

$$d_{jk}(u) = \sum_p \frac{(q^2;q^2)_{j-1}(q^2;q^2)_{m-j+1}\, q^{(k-p-1)^2+p(p+2-2j)+j-\frac{m}{2}-1}}{(q^2;q^2)_p(q^2;q^2)_{j-1-p}(q^2;q^2)_{k-p-1}(q^2;q^2)_{m-j+2-k+p}} \times U^{2(2p-j-k+2)+m}, \tag{48}$$

где пределы суммирования по p те же, что в (37). Рассмотрим

$$\overline{d}_{jk}(u) \equiv d_j\, d_{jk}(u)\, q^{j(m-1)+1-\frac{m(m+1)}{2}}\,.$$

Подставляя явные выражения для коэффициентов (47), (48) в определение $\overline{d}_{jk}(u)$, незамедлительно убеждаемся, что индексы j,k входят в него симметричным образом: $\overline{d}_{jk}(u) = \overline{d}_{kj}(u)$. Используя это наблюдение, в формуле факторизации (44) можно перекинуть диагональную матрицу $\delta_{ik}\, d_k$ из $M_2(u)$ в $M_1(u)$ (45) и сократить ее. В результате вместо пары различных числовых матриц $M_1(u)$ и $M_2(u)$ в формулу факторизации (35) входит пара одинаковых матриц $(M(u))_{kj} = d_{jk}(u)\, q^{j(m-1)+1-\frac{m(m+1)}{2}}$ (см. (37)). Итак, формула факторизации (35) доказана. Было бы чрезвычайно интересно установить связь формулы факторизации (35) с явными выражениями для R-матрицы в [29, 30], универсальной формулой факторизации [24] и 6j-символами [31].

§5. Алгебра Склянина и эллиптическая факторизация

В этом параграфе найдем факторизованную форму для решений уравнения Янга–Бакстера (1) с симметрией, заданной алгеброй Склянина [36]. Она является двухпараметрической деформацией алгебры Ли $s\ell_2$ или одно-параметрической деформацией $U_q(s\ell_2)$. Она является динамической алгеброй симметрии 8-вершинной модели [1]. Четыре генератора $\mathbf{S}^0$, $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}^3$ этой алгебры подчинены набору коммутационных соотношений

$$\begin{gathered} \mathbf{S}^\alpha\, \mathbf{S}^\beta - \mathbf{S}^\beta\, \mathbf{S}^\alpha = \mathrm{i}\cdot \left(\mathbf{S}^0\, \mathbf{S}^\gamma + \mathbf{S}^\gamma\, \mathbf{S}^0\right)\,, \\ \mathbf{S}^0\, \mathbf{S}^\alpha - \mathbf{S}^\alpha\, \mathbf{S}^0 = \mathrm{i}\, \mathbf{J}_{\beta\gamma}\cdot \left(\mathbf{S}^\beta\, \mathbf{S}^\gamma + \mathbf{S}^\gamma\, \mathbf{S}^\beta\right)\,, \end{gathered} \tag{49}$$

где тройка (α,β,γ) пробегает все циклические перестановки $(1,2,3)$. Структурные константы алгебры $\mathbf{J}_{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{J}_\beta - \mathbf{J}_\alpha}{\mathbf{J}_\gamma}$, $\gamma \neq \alpha,\beta$, выражаются через тэта-функции Якоби (предполагаем $\eta \in \mathbb{C}$ и $\theta_a(\eta) \neq 0$, $a =$

$1, \dots, 4)$

$$\mathbf{J}_1 = \theta_2(2\eta)\theta_2(0)\theta_2^{-2}(\eta); \quad \mathbf{J}_2 = \theta_3(2\eta)\theta_3(0)\theta_3^{-2}(\eta); \quad \mathbf{J}_3 = \theta_4(2\eta)\theta_4(0)\theta_4^{-2}(\eta)\,. \tag{50}$$

Будем использовать сокращенные обозначения $\theta_a(z|\tau) \equiv \theta_a(z)$, $a = 1, \cdots, 4$, для тэта-функций с модулярным параметром $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$,

$$\theta_1(z|\tau) \equiv \theta_1(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau} \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Остальные тэта-функции получаются при сдвигах на полупериоды внутри основной ячейки

$$\theta_2(z|\tau) = \theta_1(z+\tfrac{1}{2}|\tau)\,, \quad \theta_3(z|\tau) = e^{\frac{\pi\mathrm{i}\tau}{4}+\pi\mathrm{i}z}\theta_2(z+\tfrac{\tau}{2}|\tau)\,,$$
$$\theta_4(z|\tau) = \theta_3(z+\tfrac{1}{2}|\tau)\,.$$

Помимо тэта-функций $\theta_a(z)$ с модулярным параметром τ нам потребуются также тэта-функции с модулярным параметром $\frac{\tau}{2}$, для которых мы используем сокращенные обозначения

$$\bar{\theta}_3(z) = \theta_3(z|\tfrac{\tau}{2}), \quad \bar{\theta}_4(z) = \theta_4(z|\tfrac{\tau}{2})\,. \tag{51}$$

Два вида тэта-функций связаны друг с другом тождеством

$$2\,\theta_1(x+y)\,\theta_1(x-y) = \bar{\theta}_4(x)\,\bar{\theta}_3(y) - \bar{\theta}_4(y)\,\bar{\theta}_3(x)\,. \tag{52}$$

Предыдущий параграф позволил убедиться, что некомпактный квантовый дилогарифм (точнее говоря тесно связанная с ним D-функция) появляется повсеместно при работе с представлениями модулярного дубля. В случае эллиптически деформированной симметрии ту же роль выполняет эллиптическая гамма-функция [35]

$$\Gamma(z) \equiv \Gamma(z|\tau, 2\eta) \equiv \prod_{n,m=0}^{\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z}p^{n+1}q^{m+1}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}p^n q^m}, \;\; p = e^{2\pi\mathrm{i}\tau}, \quad q = e^{4\pi\mathrm{i}\eta}, \tag{53}$$

где $|p|, |q| < 1$. Эта функция обладает рядом замечательных свойств. Нам понадобится формула отражения

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z+2\eta+\tau) = 1 \tag{54}$$

и свойство квази-периодичности при сдвигах аргумента на 2η,

$$\Gamma(z+2\eta) = \mathrm{R}(\tau)\,e^{\mathrm{i}\pi z}\,\theta_1(z|\tau)\,\Gamma(z), \quad \mathrm{R}(\tau) \equiv \frac{p^{-\frac{1}{8}}}{\mathrm{i}(p;p)_\infty}\,. \tag{55}$$

В дальнейшем, чтобы избежать громоздких произведений, будем использовать сокращенные обозначения $\Gamma(\pm z \pm x) := \Gamma(z+x)\Gamma(z-x)\Gamma(-z+x)\Gamma(-z-x)$. Различные связи между алгеброй Склянина и эллиптической гипергеометрией исследованы в [32–34, 38].

Перейдем к описанию представлений алгебры Склянина. Оно основано на реализации генераторов (49) конечно-разностными операторами первого порядка, действующими в пространстве голоморфных функций комплексной переменной z [37],

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^a &= e^{\pi \mathrm{i} z^2/\eta} \frac{\mathrm{i}^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\eta)}{\theta_1(2z)} \\ &\times \Big[\theta_{a+1}\left(2z-g+\eta\right) e^{\eta \partial_z} - \theta_{a+1}\left(-2z-g+\eta\right) e^{-\eta\partial_z}\Big] e^{-\pi \mathrm{i} z^2/\eta}. \end{aligned} \tag{56}$$

с коэффициентами, построенными из тэта-функций и зависящими от параметра $g \in \mathbb{C}$ – спина представления. В (56) использовано нестандартное преобразование подобия при помощи $e^{\pm\pi \mathrm{i} z^2/\eta}$, назначение которого объяснено в [13]. При спине g в общем положении представление (56) бесконечномерно и неприводимо. Для дискретного ряда значений $g = g_n \equiv (n+1)\eta + \frac{\tau}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, отщепляется $(n+1)$-мерное представление на пространстве Θ^+_{2n} четных тэта-функций порядка $2n$, которое образовано четными $f(z) = f(-z)$ голоморфными функциями со следующими свойствами квази-периодичности

$$f(z+1) = f(z), \qquad f(z+\tau) = \mathrm{e}^{-2n\pi i\tau - 4n\pi i z} f(z)\,.$$

На пространстве Θ^+_{2n} генераторы (56) при $g = g_n$ действуют инвариантно и неприводимо. Легко убедиться, что мономы, построенные из тэта-функций (51), образуют базис $\{\varphi^{(n)}_j(z)\}_{j=1}^{n+1}$ в Θ^+_{2n},

$$\varphi^{(n)}_{j+1}(z) = \left[\bar\theta_3\left(z\right)\right]^j \, \left[\bar\theta_4\left(z\right)\right]^{n-j}\,, \quad j = 0, 1, \cdots, n\,. \tag{57}$$

Эллиптическая гамма-функция (53), позволяет собрать вместе все базисные элементы $\varphi^{(n)}_j(z)$. А именно, $\Gamma\left(\mp z \mp x + g_n\right)$ является производящей функцией базисных векторов $(n+1)$-мерного представления со вспомогательным параметром x. При помощи (52), (54), (55) легко убедиться, что она равна конечному произведению линейных комбинаций $\bar{\theta}_3(z)$ и $\bar{\theta}_4(z)$,

$$\begin{aligned} & c\cdot\Gamma\left(\mp z\mp x+g_n\right) \\ & =\prod_{r=0}^{n-1}\left[\bar{\theta}_3(z)\bar{\theta}_4(x+(n-1-2r)\eta)+\bar{\theta}_4(z)\bar{\theta}_3(x+(n-1-2r)\eta)\right], \end{aligned} \tag{58}$$

где постоянная $c=(-2)^n\mathrm{R}^{-2n}(\tau)e^{-\frac{i\pi\tau}{2}n}$, которое сводится к линейной комбинации базисных векторов $\varphi^{(n)}(z)$ (57) с некоторыми коэффициентами $\psi^{(n)}(x)$, зависящими от вспомогательного параметра x. Поскольку производящая функция (58) симметрична при $z\rightleftarrows x$, то она содержит также второй естественный базис $\{\psi_j^{(n)}(z)\}_{j=1}^{n+1}$,

$$c\cdot\Gamma\left(\mp z\mp x+g_n\right)=\sum_{j=1}^{n+1}\psi_{n+2-j}^{(n)}(x)\,\varphi_j^{(n)}(z)=\sum_{j=1}^{n+1}\varphi_{n+2-j}^{(n)}(x)\,\psi_j^{(n)}(z)\,,$$

образованный произведениями $\bar{\theta}_3(z)$ и $\bar{\theta}_4(z)$ со сдвинутыми аргументами,

$$\begin{gathered} \psi_{j+1}^{(n)}(z)=\mathrm{Sym}\prod_{r=0}^{n-1}\bar{\theta}_{a_r}\left(z+(n-1-2r)\eta\right), \\ a_r\in\{3,4\},\quad j=0,1,\cdots,n \end{gathered} \tag{59}$$

где $\bar{\theta}_3$ появляется в произведении j раз, а $\bar{\theta}_4$ – $n-j$ раз, симметризация Sym по индексам $\{a_r\}$. Введем обозначения $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n+1}$ и $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^{n+1}$ для пары базисов (57), (59) $(n+1)$-мерного пространства Θ_{2n}^{+},

$$\mathbf{e}_j=\varphi_j^{(n)}(z),\quad \mathbf{f}_j=\psi_j^{(n)}(z),\quad j=1,2,\cdots,n+1\,.$$

При $n=1$ представление 2-мерное и оба базиса совпадают

$$\mathbf{e}_1=\mathbf{f}_1=\bar{\theta}_4(z),\quad \mathbf{e}_2=\mathbf{f}_2=\bar{\theta}_3(z)\,. \tag{60}$$

Для больших спинов базисы различны. При $n=2$ представление 3-мерное с базисами

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1=\bar{\theta}_4^2(z),\quad \mathbf{e}_2=\bar{\theta}_4(z)\bar{\theta}_3(z),\quad \mathbf{e}_3=\bar{\theta}_3^2(z);\\ &\mathbf{f}_1=\bar{\theta}_4(z-\eta)\bar{\theta}_4(z+\eta),\\ &\mathbf{f}_2=\bar{\theta}_4(z-\eta)\bar{\theta}_3(z+\eta)+\bar{\theta}_3(z-\eta)\bar{\theta}_4(z+\eta),\\ &\mathbf{f}_3=\bar{\theta}_3(z-\eta)\bar{\theta}_3(z+\eta)\,. \end{aligned}$$

Выше мы кратко изложили основные факты об алгебре Склянина и ее представлениях. Перейдем теперь к соответствующим решениям уравнения Янга–Бакстера. Как было показано в работе [13], симметрийные ограничения, налагаемые алгеброй Склянина, не позволяют однозначно зафиксировать решение $\mathbb{R}_{12}(u)$, определенное на тензорном произведении пары бесконечномерных представлений спинов g_1 и g_2. Однако, если наложить более строгие симметрийные ограничения, задаваемые эллиптическим дублем, то R-оператор фиксируется однозначно (с точностью до несущественного нормировочного коэффициента). Такой R-оператор был построен в работе [13] в форме интегрального оператора, заданного на тензорном произведении двух произвольных бесконечномерных представлений эллиптического дубля. Интегральное ядро этого оператора образовано произведением эллиптических гамма-функций (53). Доказательство того факта, что построенный оператор удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (1) основано на следующих ключевых тождествах: формулы для эллиптического бета-интеграла [39,41], леммы Бейли работы [40] и формулы обращения [42]. Эллиптический дубль [38] состоит из двух копий алгебры Склянина, генераторы которых коммутируют или антикоммутируют между собой. Его конечномерные представления сводятся к тензорному произведению (с точночтью до знака) конечномерных представлений составляющих его алгебр Склянина. Поскольку, дальше нас будут интересовать конечномерные представления и матричная реализация решений уравнения Янга–Бакстера, то без существенной потери общности мы будем работать только с одной из алгебр Склянина, составляющих эллиптический дубль.

Выбирая за основу интегральный R-оператор для эллиптического дубля, в работе [9] были исследованы его ограничения на конечномерные представления эллиптического дубля. В частности было найдено его ограничение на $(n+1)$-мерное представление спина $g_n \equiv$

$(n+1)\eta + \frac{\tau}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, в первом пространстве. Оно выражается формулой для действия R-оператора на производящую функцию конечномерного представления (58) и на произвольную голоморфную функцию $\Phi(z)$ из второго пространства[4], на котором реализовано представление спина g,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}_{12}(u|g_1 = g_n,\, g)\Gamma(\mp z_1 \mp z_3 + g_n)\,\Phi(z) \\
&= \frac{\Gamma(\mp z \mp z_3 - \frac{u}{2} + \frac{g_n+g}{2})}{\Gamma(\mp z_1 \mp z - \frac{u}{2} - \frac{g_n+g}{2} + \eta + \frac{\tau}{2})} \\
&\quad \times \mathrm{M}(n\eta)\,\frac{\Gamma(\mp z_1 \mp z - \frac{u}{2} + \frac{g_n-g}{2})}{\Gamma(\mp z \mp z_3 - \frac{u}{2} + \frac{g-g_n}{2} + \eta + \frac{\tau}{2})}\,\Phi(z)\,.
\end{aligned} \tag{61}$$

z_3 служит вспомогательным параметром производящей функции. Входящий в предыдущую формулу конечно-разностный оператор

$$\mathrm{M}(n\eta) = \sum_{l=0}^{n} \beta_l^{(n)}(z)\, e^{(n-2l)\eta\partial_z} \tag{62}$$

является сплетающим оператором эквивалентных представлений алгебры Склянина и был впервые построен А. Забродиным в [44]. В работе [14] было показано, что он допускает факторизованное представление

$$\mathrm{M}(n\eta) = \mathrm{A}_a(n\eta - \eta)\cdots \mathrm{A}_a(\eta)\mathrm{A}_a(0)\cdot \bar{\theta}_a^{-n}(z)\,, \quad a = 3, 4$$

и строится из конечно-разностных операторов первого порядка

$$\mathrm{A}_a(g) = e^{\pi \mathrm{i}\frac{z^2}{\eta}}\,\frac{1}{\theta_1(2z|\tau)}\left[\bar{\theta}_a(z+g+\eta)e^{\eta\partial_z} - \bar{\theta}_a(z-g-\eta)e^{-\eta\partial_z}\right]\, e^{-\pi\mathrm{i}\frac{z^2}{\eta}}\,.$$

Коэффициенты $\beta_l^{(n)}(z)$ (62) приведены в [14, 44].

Раскладывая (61) по набору независимых функций $\{\phi_j^{(n)}(z_3)\}$ от вспомогательного параметра z_3, получаем матричную форму ограниченного R-оператора

$$\mathbb{R}_{12}(u|g_n\,,\, g)\,\psi_j^{(n)}(z_1) = \varphi_l^{(n)}(z_1)\Big[\mathbb{R}_{12}(u|g_n\,,\, g)\Big]_{lj}\,,$$

записанного в паре базисов (57), (59): $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n+1}$ и $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^{n+1}$,

$$\mathbf{e}_j = \varphi_j^{(n)}(z_1), \quad \mathbf{f}_j = \psi_j^{(n)}(z_1), \quad j = 1, 2, \cdots, n+1\,.$$

[4]Для упрощения обозначений мы пишем z вместо z_2.

При этом его матричные элементы являются конечно-разностными операторами порядка n с коэффициентами, построенными из тэта-функций. Такое матричное решение уравнения Янга–Бакстера допускает факторизованное представление

$$\mathbb{R}_{12}(u|g_n\,,\,g) = V(u_1,z)\,D(z,\partial)\,\mathbf{C}\,V^T(u_2,z)\,\mathbf{C} \tag{63}$$

где матрица $D(z,\partial)$ – диагональна и образована слагаемыми из $\mathrm{M}(n\eta)$ (62)

$$\left(D(z,\partial)\right)_{lj} = \delta_{lj}\,\beta^{(n)}_{l-1}(z)\,e^{(n+2-2l)\eta\partial_z}\,,$$

матрица $\mathbf{C}$ числовая с единицами на антидиагонали $(\mathbf{C})_{lj} = \delta_{n+2-l,j}$;

$$u_1 = \frac{u+g}{2}, \quad u_2 = \frac{u-g}{2}\,.$$

Матрица V образована функциями $\left(V(u,z)\right)_{jl} = V^{(n)}_{jl}(u,z)$, которые задаются производящим соотношением

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1}\varphi^{(n)}_j(x)\,V^{(n)}_{jl}(z,u) \equiv \prod_{r=0}^{n-l}\theta_1\left(\pm x + z - u + \tfrac{g_n}{2} + 2\eta(\tfrac{n}{2} - l - r)\right)\\ \times\prod_{r=2}^{l}\theta_1\left(\pm x + z + u - \tfrac{g_n}{2} + 2\eta(\tfrac{n}{2} - l + r)\right)\,.\end{aligned}$$

Учитывая (52), очевидно, что $V^{(n)}_{jl}$ есть линейная комбинация произведений тэта-функцией $\bar\theta_3$ и $\bar\theta_4$ со сдвинутыми аргументами, причем каждый моном содержит j раз $\bar\theta_4$ и $n-j$ раз $\bar\theta_3$, т.е.

$$\begin{aligned}V^{(n)}_{jl}(z,u) = (-1)^{n+1-j}\,\mathrm{Sym}\prod_{r=2}^{l}\bar\theta_{a_{r-1}}\left(z + u - \tfrac{g_n}{2} + 2\eta(\tfrac{n}{2} - l + r)\right)\\ \times\prod_{r=0}^{n-l}\bar\theta_{a_{r+l}}\left(z - u + \tfrac{g_n}{2} + 2\eta(\tfrac{n}{2} - l - r)\right),\end{aligned}$$

где $a_r \in \{3,4\}$. Отметим, что $V^{(n)}_{jl}(-z,u) = V^{(n)}_{j,n+2-l}(z,u)$, т.е. $V(-z,u) = V(z,u)\,\mathbf{C}$. Доказательство (63) повторяет аналогичный вывод формулы (35) для модулярного дубля и основано на свойствах эллиптической гамма-функции (54), (55).

Для иллюстрации формулы (63) приведем явный вид всех матриц для случаев $n = 1$ и $n = 2$. Диагональные матрицы $D_{(n)}$:

$$D_{(1)} = e^{\pi \mathrm{i} z^2/\eta}\,\frac{1}{\theta_1(2z)}\mathrm{diag}(e^{\eta\partial}, -e^{-\eta\partial})\,e^{-\pi \mathrm{i} z^2/\eta},$$

$$\begin{aligned} D_{(2)} &= e^{\pi \mathrm{i} z^2/\eta}\,\frac{1}{\theta_1(2z-2)\theta_1(2z)\theta_1(2z+2)} \\ &\quad\times \mathrm{diag}\left(\theta_1(2z-2)e^{2\eta\partial}, -\frac{\theta_1(4\eta)}{\theta_1(2\eta)}\theta_1(2z), \theta_1(2z+2)e^{-2\eta\partial}\right)\,e^{-\pi \mathrm{i} z^2/\eta}. \end{aligned}$$

Матрицы $V_{(n)}(u)$:

$$V_{(1)}(u+\tfrac{\tau}{4}) = \begin{pmatrix} -\bar\theta_3\,(z-u) & -\bar\theta_3\,(z+u) \\ \bar\theta_4\,(z-u) & \bar\theta_4\,(z+u) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &V_{(2)}(u-\tfrac{\eta}{2}+\tfrac{\tau}{4}) \\ &= \begin{pmatrix} \bar\theta_3\,(z-u)\,\bar\theta_3\,(z-u+2\eta) & \bar\theta_3\,(z-u)\,\bar\theta_3\,(z+u) & \bar\theta_3\,(z+u)\,\bar\theta_3\,(z+u-2\eta) \\ \bar\theta_{\{3}\,(z-u)\,\bar\theta_{4\}}\,(z-u+2\eta) & \bar\theta_{\{3}\,(z-u)\,\bar\theta_{4\}}\,(z+u) & \bar\theta_{\{3}\,(z+u)\,\bar\theta_{4\}}\,(z+u-2\eta) \\ \bar\theta_4\,(z-u)\,\bar\theta_4\,(z-u+2\eta) & \bar\theta_4\,(z-u)\,\bar\theta_4\,(z+u) & \bar\theta_4\,(z+u)\,\bar\theta_4\,(z+u-2\eta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Фигурные скобки во второй строке означают симметризацию по индексам тэта-функций. Напомним, что в случае $n = 1$ базисы **e** и **f** (60) совпадают, а ограниченный R-оператор становится квантовым эллиптическим оператором Лакса. Подобная факторизация эллиптического L-оператора использовалась в [25].

Литература

1. R. J. Baxter, *Partition function of the eight-vertex lattice model.* — Ann. Phys. **70** (1972), 193–228.
2. V. V. Bazhanov, V. V. Mangazeev and S. M. Sergeev, *Faddeev-Volkov solution of the Yang-Baxter equation and discrete conformal symmetry.* — Nucl. Phys. B **784** (2007) 234 `[hep-th/0703041]`.
3. V. V. Bazhanov and S. M. Sergeev, *A master solution of the quantum Yang-Baxter equation and classical discrete integrable equations.* — ATMP **16** (2012), 65–95; `arXiv:1006.0651 [math-ph]`
4. V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, *Chiral Potts model as a descendant of the six-vertex model.* — J. Stat. Phys. **59** (1990), 799–817
5. A. G. Bytsko, J. Teschner, *R operator, coproduct and Haar measure for the modular double of $U_q(sl(2,R))$.* — Commun. Math. Phys. **240** (2003), 171–196; `math.QA/0208191`.
6. A. G. Bytsko, J. Teschner, *Quantization of models with non-compact quantum group symmetry: Modular XXZ magnet and lattice sinh-Gordon model.* — J. Phys. A **39** (2006), 12927; `hep-th/0602093`.

7. D. Chicherin, S. Derkachov, *The R-operator for a modular double.* — J. Phys. A **47** (2014), 115203; `arXiv:1309.0803 [math-ph]`.
8. D. Chicherin, S. E. Derkachov and V. P. Spiridonov, *From principal series to finite-dimensional solutions of the Yang-Baxter equation.* `arXiv:1411.7595 [math-ph]`.
9. D. Chicherin, S. E. Derkachov and V. P. Spiridonov, *New elliptic solutions of the Yang-Baxter equation.* `arXiv:1412.3383 [math-ph]`.
10. S. E. Derkachev, *Factorization of the R-matrix. I.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **335**, ПОМИ, СПб., 2006, 134–163; `arXiv:math/0503396 [math.QA]`
11. S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, *Yang–Baxter R operators and parameter permutations.* — Nucl. Phys. B **785** (2007) 263 `[hep-th/0703076 [HEP-TH]]`.
12. С. Э. Деркачев, А. Н. Манашов, *Общее решение уравнения Янга–Бакстера с группой симметрии $SL(n,C)$.* — Алгебра и анализ, **21**, No. 4 (2009), 1–94
13. С. Э. Деркачев, В. П. Спиридонов, *Уравнение Янга–Бакстера, перестановки параметров и эллиптический бета-интеграл.* — УМН, **68**:6(414) (2013), 59–106; `arXiv:1205.3520 [math-ph]`.
14. С. Э. Деркачев, В. П. Спиридонов, *Конечномерные представления эллиптического модулярного дубля.* ТМФ, в печати; `arXiv:1310.7570 [math.QA]`.
15. L. D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Anstz works for integrable model.* — In: Quantum Symmetries/Symetries Qantiques, Proc.Les-Houches summer school, LXIV. Eds. A.Connes, K.Kawedzki, J.Zinn-Justin. North-Holland, 1998, 149–211, hep-th/9605187.
16. L. D. Faddeev, *Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group.* — Lett. Math. Phys. **34** (1995), 249–254; `hep-th/9504111`.
17. L. D. Faddeev, *Modular double of a quantum group*, Conf. Moshé Flato 1999, vol. I, Math. Phys. Stud. **21**, Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 149–156; `math.QA/9912078`.
18. L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, A. Y. Volkov, *Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. 1. Algebraic approach and duality.* — Commun. Math. Phys. **219** (2001), 199–219; `hep-th/0006156`.
19. В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке.* — ТМФ, **57**, No. 2 (1983), 163–181
20. А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев, *Янг-бакстеризация квантового дилогарифма.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **224**, ПОМИ, СПб., 1995, 146–154.
21. L. Hadasz, M. Pawelkiewicz, V. Schomerus, *Self-dual Continuous Series of Representations for $\mathcal{U}_q(sl(2))$ and $\mathcal{U}_q(osp(1|2))$.* — JHEP **1410** (2014) 91 `[arXiv:1305.4596 [hep-th]]`.
22. M. Jimbo (ed), *Yang-Baxter equation in integrable systems.* Adv. Ser. Math. Phys., 10, World Scientific (Singapore), 1990.
23. S. M. Khoroshkin, V. N. Tolstoy, *Yangian Double.* — Lett. Math. Phys. **36** (1996), 373–402; `hep-th/9406194`.
24. S. Khoroshkin and Z. Tsuboi, *The universal R-matrix and factorization of the L-operators related to the Baxter Q-operators.* — J. Phys. A **47**, 192003 (2014) `[arXiv:1401.0474 [math-ph]]`.
25. I. Krichever and A. Zabrodin, *Vacuum curves of elliptic L-operators and representations of Sklyanin algebra.* — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. **2**, Vol. **191** (1999), 199–221; `solv-int/9801022`.

26. П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, *О решениях уравнения Янга–Бакстера.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ, **95**, (1980), 129–160.
27. P. P. Kulish, N. Y. Reshetikhin and E. K. Sklyanin, *Yang–Baxter Equation and Representation Theory. 1..* — Lett. Math. Phys. **5** (1981), 393–403.
28. P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments.* — Lect. Notes Physics, **151** (1982), 61–119.
29. V. V. Mangazeev, *On the Yang–Baxter equation for the six-vertex model.* — Nucl. Phys. B **882** (2014) 70 [arXiv:1401.6494 [math-ph]].
30. V. V. Mangazeev, *Q-operators in the six-vertex model.* — Nucl. Phys. B **886**, 166 (2014) [arXiv:1406.0662 [math-ph]].
31. M. Pawelkiewicz, V. Schomerus and P. Suchanek, *The universal Racah–Wigner symbol for* $U_q(osp(1—2))$. — JHEP **1404** (2014) 079 [arXiv:1307.6866 [hep-th]].
32. E. M. Rains, BC_n*-symmetric abelian functions.* — Duke Math. J. **135** (1) (2006), 99–180.
33. H. Rosengren, *An elementary approach to* $6j$*-symbols (classical, quantum, rational, trigonometric, and elliptic).* — Ramanujan J. **13** (2007), 131–166; math/0312310.
34. H. Rosengren, *Sklyanin invariant integration.* — Internat. Math. Res. Notices, no. **60** (2004), 3207–3232; math/0405072.
35. S. N. M. Ruijsenaars, *First order analytic difference equations and integrable quantum systems.* — J. Math. Phys. **38** (1997), 1069–1146.
36. Е. К. Склянин, *О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением ЯнгаЦБакстера.* — Функц. анализ и его прил. **16** (4) (1982), 27–34.
37. Е. К. Склянин, *О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера. Представления квантовой алгебры.* — Функц. анализ и его прил. **17** (1983), 34–48.
38. В. П. Спиридонов, *Непрерывная биортогональность эллиптической гипергеометрической функции.* — Алгебра и анализ **20**, No. 5 (2008), 155–185, arXiv:0801.4137 [math.CA].
39. В. П. Спиридонов, *Об эллиптической бета-функции.* — УМН, **56**:1(337) (2001), 181–182.
40. В. П. Спиридонов, *Дерево Бэйли для интегралов.* — ТМФ, **139**, No. 1 (2004), 104–111; math.CA/0312502.
41. В. П. Спиридонов, *Очерки теории эллиптических гипергеометрических функций.* — Успехи матем. наук **63**, No. 3 (2008), 3–72, arXiv:0805.3135 [math.CA].
42. V. P. Spiridonov and S. O. Warnaar, *Inversions of integral operators and elliptic beta integrals on root systems.* — Adv. Math. **207** (2006), 91–132.
43. A. Y. Volkov, *Noncommutative hypergeometry.* — Commun. Math. Phys. **258** (2005), 257–273; math.QA/0312084.
44. A. Zabrodin, *On the spectral curve of the difference Lame operator.* — Int. Math. Research Notices, no. 11 (1999), 589–614; arXiv:math/9812161.

Derkachov S. E., Chicherin D. I. Matrix factorization for solutions of the Yang–Baxter equation.

We study solutions of the Yang-Baxter equation on a tensor product of an arbitrary finite-dimensional and an arbitrary infinite-dimensional representations of the rank one symmetry algebra. We consider the cases of the Lie algebra sl_2, the modular double (trigonometric deformation) and the Sklyanin algebra (elliptic deformation). The solutions are matrices with operator entries. The matrix elements are differential operators in the case of sl_2, finite-difference operators with trigonometric coefficients in the case of the modular double or finite-difference operators with coefficients constructed out of Jacobi theta functions in the case of the Sklyanin algebra. We find a new factorized form of the rational, trigonometric, and elliptic solutions, which drastically simplifies them. We show that they are products of several simply organized matrices and obtain for them explicit formulae.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. И. Стеклова,
наб. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия,
Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique
LAPTH, CNRS, UMR 5108,
associée
'a l'Université de Savoie, B.P. 110,
F-74941 Annecy-le-Vieux, France
E-mail: derkach@pdmi.ras.ru,
chicherin@lapth.cnrs.fr

Поступило 2 марта 2015 г.