Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 433, 2015 г.

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР МАТРИЦЫ ЯКОБИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ РЕКУРРЕНТНЫМ СООТНОШЕНИЯМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Посвящается Петру Кулишу
в связи с семидесятилетием

§1. Введение

После появления работы [1] о свойствах периодических решеток Тода повысился интерес к исследованию ортогональных многочленов и матриц Якоби с периодическими и асимптотически периодическими коэффициентами [2–13]. В частности, в работе [14] изучались рекуррентные соотношения с периодическими коэффициентами. Было показано, что такие полиномы можно описать с помощью классических полиномов Чебышева. Цель данной работы состоит в исследовании дискретного спектра матрицы Якоби, соответствующей полиномам этого класса, т.е. полиномам с периодическими коэффициентами в рекуррентных соотношениях. В качестве примера мы рассматриваем:

а) случай когда период N повторяемости коэффициентов рекуррентных соотношений равен трем (как частный случай мы рассмотрим “параметрические” полиномы Чебышева [18]);

б) Простейшие N-симметричные полиномы Чебышева ($N = 3, 4, 5$), которые были введены авторами при изучении “составной модели обобщенного осциллятора” [15].

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из работы [14]. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ последовательность полиномов, определяемых с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered}\varphi_n(x) = (x + a_{n-1})\varphi_{n-1}(x) - b_{n-1}\varphi_{n-2}(x),\\ n \geqslant 1, \quad \varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_{-1}(x) = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

Ключевые слова: ортогональные многочлены, матрицы Якоби, рекуррентные соотношения.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 15-01-03148-а.

коэффициенты которых периодичны с периодом $N \geqslant 2$:

$$a_{n+N} = a_n, \qquad b_{n+N} = b_n, \quad n \geqslant 0. \tag{2}$$

Будем использовать полиномы Чебышева 2-го рода с коэффициентом у старшей степени равным единице (monic polynomials). Эти полиномы определяются рекуррентными соотношениями

$$tU_n(t) = U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t), \quad n \geqslant 0, \quad U_0(t) = 1, U_{-1}(t) = 0. \tag{3}$$

В работе [14] было доказано, что для любого $N \geqslant 1$ полином $\varphi_{2N-1}(x)$ делится на полином $\varphi_{N-1}(x)$, т.е. выполняются соотношения

$$\varphi_{2N-1}(x) = \varphi_{N-1}(t)P_N(x), \tag{4}$$

где полином $P_N(x)$ определяется равенством (4). Кроме того, для $n = Nm + k$, $k = \overline{0;(N-1)}$, $m \geqslant 2$ выполнены рекуррентные соотношения

$$\varphi_n(x) = \varphi_{Nm+k}(x) = \varphi_{k+N}(x)U_{m-1}(P_N(x)) - \varphi_k(x)U_{m-2}(P_N(x)). \tag{5}$$

Матрицу Якоби $J = \left[j_{i,k}^{(N)}\right]_{i,k=0}^{\infty}$, соответствующую рекуррентным соотношениям (1) можно записать в виде

$$j_{i,k}^{(N)} = A\delta_{i+1,k} + B\delta_{i,k} + C\delta_{i-1,k}, \tag{6}$$

где матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & -a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-2} & -a_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

имеют размер $N \times N$.

Пусть $X_\mu = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)^t \in \ell^2$ собственный вектор матрицы J, соответствующий собственному значению μ:

$$(J - \mu I)X_\mu = 0. \tag{8}$$

Справедлив следующий критерий: решение μ уравнения (8) является собственным значением матрицы J, тогда и только тогда, когда

$$\|X_\mu\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(\mu)|^2 < \infty \tag{9}$$

В следующем разделе для матрицы Якоби J будет получено "критическое уравнение", решения которого будем называть "критическими значениями" матрицы J. Для того, чтобы μ являлось собственным значением матрицы J необходимо, чтобы μ было её критическим значением.

§2. Критическое уравнение для матрицы J

Введем необходимые обозначения:

$$S_1 = \sum_{k=N}^{2N-1} \varphi_k^2(\mu), \quad S_2 = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k^2(\mu), \quad S = S_1 + S_2; \tag{10a}$$

$$S_n^N(\mu) = \sum_{k=n}^{n+2N-1} \varphi_k^2(\mu), \quad D_n^N(\mu) = \sum_{k=n}^{n+N-1} \varphi_k(\mu)\varphi_{k+N}(\mu) \tag{10b}$$

$$\Delta_n^N(\mu) = S_n^N(\mu) - P_N(\mu)D_n^N(\mu), \quad n \geqslant 0 \tag{10c}$$

Ясно, что $S = S_0^N(\mu)$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть система полиномов $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определена рекуррентными соотношениями* (1) *и условиями периодичности* (2). *Тогда для любого $n \geqslant 2N$ справедливы рекуррентные соотношения*

$$\varphi_n(x) = P_N(x)\varphi_{n-N}(x) - \varphi_{n-2N}(x). \tag{11}$$

Доказательство. Из соотношений (3) и (5) имеем $(n = Nm + k)$

$$\begin{aligned}
P_N(x)\varphi_{n-N}(x) - \varphi_{n-2N}(x) &= \varphi_{k+N}(x)P_N(x)U_{m-2}(P_N(x)) \\
-\varphi_k(x)P_N(x)U_{m-3}(P_N(x)) &- \varphi_{k+N}(x)U_{m-3}(P_N(x)) + \varphi_k(x)U_{m-4}(P_N(x)) \\
&= \varphi_{k+N}(x)\Big(U_{m-1}(P_N(x)) + U_{m-3}(P_N(x))\Big) \\
&- \varphi_k(x)\Big(U_{m-2}(P_N(x)) + U_{m-4}(P_N(x))\Big) \\
&- \varphi_{k+N}(x)U_{m-3}(P_N(x)) + \varphi_k(x)U_{m-4}(P_N(x)) \\
= \varphi_{k+N}(x)U_{m-1}(P_N(x)) &- \varphi_k(x)U_{m-2}(P_N(x)) = \varphi_{Nm+k}(x) = \varphi_n(x). \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 2. *Пусть система полиномов* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *определена рекуррентными соотношениями* (1) *и условиями периодичности* (2). *Пусть* $\Delta_n = \Delta_n^N(\mu)$ *определено равенствами* (10b) *и* (10c). *Тогда для всех* $n \geqslant 0$ *справедливо тождество*

$$\Delta_n = \Delta_0. \tag{12}$$

Доказательство. Для доказательства методом индукции достаточно показать, что при любых $n \geqslant 0$ выполняется равенство

$$\Delta_n = \Delta_{n+1}. \tag{13}$$

Для доказательства этого соотношения с учетом (10b) и (10c) надо проверить соотношение

$$\begin{aligned}
&\varphi_n^2 + \varphi_{n+1}^2 + \ldots + \varphi_{n+2N-1}^2 \\
&\qquad\qquad - P_N\left(\varphi_n\varphi_{n+N} + \varphi_{n+1}\varphi_{n+N+1} + \ldots \varphi_{n+N-1}\varphi_{n+2N-1}\right) \\
&\quad = \varphi_{n+1}^2 + \ldots + \varphi_{n+2N-1}^2 + \varphi_{n+2N}^2 \\
&\qquad\qquad - P_N\left(\varphi_{n+1}\varphi_{n+N+1} + \ldots + \varphi_{n+N-1}\varphi_{n+2N-1} + \varphi_{n+N}\varphi_{n+2N}\right),
\end{aligned}$$

или, что эквивалентно, проверить справедливость соотношения

$$\varphi_n^2 - P_N\varphi_n\varphi_{n+N} = \varphi_{n+2N}^2 - P_N\varphi_{n+N}\varphi_{n+2N}. \tag{14}$$

Из (11) следует

$$\varphi_{n+2N}^2 = P_N^2\varphi_{n+N}^2 - 2P_N\varphi_n\varphi_{n+N} + \varphi_n^2. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), убеждаемся в справедливости равенства (14), а значит равенство (13) тоже справедливо. □

Теорема 2.1. *Для того, чтобы* μ *было собственным значением матрицы Якоби, определяемой равенствами* (6) *и* (7) *необходимо, чтобы* μ *было корнем уравнения*

$$\Delta_0^N(\mu) = 0. \tag{16}$$

Доказательство. Обозначим

$$\sigma_{k,k+m} = \sum_{n=k}^{k+m} \varphi_n^2(\mu). \tag{17}$$

Тогда из (10), (11) следует

$$
\begin{aligned}
\sigma_{0,2N-1} &= S,\\
\sigma_{2N,3N-1} &= \left(P_N\varphi_N-\varphi_0\right)^2+\ldots+\left(P_N\varphi_{2N-1}\varphi_{N-1}\right)^2\\
&= P_N^2S_1+S_2-2P_ND_0^N(\mu).
\end{aligned}
$$

Так как согласно (10c)

$$
S-P_ND_0^N=\Delta_0^N \quad\Rightarrow\quad P_ND_0^N=S-\Delta_0^N,
$$

то имеем

$$
\sigma_{2N,3N-1}=2\Delta_0^N+\left(P_N^2-2\right)S_1-S_2. \tag{18}
$$

Аналогично, используя лемму 2, получаем

$$
\sigma_{3N,4N-1}=2\Delta_0^N+\left(P_N^2-2\right)\sigma_{2N,3N-1}-\sigma_{N,2N-1}. \tag{19}
$$

Далее имеем

$$
\sigma_{kN,(k+1)N-1}=2\Delta_0^N+\left(P_N^2-2\right)\sigma_{(k-1)N,kN-1}-\sigma_{(k-2)N,(k-1)N-1}. \tag{20}
$$

Суммируя по k (18), (19) и (20), получаем

$$
\begin{aligned}
\sigma_{0,nN-1}=\sum_{k=0}^{nN-1}\varphi_k^2 &= S+2\Delta_0^N+\left(P_N^2-2\right)S_1-S_2\\
&\quad+\sum_{k=3}^{n}\left(2\Delta_0^N+\left(P_N^2-2\right)\sigma_{(k-1)N,kN-1}-\sigma_{(k-2)N,(k-1)N-1}\right)\\
&=2(n-1)\Delta_0^N+\left(P_N^2-1\right)S_1+\left(P_N^2-2\right)\left(\sigma_{0,nN-1}-S\right)\\
&\qquad\qquad-\sigma_{0,nN-1}+S_2+\sigma_{(n-1)N,nN-1}.
\end{aligned}
$$

Из этого соотношения для нахождения $\sigma_{0,nN-1}=\sum\limits_{k=0}^{nN-1}\varphi_k^2$ получаем

$$
(4-P_N^2)\sum_{k=0}^{nN-1}\varphi_k^2=2(n-1)\Delta_0^N+S_1+(3-P_N^2)S_2+\sigma_{(n-1)N,nN-1}. \tag{21}
$$

Ясно, что если $\sum\limits_{k=0}^{nN-1}\varphi_k^2(\mu)<\infty$, то

$$
\lim_{n\to\infty}\sigma_{(n-1)N,nN-1}=0. \tag{22}
$$

Тогда из (21) следует, что для сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{nN-1} \varphi_k^2(\mu)$ необходимо, чтобы

$$\Delta_0^N(\mu) = 0. \qquad \square$$

Замечание 1. Все собственные значения матрицы J должны удовлетворять "критическому уравнению" (16). Однако среди критических значений могут оказаться "лишние", которые не удовлетворяют критерию (9), т.е. соответствующий вектор X_μ не принадлежит ℓ_2.

Замечание 2. Повидимому, для любого $N \geqslant 2$ выполняется равенство

$$\Delta_0^N(\mu) = \varphi_{N-1}(\mu)\, Q_N(\mu), \tag{23}$$

где полином Q_N определяется из (23). Тогда "критическое уравнение" (16) распадается на два уравнения

$$\varphi_{N-1}(\mu) = 0, \tag{24}$$

и

$$Q_N(\mu) = 0. \tag{25}$$

Можно получить достаточно простое условие (на диагональные элементы матрицы J) того, что корень μ уравнения (24) является собственным значением матрицы J. Однако для проверки того, что что корень μ уравнения (25) является собственным значением матрицы J не удается получить условия более простого, чем условие (22).

Мы проиллюстрируем эти предположения на приводимых ниже примерах. В качестве первого примера рассмотрим матрицу J (6), (7) при $N = 3$, $b_0 = b_1 = b_2 = 1$ и произвольных (в общем случае комплексных) a_0, a_1, a_2.

§3. Случай $N = 3$. Параметрические полиномы Чебышева

1. Рассмотрим систему обобщенных многочленов Чебышева $\left\{\varphi_n^{(3)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$, определяемых рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} x\varphi_n^{(3)}(x) &= \varphi_{n+1}^{(3)}(x) + a_n\varphi_n^{(3)}(x) + \varphi_{n-1}^{(3)}(x), \\ \varphi_0^{(3)}(x) &= 1, \quad \varphi_{-1}^{(3)}(x) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Коэффициенты a_n — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию периодичности (2) с $N = 3$.

Из (26) следует, что первые шесть полиномов равны

$$\begin{aligned} &\varphi_0^{(3)} = 1 && \varphi_1^{(3)} = x - a_0 \\ &\varphi_2^{(3)} = (x-a_1)\varphi_1^{(3)} - 1 && \varphi_3^{(3)} = (x-a_2)\varphi_2^{(3)} - \varphi_1^{(3)} \\ &\varphi_4^{(3)} = (x-a_0)\varphi_3^{(3)} - \varphi_2^{(3)} && \varphi_5^{(3)} = \varphi_2^{(3)}(\varphi_3^{(3)} - (x-a_1)), \end{aligned} \tag{27}$$

а при $n \geqslant 6$ последовательно вычисляются по формуле

$$\varphi_n^{(3)}(x) = P_3(x)\,\varphi_{n-3}^{(3)}(x) - \varphi_{n-6}^{(3)}(x). \tag{28}$$

Из (4) и последней из формул (27) следует, что

$$\begin{aligned} P_3(x) = \varphi_3^{(3)}(x) - (x-a_1) = x^3 - (a_0+a_1+a_2)x^2 \\ + (a_0a_2 + a_1a_2 + a_0a_1 - 3)x - a_0a_1a_2 + (a_0+a_1+a_2). \end{aligned} \tag{29}$$

Заметим, что при дополнительном условии $(a_0+a_1+a_2) = 0$, полином $P_3(x)$ имеет более простой вид

$$P_3(x) = x^3 + (a_0a_2 + a_1a_2 + a_0a_1 - 3)x - a_0a_1a_2. \tag{30}$$

Найдем собственные значения матрицы $J^{(3)} = \left[j_{j,k}^{(3)}\right]_{j,k=0}^{\infty}$, соответствующей рекуррентным соотношениям (26). Имеем

$$j_{i\,k}^{(3)} = B_3\delta_{i+1,k} + A_3\delta_{i,k} + B_3^t\delta_{i-1,k}, \tag{31}$$

где

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 \\ 1 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Используя формулы (10a)-(10c), (26) и (27), левую часть уравнения (16) можно записать в виде

$$S_0^3(\mu) - D_0^3(\mu)\,P_3(\mu) = \varphi_2^{(3)}(\mu)\,Q_3(\mu), \tag{33}$$

где

$$Q_3(\mu) = \left(1 + \left(\varphi_1^{(3)}(\mu)\right)^2\right)(\mu-a_1)(\mu-a_2) - 2 + \varphi_2^{(3)}(\mu)\left(1 - \varphi_1^{(3)}(\mu)(\mu-a_2)\right). \tag{34}$$

В результате уравнение (16) распадается на два

$$\varphi_2^{(3)}(\mu) = \mu^2 - (a_0+a_1)\mu + a_0a_1 - 1 = 0, \tag{35}$$

$$Q_3(\mu) = 3\mu^2 - 2(a_0 + a_1 + a_2)\mu + (a_0a_2 + a_1a_2 + a_0a_1 - 3) = 0. \quad (36)$$

Корни $\mu_{1,2}$ уравнения (35) имеют вид

$$\mu_{1,2} = \mu^{\pm} = \frac{1}{2}(a_0 + a_1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 + (a_1 - a_0)^2}, \quad (37)$$

а корни уравнения (36) равны

$$\mu_{3,4} = \nu^{\pm} = \frac{1}{3}\left((a_0 + a_1 + a_2) \pm \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_0a_1 - a_1a_2 - a_0a_2 + 9}\right). \quad (38)$$

В случае $(a_0 + a_1 + a_2) = 0$ корни $\mu_{3,4}$ упрощаются

$$\mu_{3,4} = \pm\sqrt{1 + \frac{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}{6}} \quad (39)$$

Осталось проверить какие из “критических чисел” μ_k, $(k = 1, 2, 3, 4)$ действительно являются собственными значениями рассматриваемой матрицы Якоби $J^{(3)}$.

Лемма 3. *Для того, чтобы корень* μ_k, $(k = 1, 2)$ (37) *уравнения* (35) *был собственным значением матрицы* $J^{(3)}$ (31), (32), *необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$|\mu_k - a_0| < 1, \quad k = 1, 2. \quad (40)$$

Доказательство. Действительно, для μ_k, $(k = 1, 2)$, определяемого (37), имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\varphi_j^{(3)}(\mu_k)\right)^2 = 1 + 2(\mu_k - a_0)^2\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_k - a_0)^{2j}.$$

Ряд в правой части этого соотношения сходится тогда, и только тогда, когда выполняется неравенство

$$|\mu_k - a_0| < 1, \quad k = 1, 2. \qquad \square$$

К сожалению для μ_k, $(k = 3, 4)$ даже в простейшем случае $(a_0 + a_1 + a_2) = 0$ не удается найти более простого достаточного условия того, что μ_k является собственным значением матрицы $J^{(3)}$, чем условие

$$\left[\left(\varphi_{3n}^{(3)}(\mu_k)\right)^2 + \left(\varphi_{3n+1}^{(3)}(\mu_k)\right)^2 + \left(\varphi_{3n+2}^{(3)}(\mu_k)\right)^2\right] \to 0$$

при $n \to \infty$ (а это и есть условие (22)).

2. Полином $Q_3(\mu)$ не имеет корней в случае "параметрических" полиномов Чебышева, введенных в [18]. Эти полиномы $\{\Psi_n(x;\alpha)\}_{n=0}^{\infty}$ определяются рекурентными соотношениями коэффициенты в которых зависят от $\alpha \in [-1,1]$ и равны

$$\begin{gathered} a_0(\alpha) = \tfrac{i\sqrt{3}}{2}(\alpha+1)(3\alpha-2), \quad a_1(\alpha) = -i\sqrt{3}\alpha, \\ a_2(\alpha) = -\tfrac{i\sqrt{3}}{2}(\alpha-1)(3\alpha+2), \end{gathered} \tag{41a}$$

$$a_{n+3}(\alpha) = a_n(\alpha), \quad n \geqslant 0, \tag{41b}$$

Очевидно выполняется равенство

$$a_0(\alpha) + a_1(\alpha) + a_2(\alpha) = 0. \tag{42}$$

Из (28)-(32), (41) следует

$$\begin{aligned} &\Psi_0(x;\alpha) = 1; \\ &\Psi_1(x;\alpha) = x - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\alpha+1)(3\alpha+2); \\ &\Psi_2(x;\alpha) = x^2 - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\alpha-1)(3\alpha+2)x + (\frac{3}{2}\alpha(\alpha+1)(3\alpha-2)-1); \\ &\Psi_3(x;\alpha) = x^3 + (1-\widetilde{\alpha}_1^2)x + i\sqrt{3}\alpha(1-\widetilde{\alpha}_2^2); \\ &\Psi_4(x;\alpha) = (x-a_0(\alpha))\Psi_3(x;\alpha) - \Psi_2(x;\alpha); \\ &\Psi_5(x;\alpha) = \Psi_2(x;\alpha)P_3(x;\alpha), \end{aligned} \tag{43}$$

где были использованы обозначения

$$\widetilde{\alpha}_1^2 = \frac{27}{4}\alpha^2(1-\alpha^2), \quad \widetilde{\alpha}_2^2 = \frac{3}{4}(1-\alpha^2)(9\alpha^2-4), \tag{44a}$$

$$P_3(x;\alpha) = x^3 - \widetilde{\alpha}_1^2 x - i\sqrt{3}\alpha\widetilde{\alpha}_2^2. \tag{44b}$$

При $n \geqslant 6$ полиномы $\Psi_n(x;\alpha)$ могут быть вычислены последовательно по формуле

$$\Psi_n(x;\alpha) = P_3(x;\alpha)\Psi_{n-3}(x;\alpha) - \Psi_{n-6}(x;\alpha). \tag{45}$$

В работе [18] был получен непрерывный спектр матрицы Якоби $J^{(3)}(\alpha)$, соответствующей параметрическим полиномам Чебышева. Носитель непрерывного спектра изображен на Рис. 1, где использовались обозначения

$$\lambda_k = \lambda(\alpha)e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \qquad \widetilde{\lambda}_k = \lambda(\alpha)e^{i\frac{(2k+3)\pi}{3}}, \quad k = 0,1,2. \tag{46}$$

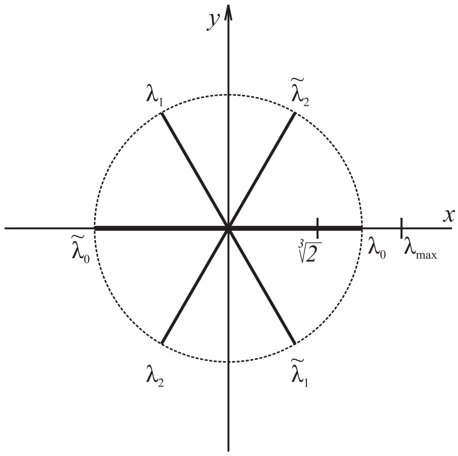

Рис. 1. Носитель непрерывного спектра матрицы Якоби $J^{(3)}(\alpha)$

Число $\lambda(\alpha) \geqslant 0$ является положительным корнем уравнения

$$\lambda^3 - \widetilde{\alpha}_1^2 \lambda - 2 = 0, \tag{47}$$

причем

$$\sqrt[3]{2} \leqslant \lambda(\alpha) \leqslant \lambda_{\max}, \tag{48}$$

где

$$\lambda_{\max} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{27}{64}\right)^2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{27}{64}\right)^2}}. \tag{49}$$

Рассмотрим теперь дискретный спектр матрицы $J^{(3)}(\alpha)$. Из (37) и (41) находим корни уравнения (35)

$$\mu_{1,2}(\alpha) = \frac{i\sqrt{3}}{4}(\alpha - 1)(3\alpha + 2) \pm \sqrt{1 - \frac{3}{16} f^2(\alpha)}, \tag{50}$$

где

$$f(\alpha) = 3\alpha^2 + 3\alpha - 2, \tag{51}$$

и

$$\mu_{1,2}(\alpha) - a_0(\alpha) = -\frac{i\sqrt{3}}{4} f(\alpha) \pm \sqrt{1 - \frac{3}{16} f^2(\alpha)}. \tag{52}$$

Согласно лемме 3 справедливость неравенства (40) является необходимым и достаточным условием того что μ_k, $k = 1, 2$ является собственным значением матрицы Якоби $J^{(3)}(\alpha)$. Обозначим

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}},\\
\alpha_2 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}},\\
\alpha_3 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}},
\end{aligned}
\tag{53}
$$

и исследуем выполнение неравенства (40) на промежутках

$$
[-1, \alpha_1], \quad (\alpha_1, \alpha_2), \quad [\alpha_2, \alpha_3], \quad (\alpha_3, 1].
$$

В результате получаем

a) На участках $[-1, \alpha_1)$ и $[\alpha_2, \alpha_3]$ $\mu_{1,2}(\alpha)$ не является собственным значением матрицы Якоби $J^{(3)}(\alpha)$.

b) На интервале (α_1, α_2) только $\mu_2(\alpha)$ является собственным значением матрицы $J^{(3)}(\alpha)$.

c) На участке $(\alpha_3, 1]$ только $\mu_1(\alpha)$ является собственным значением матрицы $J^{(3)}(\alpha)$.

Рассмотрим теперь корни $\mu_{3,4}(\alpha)$ уравнения (38), которое в данном случае имеет вид

$$
Q_3(\mu; \alpha) = 3\mu^2 - \widetilde{\alpha}_1^2 = 0 \tag{54}
$$

и его корни равны

$$
\mu_{3,4}(\alpha) = \pm \frac{\widetilde{\alpha}_1}{\sqrt{3}}\,. \tag{55}
$$

Для доказательства того, что $\mu_{3,4}(\alpha)$ не являются собственными значениями матрицы $J^{(3)}(\alpha)$ при $\alpha \in [-1, 1]$ достаточно показать, что необходимое условие (22) нарушается. Используя рекуррентные соотношения (11) (и обозначения (10) и (17)) нетрудно показать, что

$$
S_{3n}^N(\mu) + S_{3(n-1)}^N(\mu) - S(\mu) - S_3^N(\mu) = P_3^2(\mu; \alpha)\left(\sigma_{3n,3n+2}(\mu) - S_2(\mu)\right).
$$

Тогда,

$$\sum_{s=-1}^{1} \sigma_{3(n+s),3(n+s)+2}(\mu) + (1 - P_3^2(\mu;\alpha))\sigma_{3n,3n+2}(\mu) \\ = S_2 + S_1(2 - P_3^2(\mu;\alpha)) + \sigma_{6,6+2}(\mu) = A_0(\alpha). \tag{56}$$

Непосредственные вычисления показывают, что для любого $\alpha\in(-1,0) \cup (0,1]$ величина $A_0(\alpha) \neq 0$. Однако, при выполнении необходимого условия (22) левая часть равенства (56) стремится к нулю при $n \to \infty$ и, следовательно $A_0(\alpha) = 0$. Итак $\mu_{3,4}(\alpha)$ при $\alpha \in (-1,0) \cup (0,1]$ не являются собственными значениями матрицы Якоби $J^{(3)}(\alpha)$. Из результатов работы [19] следует, что $\mu_{3,4}(0)$ и $\mu_{3,4}(1)$ также не являются собственными значениями матриц $J^{(3)}(0)$ и $J^{(3)}(1)$. Следовательно, $\mu_{3,4}(\alpha)$ не являются собственными значениями матрицы Якоби $J^{(3)}(\alpha)$ при $\alpha \in [-1,1]$.

Итак, матрица Якоби $J^{(3)}(\alpha)$ имеет одно собственное значение $\mu(\alpha)$ при $\alpha \in (\alpha_3, 1]$ и одно собственное значение $\mu(\alpha)$ при $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$.

Далее, в качестве еще одного примера, мы рассмотрим матрицу Якоби для простейших N-симметричных полиномов Чебышева, которые принадлежат рассматриваемому нами типу многочленов. Эти полиномы возникли при изучении “составной модели обобщенного осциллятора” [15–17]. Мы будем рассматривать только случаи $N = 3, 4, 5$, так как в работе [15] было показано, что при $n \geqslant 6$ такие полиномы не существуют.

§4. Простейшие N-симметричные полиномы Чебышева

Простейшие N-симметричные полиномы Чебышева $\{\varphi_n^N(x)\}_{n=0}^{\infty}$ [15] порождаются рекуррентными соотношениями

$$x\varphi_n^N(x) = \varphi_{n+1}^N(x) + a_n\varphi_n^N(x) + \varphi_{n-1}^N(x), \quad \varphi_0^N(x) = 1,\ \varphi_{-1}^N(x) = 0, \tag{57}$$

Коэффициенты a_n определяются формулами

$$a_0^{(3)} = i\sqrt{3},\ a_1^{(3)} = i\sqrt{3},\ a_2^{(3)} = 0,\ a_{n+3}^{(3)} = a_n^{(3)},\ n \geqslant 0; \tag{58a}$$

$$a_0^{(4)} = 2i,\ a_1^{(4)} = 0,\ a_2^{(4)} = -2i,\ a_3^{(4)} = 0,\ a_{n+4}^{(4)} = a_n^{(4)},\ n \geqslant 0; \tag{58b}$$

$$a_0^{(5)} = a_2^{(5)} = a_3^{(5)} = 0,\ a_1^{(5)} = i\sqrt{5},\ a_4^{(5)} = -i\sqrt{5},\ a_{n+5}^{(5)} = a_n^{(5)},\ n \geqslant 0; \tag{58c}$$

Используя рекурентные соотношения (57), несложно найти первые $2N$ полиномов

$$\begin{aligned}
&\varphi_0^{(3)}(x) = 1, && \varphi_1^{(3)}(x) = x - i\sqrt{3},\\
&\varphi_2^{(3)}(x) = x^2 + 2, && \varphi_3^{(3)}(x) = x\varphi_2^{(3)}(x) - \varphi_1^{(3)}(x),\\
&\varphi_4^{(3)}(x) = x^3\varphi_1^{(3)}(x) + 1, && \varphi_5^{(3)}(x) = x^3\varphi_2^{(3)}(x);
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_0^{(4)}(x) = 1, && \varphi_1^{(4)}(x) = x - 2i,\\
&\varphi_2^{(4)}(x) = x^2 - 2ix - 1, && \varphi_3^{(4)}(x) = x^3 + 2x,\\
&\varphi_4^{(4)}(x) = x^4 + x^2 + 2ix + 1, && \varphi_5^{(4)}(x) = x^5 - 2ix^4 + 3x - 2i,\\
&\varphi_6^{(4)}(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 + 2x^2 - 4ix - 1, && \varphi_7^{(4)}(x) = (x^4 + 2)\varphi_3^{(4)}(x);
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_0^{(5)}(x) = 1, && \varphi_1^{(5)}(x) = x,\\
&\varphi_2^{(5)}(x) = x^2 - i\sqrt{5}x - 1, && \varphi_3^{(5)}(x) = x^3 - i\sqrt{5}x^2 - 2x,\\
&\varphi_4^{(5)}(x) = x^4 - i\sqrt{5}x^3 - 3x^2 + i\sqrt{5}x + 1, && \varphi_5^{(5)}(x) = x^5 + x^3 - i\sqrt{5}x^2 - 2x + i\sqrt{5},\\
&\varphi_6^{(5)}(x) = x^6 + x^2 - 1, && \varphi_7^{(5)}(x) = x^7 - i\sqrt{5}x^6 - x^5 + x,\\
&\varphi_8^{(5)}(x) = x^8 - i\sqrt{5}x^7 - 2x^6 + 1, && \varphi_9^{(5)}(x) = x^5\varphi_4^{(5)}(x).
\end{aligned} \tag{61}$$

Из этих равенств и (4) получаем для $P_N(x)$

$$P_3(x) = x^3, \quad P_4(x) = x^4 + 2, \quad P_5(x) = x^5. \tag{62}$$

С учетом (62) соотношения (5) принимают вид ($k = 0, 1, 2$, $m \geqslant 2$)

$$\varphi_{3m+k}^{(3)}(x) = \varphi_{k+3}^{(3)}(x)U_{m-1}(x^3) - \varphi_k^{(3)}(x)U_{m-2}(x^3); \tag{63a}$$

$$\varphi_{4m+k}^{(4)}(x) = \varphi_{k+4}^{(4)}(x)U_{m-1}(x^4 + 2) - \varphi_k^{(4)}(x)U_{m-2}(x^4 + 2); \tag{63b}$$

$$\varphi_{5m+k}^{(5)}(x) = \varphi_{k+5}^{(5)}(x)U_{m-1}(x^5) - \varphi_k^{(5)}(x)U_{m-2}(x^5). \tag{63c}$$

Матрица Якоби $J^{(N)} = \left[j_{j,k}^{(N)}\right]_{j,k=0}^{\infty}$, соответствующая рекуррентным соотношениям (57) имеет вид ($N = 3, 4, 5$)

$$J^{(N)} = B_N\delta_{i+1,k} + A_N\delta_{i,k} + B_N^t\delta_{i-1,k}, \tag{64}$$

где

$$A_3 = \begin{pmatrix} i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & -i\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (65a)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (65b)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i\sqrt{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (65c)$$

Перейдем к вычислению собственных значений матриц $J^{(N)}$, $(N = 3, 4, 5)$, используя критическое уравнение (16).

А. Дискретный спектр матрицы Якоби $J^{(3)}$

Матрица Якоби $J^{(3)}$ определена равенствами (64) и (65a). Из (33), (59), (62), (36), (10a), учитывая, что

$$a_0^{(3)} + a_1^{(3)} + a_2^{(3)} = 0, \qquad a_0^{(3)} a_1^{(3)} + a_1^{(3)} a_2^{(3)} + a_0^{(3)} a_2^{(3)} = 3,$$

получаем для левой части $\Delta_0^{(3)}(\mu)$ уравнения (16) следующее выражение

$$\Delta_0^{(3)}(\mu) = S_0^{(3)}(\mu) - D_0^{(3)}(\mu)\, P_3(\mu) = 3\mu^2(\mu^2 + 2).$$

Тогда уравнение (16) при $N = 3$ принимает вид

$$\mu^2(\mu^2 + 2) = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$\mu_1 = i\sqrt{2}, \quad \mu_2 = -i\sqrt{2}, \quad \mu_{3,4} = 0. \qquad (66)$$

Используя лемму 4, имеем

$$|\mu_1 - a_0| = |i\sqrt{2} - i\sqrt{3}| < 1,$$

что означает, что μ_1 является собственным значением матрицы $J^{(3)}$. Далее,

$$|\mu_2 - a_0| = | - i\sqrt{2} - i\sqrt{3}| > 1,$$

т.е. μ_2 не является собственным значением матрицы $J^{(3)}$. Для $\mu_{3,4}$ вычислим координаты вектора $X_{\mu_3} = X_{\mu_4}$. Они равны

$$\begin{gathered} x_1 = 1,\ x_2 = -i\sqrt{3},\ x_3 = 2,\ x_4 = i\sqrt{3},\ x_5 = 1, \\ x_6 = 0, \quad x_{k+6} = -x_k, \quad \text{при} \quad k \geqslant 0. \end{gathered} \tag{67}$$

Тогда, учитывая, что $\varphi^{(3)}_{k-1}(\mu) = x_k$, при $k = 3, 4$ имеем

$$\left[\left(\varphi^{(3)}_{3n}(\mu_k)\right)^2 + \left(\varphi^{(3)}_{3n+1}(\mu_k)\right)^2 + \left(\varphi^{(3)}_{3n+2}(\mu_k)\right)^2\right] \nrightarrow 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т.е условие (22) невыполнено и, следовательно, $X_{\mu_k} \notin \ell^2$, а значит $\mu_{3,4}$ не являются собственными значениями матрицы $J^{(3)}$.

B. Дискретный спектр матрицы Якоби $J^{(4)}$

Матрица Якоби $J^{(4)}$ определена равенствами (64) и (65b). С учетом (33), (60), (62), (36), (10b) уравнение (16) при $N = 4$ переходит в

$$\mu^4(\mu^2 + 2) = 0. \tag{68}$$

Корни этого уравнения равны

$$\mu_1 = i\sqrt{2}, \quad \mu_2 = -i\sqrt{2}, \quad \mu_{3,4,5,6} = 0.$$

Рассмотрим сначала нулевые корни этого уравнения. Координаты вектора X_{μ_k} $(k = 3, 4, 5, 6)$ равны

$$\begin{gathered} x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{i}{2}, \quad x_3 = -1, \\ x_4 = -\frac{3i}{2}, \quad x_{k+4} = x_k, \quad \text{при} \quad k \geqslant 0. \end{gathered}$$

Тогда частичные суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi^{(4)}_n(\mu_k)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_k^{\,2}$$

равны

$$S_1 = 1,\ s_2 = 1 - \frac{i}{2},\ S_3 = -\frac{i}{2},\ S_4 = -2i, \quad S_{n+4} = S_n - 2i, \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Таким образом последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k^2$ не имеет предела при $n \to \infty$ и ряд расходится. Следовательно $\mu_{3,4,5,6}$ не являются собственными значениями матрицы $J^{(4)}$.

Координаты вектора $X_{\mu_1} = (x_1, x_2, \ldots)^t$ соответствующего критическому числу μ_1 равны

$$x_1 = 1,\ x_2 = i(\sqrt{2}-2),\ x_3 = (2\sqrt{2}-3),\ x_4 = 0, \quad x_{k+4} = (3-2\sqrt{2})x_k, \quad \text{при } k \geqslant 1.$$

Поскольку

$$\|X_{\mu_1}\|^2 = \sqrt{2},$$

то критическое число $\mu_1 = i\sqrt{2}$ является собственным для матрицы Якоби $J^{(4)}$. Нормированный на единицу собственный вектор $Y_{\mu_1} = (y_1, y_2, \ldots)^t$ имеет координаты

$$y_{4k+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(3-2\sqrt{2})^k, \qquad y_{4k+2} = \frac{i(\sqrt{2}-2)}{\sqrt[4]{2}}(3-2\sqrt{2})^k,$$
$$y_{4k+3} = \frac{(2\sqrt{2}-3)}{\sqrt[4]{2}}(3-2\sqrt{2})^k, \qquad y_{4k+4} = 0, \quad k \geqslant 0.$$

Наконец координаты вектора $X_{\mu_2} = (x_1, x_2, \ldots)^t$ соответствующего критическому числу $\mu_2 = -i\sqrt{2}$ равны

$$x_1 = 1,\ x_2 = -i(2+\sqrt{2}),\ x_3 = -(3+2\sqrt{2}),\ x_4 = 0,\ x_{k+4} = (3+2\sqrt{2})x_k, \quad \text{при } k \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\|X_{\mu_2}\|^2 = \infty$$

и критическое число $\mu_2 = -i\sqrt{2}$ не является собственным значение для матрицы Якоби $J^{(4)}$.

C. Дискретный спектр матрицы Якоби $J^{(5)}$

Рассмотрим теперь матрицу Якоби $J^{(5)}$ которая определяется равенствами (64) и (65c). Используя (33), (61), (62), (36), (10c) перепишем уравнение (16) при $N = 5$ в виде

$$\mu^4(\mu^4 - i\sqrt{5}\mu^3 - 3\mu^2 + i\sqrt{5}\mu + 1) = 0. \tag{69}$$

Корни этого уравнения равны

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{4}\left[\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}} + i(1+\sqrt{5})\right],$$
$$\mu_{3,4} = \frac{1}{4}\left[\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}} + i(-1+\sqrt{5})\right], \tag{70}$$
$$\mu_{5,\,6,\,7,\,8} = 0.$$

Используя те же аргументы, что и выше, можно убедиться в том, что при $k=\overline{5;8}$ вектор $X_{\mu_k}\notin \ell^2$, т.е. соответствующие критические значения μ_k не являются собственными значениями матрицы $J^{(5)}$.

Для критического значения $\mu_1 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}} + i(1+\sqrt{5})\right]$ квадраты координат вектора $X_{\mu_1} = (x_1, x_2, \ldots)^t$ равны

$$(x_1)^2 = 1, \quad (x_2)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{i(1+\sqrt{5})}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$(x_3)^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2} + \frac{i(1-\sqrt{5})}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad (x_4)^2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2},$$
$$(x_5)^2 = 0, \qquad (x_{k+5})^2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2}\,(x_k)^2, \quad k\geqslant 1.$$

Тогда $\|X_{\mu_1}\|^2 = 2\sqrt{5}$ и, следовательно, μ_1 есть собственное значение матрицы $J^{(5)}$.

Аналогично, для критического значения

$$\mu_2 = \frac{1}{4}\left[-\sqrt{10-2\sqrt{5}} + i(1+\sqrt{5})\right]$$

квадраты координат вектора X_{μ_2} равны

$$(x_1)^2 = 1, \quad (x_2)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{i(1+\sqrt{5})}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$(x_3)^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2} + \frac{i(\sqrt{5}-1)}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad (x_4)^2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2},$$
$$(x_5)^2 = 0, \qquad (x_{k+5})^2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2}\,(x_k)^2, \quad k\geqslant 1.$$

Следовательно, $\|X_{\mu_2}\|^2 = 2\sqrt{5}$ и μ_2 есть собственное значение матрицы $J^{(5)}$.

Для критического значения $\mu_3 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} + i(\sqrt{5}-1)\right]$ квадраты координат вектора X_{μ_3} равны

$$(x_1)^2 = 1, \quad (x_2)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i(\sqrt{5}-1)}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$(x_3)^2 = -\frac{2+\sqrt{5}}{2} - \frac{i(1+\sqrt{5})}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad (x_4)^2 = -\frac{\sqrt{5}+3}{2},$$

$$(x_5)^2 = 0, \qquad (x_{k+5})^2 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,(x_k)^2, \quad k \geqslant 1.$$

Из этих соотношений следует, что $X_{\mu_3} \notin \ell^2$, и соответствующее критическое значение μ_3 не является собственным для матрицы $J^{(5)}$.

Далее для критического значения $\mu_4 = -\frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - i(\sqrt{5}-1)\right]$ квадраты координат вектора X_{μ_4} равны

$$(x_1)^2 = 1, \quad (x_2)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{i(\sqrt{5}-1)}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$(x_3)^2 = -\frac{2+\sqrt{5}}{2} + \frac{i(1+\sqrt{5})}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad (x_4)^2 = -\frac{\sqrt{5}+3}{2},$$

$$(x_5)^2 = 0, \qquad (x_{k+5})^2 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,(x_k)^2, \quad k \geqslant 1.$$

Из этих соотношений следует, что снова $X_{\mu_4} \notin \ell^2$, и соответствующее критическое значение μ_4 также не являются собственным для матрицы $J^{(5)}$.

Литература

1. M. Kac, P. Van Moerbeke, *On some periodic Toda lattices.* — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. (2nd ed.), **72**, (1975) 1627–1629.
2. Аптекарев А. И. *Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода.* — Мат. Сб. **125(167)**, No. 2(10), (1984) 231–258.
3. W. Van Assche, *Christoffel functions and Tura'n determinants on several intervals.* — J. Comput. and Appl. Math. **48**, No. 1, 2, (1993) 207–223.
4. Д. Барриос, Г. Лопес, Э. Торрано, *Полиномы, порожденные трехчленным рекуррентным соотношением с асимптотически периодическими комплексными коэффициентами.* — Мат. Сб. **186**:5, (1995) 3–34.
5. J. Bazargan, I. Egorova, *Jacobi operator with step-like asymptotically periodic coefficients.* — Mat. Fiz. Anal. Geom., **10**:3, (2003) 425–442.

6. J. Geronimo, W. Van Assche, *Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients.* — J. Approx. Theory **46** (1986), 251–283.
7. J. Gilewicz, E. Leopold, *Zeros of polynomials and recurrence relations with periodic coefficients.* — J. Comput. Appl. Math. **107**:2 (1999), 241–255.
8. C.C. Grosjean, *The measure induced by orthogonal polynomials satisfying a recursion formula with either constant or periodic coefficients.* Part I: *Constant coefficients.* — Med. Konink. Acad. Wetensch. Belgie, **48**:3 (1986), 39–60.
9. P Van Moerbeke, *The spectrum of Jacobi matrices.* — Invent. Math. **37**:1 (1976), 45-81.
10. F. Peherstorfer, *On Bernstein-Szego orthogonal polynomials on several intervals.* II. *Orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients.* — J. Approx. Theory **64**:2, (1991) 123–161.
11. F. Peherstorfer, R. Steinbauer, *Orthogonal polynomials on arcs of the unit circle.* II. *Orthogonal polynomials with periodic reflection coefficients.* — J. Approx. Theory **87**:1, (1996) 60–102.
12. F. Peherstorfer, R. Steinbauer, *Asymptotic Behaviour of Orthogonal Polynomials on the Unit Circle with Asymptotically Periodic Reflection Coefficients.* — J. Approx. Theory **88**:3 (1997), 316–353.
13. A. Almendral Va'zquez, *The Spectrum of a Periodic Complex Jacobi Matrix Revisited.* — J. Approx. Theory **105**:2 (2000), 344–351.
14. B. Beckermann, J. Gilewicz, E. Leopold, *Recurrence relation with periodic coefficients and Chebyshev polynomials.* — Applicationes Mathematicae **23** (1995), 319–323.
15. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *N-симметричные полиномы Чебышева в составной модели обобщенного осциллятора.* — ТМФ **129**, No. 2 (2011), 229–240.
16. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Составная модель обобщенного осциллятора. I* . — Зап. научн. семин. ПОМИ, **374** (2010), 58–81.
17. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Connection between representations of nonstandard and standard Chebyshev oscillators.* — Day on Diffraction (2010), 28–34.
18. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *The differential equation for generalized parametric Chebyshev polynomials.* — Day on Diffraction (2012).
19. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский,*Дифференциальные уравнения для простейших 3-симметричных полиномов Чебышева.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **398** (2012), 64–86.

Borzov V. V., Damaskinsky E. V. The discrete spectrum of Jacobi matrix related to recurrence relations with periodic coefficients.

In this note we investigate the discrete spectrum of Jacobi matrix corresponding to polynomials defined by recurrence relations with periodic coefficients. As examples we consider

a) the case when period N of coefficients of recurrence relations equals three (as a particular case we consider "parametric" Chebyshev polynomials introduced by authors early);

b) the elementary N-symmetrical Chebyshev polynomials ($N = 3, 4, 5$), that was introduced by authors in the study of the “composite model of generalized oscillator”.

С.-Петербургский университет
телекоммуникаций 191186 Санкт-Петербург,
наб. реки Мойки, 61,
Военный институт (инженерно технический)
191123, СПб, Захарьевская ул., 22
E-mail: borzov.vadim@yandex.ru, evd@pdmi.ras.ru

Поступило 11 марта 2015 г.