Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 433, 2015 г.

Т. А. Болохов

РАСШИРЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ВЕКТОРНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Петру Петровичу Кулишу
в связи с его семидесятилетием

Введение

Квадратичная форма оператора Лапласа, действующего на поперечные компоненты векторного поля

$$Q_0(\vec{f}) = (\vec{f}, \Delta\vec{f}) = -\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \overline{f^k}\frac{\partial^2 f^k}{\partial x_j^2} d^3x, \quad \vec{\partial}\cdot\vec{f} = \sum_k \frac{\partial f^k}{\partial x_k} = 0 \qquad (1)$$

появляется в электродинамике как функционал потенциальной энергии в кулоновской калибровке. Теорема Фридрихса–Стоуна [1] сопоставляет каждой замкнутой полуограниченной квадратичной форме в Гильбертовом пространстве самосопряженный оператор. То есть, для того чтобы определить оператор (а с ним и спектральное разложение, которое определяет динамику теории), необходимо, во-первых, зафиксировать скалярное произведение, а во-вторых, описать плотное подпространство на котором задана форма. Это неоднозначные действия, которые требуют привлечения дополнительных сведений о физических свойствах модели (например, мы можем включить часть скалярного произведения в определение оператора и наоборот).

Даже при фиксированном скалярном произведении может получиться так, что формальный оператор квадратичной формы симметричен, но не самосопряжен. Тогда (с учетом полуограниченности) самосопряженным расширениям этого оператора будут соответствовать

Ключевые слова: самосопряженные расширения симметрических операторов, полуограниченные квадратичные формы, оператор Лапласа, поперечное подпространство.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 14-01-00341 и 15-01-03148, а также программой РАН “Математические проблемы нелинейной динамики”.

замкнутые расширения исходной квадратичной формы. То есть, даже определив скалярное произведение и задав квадратичную форму на плотном подпространстве, может оказаться так, что эту форму можно расширить (задать новую форму на более широком подпространстве таким образом, что на исходном подпространстве расширение и исходная форма будут действовать одинаково). Примером такой ситуации является квадратичная форма скалярного лапласиана в трехмерном (или двумерном) пространстве

$$Q_0(f) = (f, \Delta f) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^{3} \overline{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} d^3x.$$

В “обычном” скалярном произведении

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x}) d^3x$$

в сферических координатах, оператор, действующий в s-подпространстве (подпространстве соответствующему нулевой величине орбитального момента) оказывается симметрическим оператором с индексами дефекта $(1, 1)$, а квадратичная форма $Q_0(f)$ может быть расширена на пространство функций имеющих в нуле сингулярность порядка $|x|^{-1}$.

С квадратичной формой (1) дело обстоит по-другому. После параметризации векторного поля оказывается, что действие квадратичной формы на одну из двух компонент задается дифференциальным оператором четвертого порядка. В подпространствах, соответствующих орбитальным моментам 1 и 2, такие операторы имеют индексы дефекта $(1, 1)$. Мы построим самосопряженные расширения этих операторов, опишем их спектр и приведем формулу для расширений квадратичной формы. Эти расширения замкнуты относительно “естественного” скалярного произведения в пространстве параметризующих функций, которое при переносе в $\mathbb{R}^3$, конечно, будет отличаться от произведения

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{f}(\vec{x})} \cdot \vec{g}(\vec{x}) d^3x. \tag{2}$$

Тем не менее, это произведение локально (по радиальной координате) и вполне возможно, в некоторых случаях отражает физическую картину какой-либо модели. Кроме того, при значении орбитального момента $l = 1$ функции из области определения расширенной квадратичной формы оказываются конечными и в скалярном произведении (2).

Работа построена следующим образом. В первой части в качестве примера описываются классические результаты по построению расширений квадратичной формы скалярного оператора Лапласа. Во второй, третей и четвертой частях вводятся базис векторных сферических функций, параметризация поперечного подпространства и выводится выражения операторов квадратичной формы, действующих на параметризующие функции. В пятой части исследуются индексы дефекта полученных симметричных операторов. В частях 6, 7, 8, 9 строятся расширения симметричных операторов и исследуется их спектр. В десятой части вычисляется нормировка собственных функций, в части 11 приводятся выражения для ядер резольвент и обратных операторов, а в заключительной части строятся формальные выражения для расширений квадратичной формы и скалярного произведения.

§1. Скалярный лапласиан

Скалярный оператор Лапласа действует в пространстве два раза дифференцируемых функций трех переменных по правилу

$$\Delta : \quad f(\vec{x}) \to \Delta f(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

При переходе к сферическим координатам

$$\vec{x} = \vec{x}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix},$$
$$0 \leqslant r, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

скалярный оператор Лапласа приобретает вид

$$\Delta f(\vec{x}(r,\theta,\varphi)) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}f - \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)f.$$

Стандартная процедура разделения переменных

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{0\leqslant|m|\leqslant l} f_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{3}$$

позволяет переписать действие оператора Лапласа в виде

$$\Delta f = \sum_{0\leqslant|m|\leqslant l}\Big(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l(l+1)}{r^2}\Big)f_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{4}$$

где $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ – это сферические гармоники

$$\Delta_\Omega Y_{lm} = -\frac{1}{\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{Y_{l'm'}(\Omega)}Y_{lm}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Так как приведенные далее формулы не будут зависеть от конкретного вида параметризации точки на сфере $\mathbb{S}^2$ через углы θ,φ, мы для упрощения записи заменили переменные θ,φ на общую координату на сфере Ω. Здесь важен лишь факт полноты набора $Y_{lm}(\Omega)$, то есть, что любую достаточно гладкую функцию можно однозначно представить в виде суммы (3). Таким образом, действие оператора Лапласа сводится к действию операторов

$$\tau_l:\quad f_l(r)\to-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}f_l(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}f_l(r) \tag{5}$$

на пространстве дифференцируемых функций заданных на положительной полуоси со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_0^\infty\overline{f(r)}g(r)r^2dr.$$

При помощи функциональной замены $f_l=\frac{u_l}{r}$ операторы τ_l преобразуются в операторы

$$T_l:\quad u_l\to-\frac{d^2}{dr^2}u_l+\frac{l(l+1)}{r^2}u_l, \tag{6}$$

а скалярное произведение переходит в

$$(v,u) = \int\limits_0^\infty\overline{v(r)}u(r)dr. \tag{7}$$

1.1. Самосопряженность радиальных операторов. Операторы T_l, заданные на пространстве два раза дифференцируемых функций, исчезающих в нуле вместе с производной

$$\mathcal{W}_0^2 = \bigl\{u:\ (u,u) < \infty,\, (u'',u'') < \infty,\, u(0) = u'(0) = 0\bigr\},$$

при $l > 0$ самосопряжены в существенном. В то же время, оператор T_0 (далее будем обозначать его просто T) имеет индексы дефекта $(1,1)$. Действительно, если T задан на $\mathcal{W}_0^2$, то функции

$$g_\pm = \exp\{e^{\mp i\frac{3\pi}{4}}\rho r\}$$

образуют ядра сопряженных операторов $(T \mp i\rho^2)^*$, так как являются единственными квадратично интегрируемыми решениями уравнений

$$\frac{d^2 g_\pm}{dr^2} = \pm i\rho^2 g_\pm. \tag{8}$$

Так как T – это размерный оператор, его спекр – это множество размерных величин, то для того чтобы приравнять друг к другу левую и правую части в этом уравнении мы ввели размерный параметр ρ: $[\rho] = [r]^{-1}$. Выбор ρ в каком-то смысле аналогичен выбору точки перенормировки, с тем, чтобы далее через нее выражать размерный параметр задачи.

1.2. Расширения симметрического оператора T. Пользуясь симметричностью оператора T, между образами

$$\mathrm{Ran}_\pm = \{g = (T \mp i\rho^2)u :\ \ u \in \mathcal{W}_0^2\}$$

можно построить изометрию U (преобразование Кэли), действующую по правилу

$$U:\quad t = (T + i\rho^2)u \to Ut = (T - i\rho^2)u.$$

Линейные оболочки векторов $g_\pm$ по определению ядра сопряженного оператора являются единственными ортогональными дополнениями к соответствующим образам $\mathrm{Ran}_\pm$, следовательно изометрию U можно продолжить на все пространство до унитарного оператора U_a, задав ее на g_+ таким образом, что

$$U_a e^{ia} g_+ = e^{-ia} g_-, \quad 0 \leqslant a < \pi,$$

где e^{2ia} – унитарный параметр. Унитарный оператор U_a является преобразованием Кэли самосопряженного расширения T_a исходного симметрического оператора T. Это расширение задано на области определения $\mathcal{W}_a^2$, которая включает в себя функцию h^a, такую, что

$$(T_a - i\rho^2)h^a = e^{ia}g_+,$$
$$(T_a + i\rho^2)h^a = e^{-ia}g_-$$

и при этом

$$\mathcal{W}_a^2 = \mathcal{W}_0^2 \dotplus \{\alpha h^a, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Несложно увидеть, что h^a может быть предсталена как линейная комбинация g_+ и g_-

$$h^a = \frac{e^{ia}}{2i\rho^2}g_+ - \frac{e^{-ia}}{2i\rho^2}g_- = \frac{1}{2i\rho^2}\big(\exp\{ia + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\rho r\} - \exp\{-ia + e^{i\frac{3\pi}{4}}\rho r\}\big).$$

1.3. Граничные условия. Оператор второй производной является симметрическим на таком линейном множестве функций, где зануляются граничные слагаемые

$$\int\limits_0^\infty \overline{v''}u dr - \int\limits_0^\infty \overline{v}u'' dr = (\overline{v'}u - \overline{v}u')|_0^\infty = \overline{v}(0)u'(0) - \overline{v'}(0)u(0)$$

(здесь пределы на бесконечности исчезают вследствии убывания u, v). Построенный выше элемент h^a определяет связь между значением функции из пространства $\mathcal{W}_a^2$ в нуле и значением ее производной, таким образом, чтобы оператор T_a был симметрическим:

$$\mathcal{W}_a^2 = \{u : (u,u) < \infty,\ (u'', u'') < \infty,\ \rho\sin(a - \frac{\pi}{4})\, u(0) + \sin a\, u'(0) = 0\}.$$

Самосопряженность в существенном оператора T_a на этом пространстве (индексы дефекта $(0,0)$) следует из построения.

1.4. Собственные векторы. При некоторых значениях параметра a у оператора T_a появляются собственные значения (дискретный спектр). Рассмотрим экспоненциальную функцию

$$v_\kappa(r) = e^{-\kappa r}, \quad \kappa > 0,$$

которая удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d^2 v_\kappa}{dr^2} = -\kappa^2 v_\kappa.$$

Эта функция попадает в область $\mathcal{W}_a^2$ если выполнено условие
$$\rho \sin(a - \frac{\pi}{4})\, v_\kappa(0) = -\sin a\, v'_\kappa(0),$$
которое связывает κ с параметрами a и ρ
$$\kappa = \rho \frac{\sin(a - \pi/4)}{\sin a}.$$
Когда параметр a меняется от 0 до π, правая часть в этом выражение по одному разу пробегает все значения на вещественной оси. Для того, чтобы параметр κ был положительным, необходимо чтобы было выполнено условие
$$\frac{\pi}{4} < a < \pi.$$
При остальных значениях a дискретный спектр у T_a отсутствует. Однократный непрерывный спектр оператора T_a занимает всю отрицательную полуось, мы не будем на нем останавливаться, подробности см., например, в [2].

1.5. Квадратичные формы. По теореме Фридрихса–Стоуна [1] каждому полуограниченному самосопряженному оператору T_a соответствует замкнутая полуограниченная квадратичная форма Q_a, действующая по правилу
$$Q_a(u) = (u, T_a u), \quad u \in \mathcal{W}_a^2.$$
Такая квадратичная форма определяется сначала на области $\mathcal{W}_a^2$, а потом, вследствии замкнутости, продолжается до некоторого подпространства $\mathcal{W}_{(a)}^1$. Теорема Фридрихса утверждает, что среди всех расширений симметрического оператора T (в данном случае с индексами дефекта $(1,1)$) есть выделенное (максимальное) расширение, квадратичная форма которого получается замыканием квадратичной формы T:
$$Q_0(u) = (u, Tu), \quad u \in \mathcal{W}_0^2.$$
В нашем случае этому расширению (по Фридрихсу) соответствует значение $a = 0$, а область определения квадратичной формы Q_0 включает в себя только функции исчезающие в нуле:
$$\mathcal{W}_0^1 = \{u : \ (u,u) < \infty,\, (u',u') < \infty,\, u(0) = 0\}.$$
Всем остальным расширениям соответствуют квадратичные формы заданные на одном и том же пространстве
$$\mathcal{W}_{(a)}^1 = \mathcal{W}_1^1 = \{u : \ (u,u) < \infty,\, (u',u') < \infty\}$$

и действующие следующим образом

$$Q_a(u) = -\kappa(a)|u(0)|^2 + \int\limits_0^\infty |u'(r)|^2 dr$$

(эта формула наглядно демонстрирует, что расширение по Фридрихсу, соответствующее значению $\kappa = -\infty$, среди всех форм Q_a полуограниченных снизу является *максимальной* формой). При этом для квадратичных форм Q_0 и Q_a выполнено условие вложенности $Q_0 \subset Q_a$:

$$\mathcal{W}_0^1 \subset \mathcal{W}_{(a)}^1, \quad Q_a(u) = Q_0(u), \quad u \in \mathcal{W}_0^1$$

(в общем случае структура подпространств квадратичных форм самосопряженных расширений полуограниченного симметрического оператора описывается теоремой Крейна [3]).

Таким образом, мы получаем соответствие между множеством самосопряженных расширений T_a, $a \neq 0$ действующих одинаково, но на разных подпространствах и множеством квадратичных форм Q_a, определенных на одном подпространстве, но действующих по-разному.

Применительно к квадратичной форме Лапласиана в трехмерном пространстве (1), рассмотренные выше формулы означают, что если замыкать эту форму, начиная с пространства функций исчезающих в нуле, то мы получим квадратичную форму на пространстве ограниченных функций. Этой форме будет соответствовать самосопряженный оператор заданный на пространстве два раза дифференцируемых ограниченных функций ("обычный" самосопряженный оператор Лапласа). Но, в то же время, исходную квадратичную форму можно расширить до замкнутой формы $Q_a^\Delta(f)$, действующей на пространстве функций, расходящихся в нуле как r^{-1}:

$$\begin{aligned} Q_a^\Delta(f) &= \lim_{r\to 0}\Big(\sum_j \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_r} \Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|^2 d^3\vec{x} - \Big(\kappa(a) + \frac{1}{r}\Big) \int\limits_{\partial B_r} |f(\vec{x})|^2 d^2 s\Big) \\ &= \sum_{0\leqslant|m|\leqslant l} \int \Big(\Big|\frac{df_{lm}}{dr}\Big|^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}|f_{lm}|^2\Big) r^2 dr \\ &\qquad\qquad - \kappa(a) \lim_{r\to 0} \int\limits_{\mathbb{S}^2} |f(r,\Omega)|^2 r^2 d\Omega, \end{aligned} \tag{9}$$

где B_r – это шар радиуса r с центром в начале координат. Перенормировка и теория рассеяния, соответствующие таким расширениям впервые были описаны в работе [4].

§2. Векторный лапласиан

Перейдем теперь к описанию векторного оператора Лапласа. Этот оператор действует на векторные поля $\vec{f}(\vec{x})$, одинаково на каждую из трех компонент:

$$\Delta\vec{f}(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\vec{f}(\vec{x}) = \frac{1}{r^2}\Big(-\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \Delta_\Omega\Big)\vec{f}(\vec{x}(r,\Omega)).$$

Естественно предположить, что индексы дефекта симметрического оператора, определенного на пространстве гладких функций исчезающих в некоторой окрестности нуля, равны числу компонент векторного поля $\vec{f}$, то есть трем.

Теперь вместо скалярных сферических функций Y_{lm} введем три векторные сферические гармоники (VSH) [6]:

$$\vec{\Upsilon}_{lm} = \frac{\vec{x}}{r}Y_{lm}, \quad 0 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \tag{10}$$

$$\vec{\Psi}_{lm} = (l(l+1))^{-1/2}r\vec{\partial}Y_{lm}, \quad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \tag{11}$$

$$\vec{\Phi}_{lm} = (l(l+1))^{-1/2}(\vec{x}\times\vec{\partial})Y_{lm}, \quad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l. \tag{12}$$

Несмотря на то, что в определение VSH входит переменная r, несложно увидеть, что функции $\vec{\Upsilon}$, $\vec{\Psi}$ и $\vec{\Phi}$ зависят только от углов Ω. Векторные сферические гармоники, определенные как (10)–(12), при интегрировании по углам Ω ортогональны друг другу и нормированы на единицу:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Upsilon}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Векторные сферические гармоники позволяют написать однозначное представление векторной функции $\vec{f}(\vec{x})$ в виде

$$\vec{f}(\vec{x}) = y_{00}(r)\vec{\Upsilon}_{00} + \sum_{1\leqslant|m|\leqslant l} \bigl(y_{lm}(r)\vec{\Upsilon}_{lm} + \psi_{lm}(r)\vec{\Psi}_{lm} + \phi_{lm}(r)\vec{\Phi}_{lm}\bigr). \tag{13}$$

Для каждой компоненты этого разложения при действии оператора Δ имеет место разделение переменных

$$\Delta\bigl(z(r)\vec{Z}_{lm}\bigr) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}z(r)\vec{Z}_{lm} + \frac{z(r)}{r^2}\Delta_\Omega \vec{Z}_{lm}, \quad \vec{Z} = \vec{\Upsilon}, \vec{\Psi}, \vec{\Phi}.$$

Действие оператора Δ_Ω на VSH недиагонально (при $l \geqslant 1$), но при нормировке (10)–(12) оказывается симметричным:

$$\begin{aligned}
\Delta_\Omega \vec{\Upsilon}_{lm} &= (2 + l(l+1))\vec{\Upsilon}_{lm} - 2\sqrt{l(l+1)}\vec{\Psi}_{lm},\\
\Delta_\Omega \vec{\Psi}_{lm} &= -2\sqrt{l(l+1)}\vec{\Upsilon}_{lm} + l(l+1)\vec{\Psi}_{lm},\\
\Delta_\Omega \vec{\Phi}_{lm} &= l(l+1)\vec{\Phi}_{lm}
\end{aligned}$$

(отметим, что эта же формула верна и при $l = 0$ для компоненты $\vec{\Upsilon}_{00}$). Замена базиса

$$\begin{pmatrix}\vec{\Upsilon}_{lm}\\ \vec{\Psi}_{lm}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{\varUpsilon}_{lm} = (2l+1)^{-1/2}(\sqrt{l}\vec{\Upsilon}_{lm} + \sqrt{l+1}\vec{\Psi}_{lm})\\ \vec{\varPsi}_{lm} = (2l+1)^{-1/2}(-\sqrt{l+1}\vec{\Upsilon}_{lm} + \sqrt{l}\vec{\Psi}_{lm})\end{pmatrix} \tag{14}$$

диагонализует действие оператора Δ_Ω:

$$\begin{aligned}
\Delta_\Omega \vec{\varUpsilon}_{lm} &= (l-1)l\vec{\varUpsilon}_{lm},\\
\Delta_\Omega \vec{\varPsi}_{lm} &= (l+1)(l+2)\vec{\varPsi}_{lm}.
\end{aligned}$$

Здесь можно заметить, что при $l = 1$ действие векторного оператора Лапласа на подпространстве компоненты $\vec{\varUpsilon}_{1m}$ совпадает с действием скалярного лапласиана на подпространстве сферически симметричных гармоник (5)

$$\Delta\bigl(y(r)\vec{\varUpsilon}_{1m}\bigr) = -r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}y(r)\vec{\varUpsilon}_{1m}, \quad m = -1, 0, 1.$$

И, таким образом, векторный лапласиан, определенный на гладких функциях исчезающих в окрестности нуля и в базисе (10)–(12) имеет индекс дефекта равный 3. Но в базисе VSH этот индекс определяется количеством значений индекса m при $l = 1$, а не числом компонент векторного поля.

Последнее утверждение было небольшим упражнением, далее мы не будем пользоваться заменой (14) и перейдем к описание поперечного подпространства.

§3. Поперечное подпространство

Определим поперечное подпространство как линейное множество векторных функций удовлетворяющих условию

$$\vec{\partial} \cdot \vec{f}(\vec{x}) \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^j} f^j(\vec{x}) = 0. \tag{15}$$

Несложно увидеть, что любое произведение гармоники $\vec{\Phi}_{lm}$ с радиальной функцией поперечно:

$$\begin{aligned}
&\vec{\partial} \cdot \big(\phi(r)\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)\big) = \vec{\partial}\phi(r) \cdot \vec{\Phi}_{lm} + \phi(r)\vec{\partial} \cdot \vec{\Phi}_{lm} \\
&\quad = (l(l+1))^{-1/2}\big(\phi'(r)r^{-1}\vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{\partial})Y_{lm} + \phi(r)\vec{\partial} \cdot (\vec{x} \times \vec{\partial})Y_{lm}\big) = 0,
\end{aligned}$$

так как

$$\vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{\partial}) = 0, \quad \vec{\partial} \cdot (\vec{x} \times \vec{\partial}) = 0.$$

Действие оператора Δ, также как и его квадратичная форма, на подпространстве функций "пропорциональных" $\vec{\Phi}_{lm}$ очевидно совпадают с действием и квадратичной формой скалярного сферического оператора Лапласа (4) при $l \geqslant 1$. Этот оператор самосопряжен в существенном на подпрострастваx соответсвующих всем l, мы не будем на нем останавливаться и перейдем к описанию второй части поперечного подпространства.

Первые две суммы разложения (13) по отдельности не поперечны, но при определенном выборе коэффициентных функций

$$y_{lm}(r) = \sqrt{l(l+1)}\frac{u_{lm}(r)}{r^2}, \tag{16}$$

$$\psi_{lm}(r) = \frac{u'_{lm}(r)}{r} \tag{17}$$

каждый вклад вида $y_{lm}\vec{\Upsilon}_{lm} + \psi_{lm}\vec{\Psi}_{lm}$ становится таковым:

$$\begin{aligned}
&\vec{\partial}\cdot\big(\sqrt{l(l+1)}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big)\\
&\quad=\sqrt{l(l+1)}Y_{lm}\bigg(\Big(\frac{u'_{lm}}{r^2}-\frac{2u_{lm}}{r^3}\Big)\frac{\vec{x}}{r}\cdot\frac{\vec{x}}{r}+\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\partial}\cdot\frac{\vec{x}}{r}\bigg)\\
&\qquad+1/\sqrt{l(l+1)}u'_{lm}\vec{\partial}\cdot\vec{\partial}Y_{lm}=0.
\end{aligned}\tag{18}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\vec{x}\cdot\vec{\partial}Y_{lm}(\Omega)=0,\quad \vec{\partial}\cdot\frac{\vec{x}}{r}=\frac{2}{r},\quad \vec{\partial}\cdot\vec{\partial}Y_{lm}=-\frac{l(l+1)}{r^2}Y_{lm}.$$

Равенство (18) также сразу следует из соотношения

$$\sqrt{l(l+1)}\frac{u}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{u'}{r}\vec{\Psi}_{lm}=\vec{\partial}\times\frac{u}{r}\vec{\Phi}_{lm},$$

которое, однако, требует отдельной выкладки.

Теперь будем считать, что функции u_{lm} принадлежат линейному множеству много раз дифференцируемых функций быстро убывающих в нуле (вместе с производными), которое мы обозначим как $\mathcal{S}_l^0$. Параметризация (16)–(17), конечно, не является единственно возможной, мы выбрали ее таким образом, чтобы в дальнейшем получить объекты аналогичные (6). Вычисление действия оператора Лапласа на рассмтариваемые поперечные слагаемые

$$\begin{aligned}
&\Delta\Big(\sqrt{l(l+1)}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\Big)\\
&=\sqrt{l(l+1)}\frac{1}{r^2}\Big(-u''_{lm}+\frac{l(l+1)}{r^2}u_{lm}\Big)\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{1}{r}\Big(-u''_{lm}+\frac{l(l+1)}{r^2}u_{lm}\Big)'\vec{\Psi}_{lm}
\end{aligned}$$

показывает, что, во-первых, подпространство поперечных функций, параметризуемых функциями u_{lm} из $\mathcal{S}_l^0$

$$\mathcal{D}_{lm}=\Big\{\sqrt{l(l+1)}\frac{u_{lm}(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)+\frac{u'_{lm}(r)}{r}\vec{\Psi}_{lm}(\Omega),\quad u_{lm}\in\mathcal{S}_l^0\Big\},$$

является инвариантным подпространством для Δ, а во-вторых, лапласиан действует на сами функции u_{lm} как дифференциальный оператор второго порядка:

$$\Delta:\quad u_{lm}\to T_l u_{lm}=-\frac{d^2}{dr^2}u_{lm}+\frac{l(l+1)}{r^2}u_{lm}.\tag{19}$$

Скалярное произведение (2) в исходном трехмерном пространстве векторных функций, суженное на $\mathcal{D}_{lm}$, естественно переносится в полуторалинейную форму на $\mathcal{S}_l^0$:

$$\begin{aligned}
&\int \overline{\vec{f}_v(\vec{x})}\vec{f}_u(\vec{x})d^3x \\
&= \int \Big(\sqrt{l(l+1)}\frac{\overline{v_{lm}}}{r^2}\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}} + \frac{\overline{v'_{lm}}}{r}\overline{\vec{\Psi}_{lm}}\Big)\cdot\Big(\sqrt{l(l+1)}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\Big) \qquad (20)\\
&\qquad \times r^2 dr d\Omega = \int \big(\overline{v'_{lm}}u'_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2}\overline{v_{lm}}u_{lm}\big)dr \equiv \langle v, u\rangle_l.
\end{aligned}$$

§4. Оператор квадратичной формы

Мы не будем пытаться выяснить, позволяет ли скалярное произведение, полученное из полуторалинейной формы (20), построить замкнутый оператор из T_l и замкнутую квадратиную форму, такую, что

$$(\vec{f}_u, \Delta\vec{f}_u) = \langle u, T_l u\rangle_l, \quad l \geqslant 1. \tag{21}$$

Вместо этого попробуем решить несколько более общую задачу, а именно, исследовать эту квадратичную форму в скалярном произведении (7). Такая задача воспроизводит расширения формы (21) в пространстве с произведением (20) при $l = 1$, а при $l = 2$ позволяет построить дополнительные расширения, которые также могут быть интересны с точки зрения физики. Как уже было сказано выше, мотивировкой для этого служит то обстоятельство, что физика процессов, описываемых квадратичной формой поперечного лапласиана, возможно не требует ограниченности состояний относительно нормы (20).

С помощью интегрирования по частям можно увидеть, что для $u, v \in \mathcal{S}_l^0$ выполнено равенство

$$\begin{aligned}
&\langle v, T_l u\rangle_l \\
&= \int_0^\infty \Big(\frac{d\bar{v}}{dr}\frac{d}{dr}\big(-\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}u\big) + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{v}\big(-\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}u\big)\Big)dr \\
&= \int_0^\infty \Big(-\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{v}\Big)\Big(-\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}u\Big)dr = (T_l v, T_l u) \qquad (22)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \bar{v}\Big(-\frac{d^2}{dr^2}\Big(-\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}u\Big) + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big(-\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}u\Big)\Big)dr$$

$$= (v, T_l^2 u),$$

то есть рассматриваемая квадратичная форма $\langle u, T_l u\rangle_l$ в скалярном произведении (7) задается дифференциальным оператором четвертого порядка

$$T_l^2 = \Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)^2.$$

4.1. Альтернативная запись квадратичной формы. Для полноты картины приведем альтернативную интерпретацию возможности расширения квадратичной формы (21) при $l = 1$ в пространстве со скалярным произведением (20). Пусть E_l – дифференциальная операция

$$E_l u = r^{-l}\frac{d}{dr}(r^l u),$$

дествующая на функции из $\mathcal{S}_l^0$. Сопряженная (в смысле интегрирования по частям) к ней линейная операция E_l^* имеет вид

$$E_l^* u = -r^l \frac{d}{dr}(r^{-l}u),$$

а произведения E_l и E_l^* совпадают с действиями дифференциальных операций второго порядка T_l и T_{l-1}:

$$E_l^* E_l u = -\, r^l \frac{d}{dr} r^{-2l} \frac{d}{dr}(r^l u) = T_l$$

$$E_l E_l^* = -\, r^{-l}\frac{d}{dr} r^{2l}\frac{d}{dr}(r^{-l}u) = T_{-l}u = T_{l-1}u.$$

Для $u, v \in \mathcal{S}_l^0$ полуторалинейная форма (20) равна

$$\langle u, v\rangle_l = (E_l u, E_l v),$$

а форма (22) от оператора T_l принимает вид

$$\langle u, T_l v\rangle_l = (E_l u, E_l T_l v) = (E_l u, E_l E_l^* E_l v).$$

Линейная замена

$$u \to \psi_u = E_l u = r^{-l}\frac{d}{dr}(r^l u(r))$$

имеет нулевое ядро на $\mathcal{S}_l^0$ и переводит полуторалинейную форму (20) в (7)

$$\langle u, v\rangle_l = (\psi_u, \psi_v),$$

а квадратичная форма (21) преобразуется следующим образом

$$\langle u, T_l v\rangle_l = (E_l u, E_l E_l^* E_l v) = (\psi_u, E_l E_l^* \psi_u) = (\psi_u, T_{l-1}\psi_u). \tag{23}$$

То есть задача об исследовании квадратичной формы оератора T_l в пространстве с произведением (20) сводится к построению расширений квадратичных форм операторов T_{l-1}, $l \geqslant 1$ в обычном скалярном произведении (7). Эти операторы, как было описано выше, самосопряжены в существенном при $l > 1$ и имеют индексы дефекта $(1,1)$ при $l = 1$.

§5. Индексы дефекта оператора T_l^2

Решения уравнения

$$-\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} g = \lambda g$$

совпадают, с точностью до умножения на r, со сферическими функциями Бесселя. Поэтому для исследования свойств оператора T_l^2 приведем некоторые соотношения из этой области.

5.1. Свойства сферических функций Бесселя. Пусть D_l – линейная дифференциальная операция, действующая следующим образом:

$$D_l w(r) = r^{l+1}\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^l \frac{w}{r} = r^l \Big(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\Big)^l w, \tag{24}$$

тогда, с помощью метода математической индукции, можно вывести равенство

$$T_l D_l w(r) = D_l T_0 w(r) = -D_l \frac{d^2 w}{dr^2}. \tag{25}$$

Таким образом, собственные функции оператора T_l^2 могут быть построены из собственных функций оператора

$$T_0^2 = \frac{d^4}{dx^4}.$$

Поведение функций вида (24) в окрестности нуля описывается следующими соотношениями. Пусть

$$w(r) = r^k,$$

тогда

$$D_l w(r) = (k-2l+1)\dots(k-1)r^{k-l}.$$

Следовательно, если при $r \to 0$

$$w(r) = w_0 + w_1 r + \ldots + w_5 r^5 + \mathcal{O}(r^6),$$

то

$$D_1 w(r) = -\frac{w_0}{r} + w_2 r + 2w_3 r^2 + 3w_4 r^3 + \mathcal{O}(r^4), \tag{26}$$

$$D_2 w(r) = \frac{3w_0}{r^2} - w_2 + 3w_4 r^2 + 8w_5 r^3 + \mathcal{O}(r^4), \tag{27}$$

то есть операция D_l понижает степень функции в окрестности нуля на l, но при этом l коэффициентов обнуляются. Это также означает, что в общем случае нужно отдельно проверять, что после применения операции D_l к набору линейно независимых функций, получающийся набор остается линейно независимым. Для экспонент с разными периодами, которые возникнут далее, это свойство очевидно, поэтому мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе.

5.2. Метод Фробениуса. Для оценки индексов дефекта симметрического оператора T_l, то есть размерностей подпространств квадратично интегрируемых решений уравнения

$$\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big) g = \pm i\tilde{\rho}^2 g \tag{28}$$

используется метод Фробениуса (см., например, [7]) для разложения $g(r)$ в окрестности особой точки (в данном случае в окрестности нуля). Для дифференциального оператора второго порядка T_l этот метод эквивалентен поиску решения уравнения на α

$$-\frac{d^2 r^\alpha}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} r^\alpha = 0 \tag{29}$$

и дает два возможных решения с оценками

$$g_1(r) \overset{r\to 0}{\sim} r^{l+1}, \quad g_2(r) \overset{r\to 0}{\sim} r^{-l}.$$

Первое решение регулярно в нуле, но при $\mathrm{Re}\tilde{\rho}^2 > 0$ экспоненциально растет на бесконечности, второе, наоборот, быстро убывает на бесконечности, но при $l > 0$ расходится в нуле. С помощью несложной модификации метода Фробениуса можно увидеть, что два из четырех решений уравнения

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{r^2}\right)^2 g = \pm i\rho^4 g \tag{30}$$

имеют такое же поведение в нуле и на бесконечности, как и решения уравнения (28) (точнее они совпадают с решениями (28) при замене $i\rho^4 = \tilde{\rho}^4$), а два других имеют в окрестности нуля степени на 2 больше

$$g_3(r) \overset{r\to 0}{\sim} r^{l+3}, \quad g_4(r) \overset{r\to 0}{\sim} r^{-l+2}$$

(в этом случае первый оператор T_l понижает степень на 2, а второй решает уравнение (29)). Решения g_1 и g_3 экспоненциально растут на бесконечности, g_2 не интегрируемо с квадратом в нуле при $l \geqslant 1$, а вот решение g_4 удовлетворяет условию интегрируемости с квадратом, если $l = 1, 2$. Таким образом, мы можем ожидать, что симметрический полуограниченный оператор T_l^2 имеет индексы дефекта $(1,1)$ при $l = 1, 2$.

5.3. Решения дифференциальных уранений. Построим решения уравнения (30) в явном виде. Для этого, воспользовавшись формулой (25) для

$$w = \exp\{e^{\pm i\frac{\pi}{8}\pm i\frac{\pi k}{2}}\rho r\}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

получаем

$$\begin{aligned} T_l^2 D_l \exp\{e^{\pm i\frac{\pi}{8}\pm i\frac{\pi k}{2}}\rho r\} &= D_l T_0^2 \exp\{e^{\pm i\frac{\pi}{8}\pm i\frac{\pi k}{2}}\rho r\} \\ &= \pm i\rho^4 D_l \exp\{e^{\pm i\frac{\pi}{8}\pm i\frac{\pi k}{2}}\rho r\}. \end{aligned}$$

Функции $D_l \exp\{e^{\pm i\frac{\pi}{8}\pm i\frac{\pi k}{2}}\rho r\}$ экспоненциально растут на бесконечности при $k = 0, 3$ и убывают при $k = 1, 2$. Но во втором случае асимптотики (26), (27) показывают, что в двумерной линейной оболочке этих функций квадратично интегрируемым в нуле будет только одномерное подпространство пропорциональное их разности (только в этом случае исчезает коэффициент w_0).

Таким образом, мы видим, что пространства квадратично интегрируемых решений уравнения (30) одномерны и порождаются функциями

$$\begin{aligned} g_{l+} &= D_l\left(\exp\{e^{i\frac{5\pi}{8}}\rho r\} - \exp\{e^{i\frac{9\pi}{8}}\rho r\}\right), \\ g_{l-} &= D_l\left(\exp\{e^{i\frac{7\pi}{8}}\rho r\} - \exp\{e^{i\frac{11\pi}{8}}\rho r\}\right). \end{aligned}$$

§6. Преобразование Кэли. Расширения симметрического оператора.

Функции $g_{l\pm}$, построенные в предыдущей части, лежат в ядрах соответствующих сопряженных операторов

$$(T_l^2 \pm i\rho^4)^* g_{l\pm} = 0.$$

Эти ядра являются единственными ортогональными дополнениями к образам значений сдвинутых симметрических операторов

$$\mathrm{Ran}_\pm = \{g = (T_l^2 \pm i\rho^4)u, \quad u \in \mathcal{S}_l^0\}.$$

Преобразование Кэли сопоставляет симметрическому оператору T_l^2 изометрию U, действующую из Ran_+ в Ran_- по правилу

$$U : (T_l^2 + i\rho^4)u \to (T_l^2 - i\rho^4)u.$$

Учитывая вышесказанную единственность, изометрический оператор U можно продолжить до унитарного, определив его на ортогональном дополнении к Ran_+ по правилу

$$U e^{ia} g_{l+} = e^{-ia} g_{l-}, \quad 0 \leqslant a < \pi$$

где e^{2ia} - унитарный параметр. Этому оператору соответствует такое самосопряженное расширение T_{la}^2 исходнодного симметрического оператора T_l^2, что в его область определения попадает функция h_l удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned}(T_{la}^2 + i\rho^4)h_l^a &= e^{ia} g_{l+},\\ (T_{la}^2 - i\rho^4)h_l^a &= e^{-ia} g_{l-}.\end{aligned}$$

Подбирая h_l^a в виде линейной комбинации g_{l+} и g_{l-} находим, что

$$\begin{aligned}h_l^a = \frac{e^{ia}}{2i\rho^4} g_{l+} - \frac{e^{-ia}}{2i\rho^4} g_{l-} = \frac{1}{2i\rho^4} D_l \big(&\exp\{ia + e^{i\frac{5\pi}{8}}\rho r\}\\ - \exp\{ia - e^{i\frac{\pi}{8}}\rho r\} - \exp\{-ia - e^{-i\frac{\pi}{8}}\rho r\} &+ \exp\{-ia + e^{-i\frac{5\pi}{8}}\rho r\}\big).\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем, что существенная область определения самосопряженного расширения T_{la}^2 состоит из суммы

$$\mathcal{S}_l^a = \mathcal{S}_l^0 \dotplus h_l^a,$$

а действие совпадает с дифференциальной операцией четвертого порядка T_l^2.

Пользуясь формулами (26), (27) можно вычислить первые коэффициенты асимптотического разложения функций h_l^a в окрестности нуля:

$$h_1^a = \sin a \, \rho r + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos(a + \frac{\pi}{8}) \, \rho^3 r^2 + \mathcal{O}(r^4)$$
$$h_2^a = \sin a \, \rho^2 + \frac{\sqrt{2}}{15} \cos(a - \frac{\pi}{8}) \, \rho^5 r^3 + \mathcal{O}(r^4).$$

Из этих соотношений следуют границные условия для области определения самосопряженных расширений T_{la}^2:

$$l = 1: \quad h_1^{a\prime\prime}(0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\cos(a + \pi/8)}{\sin a} \rho h_1^{a\prime}(0), \quad h_1^a(0) = h_1^{a\prime\prime\prime}(0) = 0, \quad (31)$$

$$l = 2: \quad h_2^{a\prime\prime\prime}(0) = \frac{2\sqrt{2}}{5} \frac{\cos(a - \pi/8)}{\sin a} \rho^3 h_1^a(0), \quad h_1^{a\prime}(0) = h_1^{a\prime\prime}(0) = 0. \quad (32)$$

Это значит, что существенную область определения $\mathcal{S}_l^a$ можно описать как множество функций ограниченных по норме

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,) + \Big(\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \Big)^2 \cdot \, , \Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \Big)^2 \cdot \, \Big)$$

и удовлетворяющих граничным условиям (31), (32), соответственно.

§7. Инегрирование по частям. Симметричность.

Проверим, что граничные условия (31), (32) согласуются с условиями формальной симметричности операторов T_{la}^2:

$$\int \bar{v} \Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \Big)^2 u dr - \int \Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \Big)^2 \bar{v} u dr$$
$$= \big(\bar{v} u''' - \bar{v}''' u - \bar{v}' u'' + \bar{v}'' u' + 2 \frac{l(l+1)}{r^2} (\bar{v}' u - \bar{v} u') \big) \big|_0^\infty.$$

Верхний предел в правой части равен нулю потому что u и v убывают на бесконечности, равно как и их производные. Нижний предел можно вычислить написав разложение разности $(\bar{v}'u - \bar{v}u')$ в окрестности нуля через значения функций и их производных в нуле (обозначим их через u_0, u_0', u_0'', u_0''' и аналогично для v). Тогда для правой части получим выражение

$$2\frac{l(l+1)}{r^2}(\bar v_0 u_0' - \bar v_0' u_0)\big|_{r=0} + 2\frac{l(l+1)}{r}(\bar v_0 u_0'' - \bar v_0'' u_0)\big|_{r=0}$$
$$+(l(l+1)-1)(\bar v_0 u_0''' - \bar v_0''' u_0) + (l(l+1)+1)(\bar v_0' u_0'' - \bar v_0'' u_0').$$

Для того, чтобы эта сумма равнялось нулю, должны по отдельности зануляться два слагаемых в первой строке и вся вторая строка. Эти требования приводят нас к условиям

$$\frac{u_0'}{u_0} = \frac{\bar v_0'}{\bar v_0}, \quad \frac{u_0''}{u_0} = \frac{\bar v_0''}{\bar v_0}, \quad \frac{u_0'''}{u_0} = \frac{\bar v_0'''}{\bar v_0}, \tag{33}$$

которые однозначно связывают 3 коэффициента разложения функций u, v с четвертым.

Несложно увидеть, что граничные условия (31), (32) согласуются с условиями (33) и, таким образом, дифференциальная операция T_l^2 на областях $\mathcal{S}_l^a$ симметрична.

§8. Дискретный спектр

Исходя из граничных условий (31), (32) посмотрим, при каких значениях параметра a могут существовать (дискретные) собственные значения оператора T_{la}^2. Остановимся здесь на отрицательных собственных значениях, отсутствие положительных обсудим в следующей части. Пусть функция $\widetilde v_l^\kappa$ удовлетворяет уравнению

$$\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)^2 \widetilde v_l^\kappa(r) = -\kappa^4 \widetilde v_l^\kappa(r), \quad \kappa > 0.$$

Будем искать ее в виде

$$\widetilde v_l^\kappa(r) = D_l w^\kappa(r),$$

тогда

$$T_l^2 \widetilde v_l^\kappa = T_l^2 D_l w^\kappa = D_l T_0^2 w^\kappa = D_l \frac{d^4}{dr^4} w^\kappa = -\kappa^4 D_l w^\kappa.$$

Отсюда видно, что w^κ, с точностью до решения уравнения

$$D_l w = 0,$$

является линейной комбинацией четырех экспонент

$$\exp\{e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi k}{2}} \kappa r\}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

При $k = 0, 3$ эти функции растут на бесконечности, а из двух оставшихся экспонент $k = 1, 2$ квадратичную интегрируемость в нуле для $\widetilde{v}_l^\kappa$ дает только разность

$$w^\kappa = i\exp\{e^{-i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\} - i\exp\{e^{i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\}$$

(мнимые коэффициенты здесь выбраны для вещественности результата). Пользуясь разложением w^κ в окрестности нуля

$$w^\kappa = \sqrt{2}\kappa r - \kappa^2 r^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\kappa^3 r^3 - \frac{\sqrt{2}}{120}\kappa^5 r^5 + \mathcal{O}(r^6)$$

с помощью асимптотик (26), (27) запишем первые коэффициенты для $\widetilde{v}_l^\kappa$:

$$\widetilde{v}_1^\kappa = -\kappa^2 r + \frac{\sqrt{2}}{3}\kappa^3 r^2 + \mathcal{O}(r^4), \tag{34}$$

$$\widetilde{v}_2^\kappa = \kappa^2 - \frac{\sqrt{2}}{15}\kappa^5 r^3 + \mathcal{O}(r^4). \tag{35}$$

Для того, чтобы функции v_l^κ лежали в области определения операторов T_{la}^2, они должны удовлетворять соответствующим граничным условиям (31), (32). Вторые части этих условий очевидно выполнены ввиду равенств нулю соответствующих коэффициентов в (34), (35). А из первых частей следуют условия связывающие собственные значения κ с параметром расширения a:

$$l = 1: \quad \kappa = -\rho\frac{\cos(a + \pi/8)}{\sin a}, \quad 0 \leqslant a < \pi, \tag{36}$$

$$l = 2: \quad \kappa^3 = -\rho^3\frac{\cos(a - \pi/8)}{\sin a}, \quad 0 \leqslant a < \pi. \tag{37}$$

В правых частях этих условий стоят функции взаимно-однозначно отображающие интервал $0 \leqslant a < \pi$ в вещественную ось плюс точку $-\infty$. То есть между a и κ имеется взаимно-однозначное соответствие (при фиксированном размерном параметре ρ). На основании этого далее для упрощения вычислений мы будем в качестве параметра расширения использовать размерную величину κ вместо a (и ρ). При этом граничные условия (31), (32) переписываются в виде

$$l = 1: \quad v_1^{\kappa\prime\prime}(0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\kappa v_1^{\kappa\prime}(0), \quad v_1^\kappa(0) = v_1^{\kappa\prime\prime\prime}(0) = 0, \tag{38}$$

$$l = 2: \quad v_2^{\kappa\prime\prime\prime}(0) = -\frac{2\sqrt{2}}{5}\kappa^3 v_2^\kappa(0), \quad v_2^{\kappa\prime}(0) = v_2^{\kappa\prime\prime}(0) = 0. \tag{39}$$

Существование (дискретных) собственных значений требует положительности параметра κ, что, в соответствии с формулами (36), (37), эквивалентно принадлежности a интервалам

$$\begin{aligned} l = 1: &\quad \frac{3\pi}{8} < a < \pi, \\ l = 2: &\quad \frac{5\pi}{8} < a < \pi. \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что самосопряженные операторы T^2_{la} могут иметь единичные отрицательные собственные значения $-\kappa^4$ кратности 1, которым соответствуют (ненормированные) собственные функции

$$\widetilde{v}^{\kappa}_l = iD_l\big(\exp\{e^{-i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\} - \exp\{e^{i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\}\big).$$

§9. Непрерывный спектр

Для описания непрерывного спектра оператора $T^2_{l\kappa}$, $\kappa = \kappa(a)$ необходимо исследовать решения уравнения

$$\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)^2 \widetilde{u}^{\lambda}_l = \lambda^4 \widetilde{u}^{\lambda}_l, \quad \lambda > 0.$$

Как и в предыдущей части сделаем замену

$$\widetilde{u}^{\lambda}_l = D_l w^{\lambda}, \tag{40}$$

тогда для w^{λ} возникает уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 w^{\lambda}}{dr^4} = \lambda^4 w^{\lambda}.$$

Это уравнение имеет четыре линейно-независимых решения

$$\exp\{i^k \lambda r\}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

из которых можно построить два линейно-независимых решения исчезающих в нуле и невозрастающих на бесконечности. Общую линейную комбинацию этих двух решений (с точностью до множителя) можно записать в виде

$$w^{\lambda} = \sin \lambda r + \sigma(\lambda)(\cos \lambda r - e^{-\lambda r}).$$

Отсюда сразу можно сделать вывод об отсутствии положительного дискретного спектра у оператора T^2_{la}, в виду того, что любое решение w^{λ} осциллирует на бесконечности и следовательно в функции $\widetilde{u}^{\lambda}_l$ всегда присутствует неубывающее слагаемое.

Покажем, что для любого $\lambda > 0$ можно подобрать единственное значение $\sigma(\lambda)$ так, чтобы функция (40) удовлетворяла граничным условиям (38), (39). Для этого рассмотрим разложение w^λ по r в окрестности нуля:

$$w^\lambda(r) = (1+\sigma)\lambda r - \sigma\lambda^2 r^2 + \frac{\sigma - 1}{6}\lambda^3 r^3 + \frac{\sigma+1}{120}\lambda^5 r^5 + \mathcal{O}(r^6).$$

Воспользовавшись асимптотиками (26), (27) можно написать

$$\widetilde{u}_1^\lambda = D_1 w^\lambda = -\sigma\lambda^2 r + \frac{\sigma-1}{3}\lambda^3 r^2 + \mathcal{O}(r^4),$$
$$\widetilde{u}_2^\lambda = D_2 w^\lambda = \sigma\lambda^2 + \frac{\sigma+1}{15}\lambda^5 r^3 + \mathcal{O}(r^4).$$

Сравнивая эти разложения с условиями (38), (39) находим, что зависимость σ от λ однозначна и имеет следующий вид:

$$\sigma_1(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - \sqrt{2}\kappa}, \quad \lambda > 0, \tag{41}$$

$$\sigma_2(\lambda) = \frac{\lambda^3}{\sqrt{2}\kappa^3 - \lambda^3}, \quad \lambda > 0. \tag{42}$$

Таким образом, мы получаем, что непрерывный спектр оператора $T^2_{l\kappa}$ однократный и занимает всю неотрицательную полуось.

§10. Нормировка

Для вычисления нормировки собственных функций $\widetilde{v}_l^\kappa$ и "собственных функций непрерывного спектра" $\widetilde{u}_l^\lambda$ удобно воспользоваться следующими формулами для сферических функций Бесселя:

$$\int_0^\infty D_1\widetilde{w}(r) D_1 w(r) dr = \int_0^\infty \frac{d\widetilde{w}}{dr}\frac{dw}{dr} dr - \frac{\widetilde{w}w}{r}\Big|_0^\infty, \tag{43}$$

$$\int_0^\infty D_2\widetilde{w}(r) D_2 w(r) dr = \int_0^\infty \frac{d^2\widetilde{w}}{dr^2}\frac{d^2w}{dr^2} dr + \frac{3}{r}\Big(\Big(\frac{\widetilde{w}w}{r}\Big)' - \widetilde{w}'w'\Big)\Big|_0^\infty. \tag{44}$$

Эти формулы могут быть получены из определения (24) операций D_l с помощью интегрирования по частям. Несложно увидеть, что в случае когда $\widetilde{w}$, w не растут на бесконечности и исчезают в нуле как рассматриваемые выше функции w^κ, w^λ, граничные слагаемые пропадают и в правых частях (43), (44) остаются только интегралы.

Применим теперь формулы (43), (44) для вычисления нормировки (вещественных) собственных функций $\widetilde{v}_l^\kappa$:

$$\int_0^\infty \widetilde{v}_1^\kappa(r)\widetilde{v}_1^\kappa(r)dr = \int_0^\infty \frac{dw^\kappa}{dr}\frac{dw^\kappa}{dr}dr$$

$$= -\kappa^2 \int_0^\infty (e^{i\frac{3\pi}{4}} \exp\{e^{i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\} - e^{-i\frac{3\pi}{4}} \exp\{e^{-i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\})^2 dr = \frac{\kappa}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty \widetilde{v}_2^\kappa(r)\widetilde{v}_2^\kappa(r)dr = \int_0^\infty \frac{d^2w^\kappa}{dr^2}\frac{d^2w^\kappa}{dr^2}dr$$

$$= \kappa^4 \int_0^\infty (\exp\{e^{i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\} + \exp\{e^{-i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\})^2 dr = \frac{\kappa^3}{\sqrt{2}},$$

и “собственных функций непрерывного спектра” $\widetilde{u}_l^\lambda$:

$$\int_0^\infty \widetilde{u}_1^\lambda(r)\widetilde{u}_1^\mu(r)dr = \int_0^\infty \frac{dw^\lambda}{dr}\frac{dw^\mu}{dr}dr$$

$$= \lambda\mu \int_0^\infty \big(\cos\lambda r + \sigma_1^\lambda(e^{-\lambda r} - \sin\lambda r)\big)\big(\cos\mu r + \sigma_1^\mu(e^{-\mu r} - \sin\mu r)\big)dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\lambda\mu(1 + \sigma_1^\lambda\sigma_1^\mu)\,\delta(\lambda - \mu),$$

$$\int_0^\infty \widetilde{u}_2^\lambda(r)\widetilde{u}_2^\mu(r)dr = \int_0^\infty \frac{dw^\lambda}{dr}\frac{dw^\mu}{dr}dr$$

$$= \lambda^2\mu^2 \int_0^\infty \big(\sin\lambda r + \sigma_2^\lambda(\cos\lambda r + e^{-\lambda r})\big)\big(\sin\mu r + \sigma_2^\mu(\cos\mu r + e^{-\mu r})\big)dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\lambda^2\mu^2(1 + \sigma_2^\lambda\sigma_2^\mu)\,\delta(\lambda - \mu).$$

С помощью этих вычислений, нормированные собственные функции и “собственные функции непрерывного спектра” можно записать в следующем общем виде:

$$v_l^\kappa = i2^{1/4}\kappa^{1/2-l} D_l\big(\exp\{e^{-i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\} - \exp\{e^{i\frac{3\pi}{4}}\kappa r\}\big),$$

$$u_l^\kappa = \frac{\sqrt{2}\lambda^{-l}}{\sqrt{\pi(1+(\sigma_l^\lambda)^2)}} D_l\big(\sin\lambda r + \sigma_l^\lambda(\cos\lambda r - e^{-\lambda r})\big),$$

где зависимости σ от λ и κ определяются выражениями (41), (42).

Для функций $u_l^\lambda(r)$ (которые, конечно, зависят также и от параметра κ) и $v_l^\kappa(r)$ выполнены соотношения ортонормированности

$$\int_0^\infty u_l^{\lambda_1}(r) u_l^{\lambda_2}(r) dr = \delta(\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$\int_0^\infty u_l^\lambda(r) v_l^\kappa(r) dr = 0, \quad \kappa > 0,$$

$$\int_0^\infty v_l^\kappa(r) v_l^\kappa(r) dr = 0, \quad \kappa > 0$$

и полноты

$$\int_0^\infty u_l^\lambda(r_1) u_l^\lambda(r_2) d\lambda + v_l^\kappa(r_1) v_l^\kappa(r_2) = \delta(r_1 - r_2)$$

(второе слагаемое здесь присутствует только при $\kappa > 0$).

§11. Резольвента

Будем искать резольвенту $R(r,s;z)$ оператора $T_{l\kappa}^2$, как функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\Big(\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)^2 - z^4\Big) R(r,s;z) = \delta(r-s), \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \tag{45}$$

и граничным условиям (38), (39), симметричную по аргументам r и s, а также экспоненциально убывающую по этим аргументам на бесконечности. Функции

$$D_l \exp\{i^k z r\}, \quad k = 0,1,2,3$$

удовлетворяют однородному уравнению

$$(T_l^2 - z^4) D_l \exp\{i^k z r\} = 0,$$

где T_l – это дифференциальная операция

$$T_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

Экспоненты $\exp\{i^k zr\}$ обладают замечательным свойством: если в их линейной комбинации равен нулю коэффициент разложения при степени r^0, то коэффициент разложения при r^4 также будет равен нулю. Это дает дополнительную степень свободы при формировании асимптотики (38), (39) и позволяет построить функции

$$\begin{aligned} h_- &= D_l(e^{-izr} + \alpha_- e^{izr} + \beta_- e^{-zr}) \equiv \tilde{h}_- + \beta_- g_+, \quad g_+ = D_l e^{-zr}, \\ h_+ &= D_l(e^{zr} + \alpha_+ e^{-zr} + \beta_+ e^{izr}) \equiv \tilde{h}_+ + \beta_+ g_-, \quad g_- = D_l e^{izr} \end{aligned}$$

с правильными граничными условиями из трех определенных экспонент, таким образом, что $\tilde{h}_\pm(r)$, $g_\pm(r)$ удовлетворяют уравнениям второй степени

$$(T_l \pm z^2)\tilde{h}_\pm(r) = 0, \quad (T_l \pm z^2)g_\pm(r) = 0, \tag{46}$$

и при этом $g_\pm(r)$ экспоненциально убывают на бесконечности. Несложные вычисления с помощью формул (26), (27) показывают, что коэффициенты α и β выглядят следующим образом. Для $l = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= -\frac{(i+1)z + \sqrt{2}\kappa}{(i-1)z + \sqrt{2}\kappa}, \quad \beta_+ = \frac{2z}{(i-1)z + \sqrt{2}\kappa}, \\ \alpha_- &= \frac{(i+1)z - \sqrt{2}\kappa}{(i-1)z + \sqrt{2}\kappa}, \quad \beta_- = -\frac{2iz}{(i-1)z + \sqrt{2}\kappa}, \end{aligned}$$

и для $l = 2$:

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= -\frac{(i-1)z^3 + \sqrt{2}\kappa}{(i+1)z^3 + \sqrt{2}\kappa}, \quad \beta_+ = -\frac{2z^3}{(i+1)z^3 + \sqrt{2}\kappa}, \\ \alpha_- &= -\frac{(1-i)z^3 + \sqrt{2}\kappa}{(i+1)z^3 + \sqrt{2}\kappa}, \quad \beta_- = -\frac{2iz^3}{(i+1)z^3 + \sqrt{2}\kappa}. \end{aligned}$$

Введенные таким образом функции $h_\pm$ и $g_\pm$ можно использовать для построения резольвенты

$$\begin{aligned} R(r,s;z) = {} & \frac{1}{2z^2 W_-}\big(h_-(r)g_-(s)\theta(s-r) + h_-(s)g_-(r)\theta(r-s)\big) \\ & - \frac{1}{2z^2 W_+}\big(h_+(r)g_+(s)\theta(s-r) + h_+(s)g_+(r)\theta(r-s)\big), \end{aligned} \tag{47}$$

здесь $W_\pm$ – это вронскианы

$$W_\pm(z) = \tilde{h}'_\pm g_\pm - \tilde{h}_\pm g'_\pm,$$

которые, ввиду условий (46), не зависят от r и могут быть вычислены в любой удобной точке, например, на бесконечности:

$$l = 1: \quad W_- = -2iz^3, \quad W_+ = -2z^3,$$
$$l = 2: \quad W_- = -2iz^5, \quad W_+ = 2z^5.$$

Симметричность $R(r, s; z)$ по аргументам r и s очевидна, асимптотические условия в нуле и на бесконечности следуют из построения функций h и g. Для проверки дифференциального уравнения (45) сделаем подстановку

$$h_\pm = \tilde{h}_\pm + \beta_\pm g_\mp$$

и разобьем R на три слагаемых

$$R = R_- - R_+ + R_g,$$

так что

$$R_\pm = \frac{1}{2z^2 W_\pm}\big(\tilde{h}_\pm(r) g_\pm(s)\theta(s-r) + \tilde{h}_\pm(s) g_\pm(r)\theta(r-s)\big),$$

и

$$R_g = \frac{\beta_-}{2z^2 W_-}\big(g_+(r) g_-(s)\theta(s-r) + g_+(s) g_-(r)\theta(r-s)\big)$$
$$- \frac{\beta_+}{2z^2 W_+}\big(g_-(r) g_+(s)\theta(s-r) + g_-(s) g_+(r)\theta(r-s)\big).$$

Далее, непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$\frac{\beta_-}{W_-} = -\frac{\beta_+}{W_+} = \begin{cases} ((i-1)z^3 + \sqrt{2}\kappa z^2)^{-1}, & l = 1 \\ ((i+1)z^5 + \sqrt{2}\kappa z^2)^{-1}, & l = 2, \end{cases}$$

и, таким образом, с помощью свойства

$$\theta(r-s) + \theta(s-r) = 1,$$

получаем для R_g следующее выражение

$$R_g = \frac{\beta_-}{2z^2 W_-}\big(g_+(r) g_-(s) + g_+(s) g_-(r)\big). \tag{48}$$

Это гладкая симметричная функция по аргументам r и s, которая очевидно удовлетворяет однородному уравнению

$$(T_l^2 - z^4) R_g(r, s; z) = 0.$$

Функции R_+, R_- имеют стандартный вид резольвент операторов второго порядка, построенных по решениям (46), поэтому они удовлетворяют дифференциальным уравнениям второй степени

$$(T_l \pm z^2)R_\pm(r,s;z) = \frac{1}{2z^2}\delta(r-s).$$

Эти уравнения позволяют записать равенство

$$\begin{aligned}(T_l^2 - z^4)(R_- - R_+) &= (T_l + z^2)(T_l - z^2)R_- - (T_l - z^2)(T_l + z^2)R_+ \\ &= (T_l + z^2)\frac{\delta(r-s)}{2z^2} - (T_l - z^2)\frac{\delta(r-s)}{2z^2} = \delta(r-s),\end{aligned}$$

которое и означает, что построенная функция $R(r,s;z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (45), необходимым граничным условиям и, таким образом, является резольвентой для самосопряженного оператора $T^2_{l\kappa}$.

11.1. Обратный оператор. Ядро оператора обратного к $T^2_{l\kappa}$ может быть получено из ядра резольвенты (47) предельным переходом $z \to 0$, однако, такое вычисление требует разложение до пятого порядка по z, поэтому мы приведем здесь более простую конструкцию.

Пусть $T_l^{-1}(r,s)$ – ядро оператора обратного к самосопряженному в существеном дифференциальному оператору второго порядка

$$T_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

Тогда его квадрат

$$T_l^{-2}(r,s) = \int_0^\infty T_l^{-1}(r,q)T_l^{-1}(q,s)dq$$

удовлетворяет формальному равенству

$$\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)^2 T_l^{-2}(r,s) = \delta(r-s),$$

но не обладает необходимой асимптотикой в нуле. Однако, к квадрату $T_l^{-2}(r,s)$ можно добавить слагаемое аналогичное (48), которое, с одной стороны, исчезает при действии дифференциального оператора четвертой степени, а с другой – исправляет поведение $T_l^{-2}(r,s)$ в нуле.

Итак, для $l = 1$

$$T_1^{-1}(r,s) = \frac{1}{3}\Big(\frac{r^2}{s}\theta(s-r) + \frac{s^2}{r}\theta(r-s)\Big),$$

после интегрирования получаем

$$T_1^{-2}(r,s) = \frac{1}{6}\Big(\Big(r^2 s - \frac{r^4}{5s}\Big)\theta(s-r) + \Big(s^2 r - \frac{s^4}{5r}\Big)\theta(r-s)\Big).$$

Дополнительное слагаемое

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\kappa}rs = -\frac{1}{6}\frac{3}{\sqrt{2}\kappa}rs\big(\theta(s-r) + \theta(r-s)\big)$$

приводит разложение по r и по s в нуле к виду (34)

$$\begin{aligned}\Theta_1(r,s) &= T_1^{-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}\kappa}rs \\ &= \frac{1}{6}\Big(\Big(r^2 s - \frac{3}{\sqrt{2}\kappa}rs - \frac{r^4}{5s}\Big)\theta(s-r) + \Big(s^2 r - \frac{3}{\sqrt{2}\kappa}rs - \frac{s^4}{5r}\Big)\theta(r-s)\Big).\end{aligned}$$

и в тоже время не мешает выполнению условия

$$\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)^2\Theta_1(r,s) = \delta(r-s).$$

И, таким образом, $\Theta_1(r,s)$ является ядром самосопряженного оператора, обратного к $T_{1\kappa}^2$. Этот оператор не является ограниченным, поэтому его ядро растет на бесконечности.

Аналогично для случая $l = 2$:

$$T_2^{-1}(r,s) = \frac{1}{5}\Big(\frac{r^3}{s^2}\theta(s-r) + \frac{s^3}{r^2}\theta(r-s)\Big).$$

Интегрирование дает следующее выражение для ядра квадрата

$$T_2^{-2}(r,s) = \frac{1}{10}\Big(\Big(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{7s^2}\Big)\theta(s-r) + \Big(\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{7r^2}\Big)\theta(r-s)\Big).$$

Добавкой, исправляющей граничные условия, здесь может служить константа

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\kappa^3} = -\frac{1}{30}\frac{15}{\sqrt{2}\kappa^3}\big(\theta(s-r) + \theta(r-s)\big),$$

которая дает итоговое выражение для ядра обратного оператора в виде

$$\Theta_2(r,s) = T_2^{-2}(r,s) - \frac{1}{2\sqrt{2}\kappa^3}$$
$$= \frac{1}{10}\Big(\Big(\frac{r^3}{3} - \frac{5}{\sqrt{2}\kappa^3} - \frac{r^5}{7s^2}\Big)\theta(s-r) + \Big(\frac{s^3}{3} - \frac{5}{\sqrt{2}\kappa^3} - \frac{s^5}{7r^2}\Big)\theta(r-s)\Big).$$

§12. Квадратичная форма

В этой части мы приведем выражения для расширений квадратичной формы (1) поперечного оператора Лапласа в трехмерном пространстве. Для этого подставим параметризованные поперечные компоненты

$$\vec{f}_{lm} = \sqrt{l(l+1)}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)$$

в интеграл

$$\sum_{k,j}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_r} |\frac{\partial f_k}{\partial x_j}|^2 d^3x \tag{49}$$

по дополнению к шару B_r радиуса r с центром в начале координат. Проинтегрируем по частям и выделим выражения

$$\int\limits_r^\infty \overline{u_{lm}(r)}\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)^2 u_{lm}(r)dr, \tag{50}$$

соответствующие рассматриваемым квадратичным формам, сохраняя при этом все слагаемые содержащие значения функции на границе шара B_r. При расширении пространства параметризующих функций до области определения операторов $T_{l\kappa}^2$ с граничными условиями (38), (39), выражения (50) переходят в квадратичные формы этих операторов, а в граничных слагаемых вторая (для $l=1$) или третья (для $l=2$) производные в окрестности начала координат могут быть выражены, соответственно, через первую производную или значение функции. Далее соберем эти слагаемые в выражения

$$f_{lm}^2(r) = \sum_{k,k'}\iint_{\mathbb{S}^2} f_k(r,\Omega)\big(\overline{\Upsilon^k(\Omega)}\Upsilon^{k'}(\Omega')\overline{\Psi^k(\Omega)}\Psi^{k'}(\Omega')\big)$$
$$\times\,\overline{f_{k'}(r,\Omega')}r^2 d\Omega d\Omega' = |u'_{lm}(r)|^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}|u_{lm}(r)|^2$$

и запишем расширенную квадратичную форму в следующем общем виде

$$Q_\kappa(f) = \lim_{r\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_r} \Big|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\Big|^2 d^3x - \Big(\frac{22\sqrt{2}}{9}\kappa_{1m} + \frac{5}{3r}\Big) f_{1m}^2(r) - \Big(\frac{80\sqrt{2}}{750}\kappa_{1m}^3 + \frac{4}{r}\Big) f_{2m}^2(r)\Big),$$

где по k, j и m подразумевается суммирование, а на $\vec{f}(\vec{x})$ наложено условие поперечности (15). Сразу можно отметить, что если $\vec{f}(\vec{x})$ регулярна в начале координат, то все граничные слагаемые исчезают, интеграл (49) сходится при $r \to 0$, и квадратичная форма $Q_\kappa(f)$ совпадает с квадратичной формой (1). Нетривиальное выражение получается только если какие-то из компонент $\vec{f}(\vec{x})$ с угловым моментом $l = 1$ или $l = 2$ ведут себя как r^{-1} или r^{-2}, соответственно. Тогда предел интеграла (49) по внешности шара расходится, когда шар стягивается в точку, а граничные слагаемые подобраны таким образом, чтобы получить для $Q_\kappa(f)$ конечное выражение, зависящее от параметров расширения κ_{lm}. В случае сферически симметричных расширений, вовлекающих только компоненты с моментом $l = 1$ (то есть $\kappa_{1m} = \kappa$, $\kappa_{2m} = -\infty$), выражение для $Q_\kappa(f)$ записывается в более простом виде, похожем на (9)

$$Q_\kappa(f) = \lim_{r\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_r} \Big|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\Big|^2 d^3x - \Big(\frac{5}{3r} + \frac{22\sqrt{2}}{9}\kappa\Big) \int\limits_{\partial B_r} |\vec{f}(\vec{x})|^2 d^2s\Big),$$

при этом функция $\vec{f}(\vec{x})$ имеет сингулярность порядка r^{-1}, но остается интегрируемой с квадратом по всему пространству $\mathbb{R}^3$.

§13. Заключение

Мы построили самосопряженные расширения дифференциальных операторов действующих на параметризующие функции одной из поперечных компонент в подпространствах с орбитальным моментом $l = 1, 2$ квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа в трехмерном пространстве. Эти расширения задаются $3+5 = 8$ – восемью размерными параметрами расширения κ_l^m, которые, в принципе, могут быть равны друг другу, образуя дополнительную симметрию модели. В частности, при $\kappa_l^m = \kappa > 0$ расширенная форма $Q_\kappa(\vec{f})$

имеет стабильные (по отношению к вариации) состояния вида

$$\sum_{|m|\leqslant l\leqslant 2} A_{lm}\big(\frac{v_l^\kappa(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)+\frac{v_l^{\kappa\prime}(r)}{r}\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)\big),$$

где A_{lm} могут быть скалярами или элементами пространства представления алгебры внутренней симметрии.

Введение нетривиальных размерных параметров расширения нарушает масштабную однородность квадратичной формы (1). То есть данную задачу можно рассматривать как способ введения размерных параметров в модель *классической* механики с потенциальной энергией вида (1).

Благодарности

Автор выражает благодарность П. А. Болохову и С. Э. Деркачеву за обсуждения.

Литература

1. K. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren.* — Math. Ann. **109** (1934), 465–487;
   M. Stone, in *Linear Transformations in Hilbert spaces and their Applications in Analysis*, Amer. Math. Soc. Colloquim Publication **15**, Providence, R.I., (1932);
   также см. теорему X.23 в [2].
2. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ и самосопряженность.* М. Мир, (1978).
3. M. G. Krein, *The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications.* — Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S., **20** (62), (1947), 431–495; Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S., **21** (64), (1947), 365–404.
4. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом.* — Доклады АН СССР **137** вып. 5, (1961), 1011–1014.
5. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbation of Differential Operators. Solvable Schrödinger type Operators.* Cambridge University Press, (2000).
6. Б. Шутц, *Геометрические методы математической физики.* М. Мир, (1984);
   E. L. Hill, “The Theory of Vector Spherical Harmonics.” — Am. J. Phys. **22** (1954) 211.
7. Р. Д. Рихтмайер, *Принципы современной математической физики.* т. 1, М. Мир (1982).

Bolokhov T. A. Extensions of the quadratic form of the transverse Laplace operator.

We review the quadratic form of the Laplace operator in spehrical coordinates which acts on the transverse components of vector functions on the 3-dimensional space. Operators, acting on the parametrizing functions of one of the transverse components with angular momentum 1 and 2, appear to be fourth order symmetric differential operators with deficiency indices (1,1). We develop self-adjoint extensions of these operators and propose correspondent extensions for the initial quadratic form. Eigenfuctions of the extensions in question represent a stable soliton-like solutions of the physical system with the quadratic form being a potential energy.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 11 марта 2015 г.