Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 433, 2015 г.

Н. М. Боголюбов

ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДВУМОДОВОЙ МОДЕЛИ БОЗЕ–ХАББАРДА

Петру Петровичу Кулишу
в связи с его семидесятилетием

Возникший в последнее время интерес к двумодовой модели Бозе-Хаббарда вызван возможным ее применением к исследованию слабо взаимодействующих ультрахолодных атомов в двуямных ловушках [1–5], квантовой динамике бозонных переходов Джозефсона [6,7], квантовой метрологии [8] и обработки квантовой информации [9].

Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) [10,11] позволяет найти точное решение модели [12,13]. В данной работе мы применим КМОЗ к вычислению её временных корреляционных функций.

Рассмотрим набор из N бозонных атомов при нулевой температуре в двуямной оптической ловушке такой глубины, что только низший уровень в каждой из ям заселен. В этом, так называемом, двумодовом приближении динамика описывается гамильтонианом Бозе-Хаббарда:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \epsilon(n_b - n_a) - J(a^\dagger b + ab^\dagger) + \frac{U}{2}\left(n_a(n_a-1) + n_b(n_b-1)\right) , \qquad (1)$$

где $a, a^\dagger$ и $b, b^\dagger$ это операторы рождения и уничтожения бозонов в ямах a и b соответственно: $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$, причем, операторы в различных ямах взаимно коммутируют. Операторы числа частиц в ямах равны $n_a = a^\dagger a, n_b = b^\dagger b$. Потенциал смещения, обменный интеграл и постоянная взаимодействия обозначаются как ε, J, и U. Потенциал смещения ε может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от энергии расстройки между двумя модами. Значение $U > 0$ соответствует взаимодействию отталкивания и наоборот. Полное число частиц в системе сохраняется:

$$\widehat{N} = a^\dagger a + b^\dagger b\,, \ \ [\widehat{H}, \widehat{N}] = 0\,. \qquad (2)$$

Ключевые слова: квантовый метод обратной задачи, временные корреляционные функции, модель Бозе–Хаббарда.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 14-11-00598.

Отбросив несущественные c-числовые члены, можно представить гамильтониан (1) в виде спинового гамильтониана

$$\widehat{H}_L = \varepsilon \widehat{L}_z - J \widehat{L}_x + U \widehat{L}_z^2 \,, \tag{3}$$

где $SU(2)$ генераторы в швингеровском представлении имеют вид

$$\widehat{L}_x = \frac{1}{2}(a^\dagger b + a b^\dagger)\,, \widehat{L}_y = \frac{1}{2i}(a^\dagger b - a b^\dagger)\,, \widehat{L}_z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b)\,. \tag{4}$$

В спиновом представлении (3) двумодовая модель Бозе–Хаббарда эквивалентна модели Липкина–Мешкова–Глики ядерной физики [14].

Закон сохранения полного числа частиц позволяет нам положить

$$\widehat{H} = -J^{-1} \left\{ \widehat{\mathcal{H}} - \frac{U}{2} \widehat{N}(\widehat{N} - 1) - \epsilon \widehat{N} \right\} \,,$$

причем $[\widehat{H}, \widehat{\mathcal{H}}] = 0$. Таким образом, мы можем записать

$$\widehat{H} = \Delta b^\dagger b + (a^\dagger b + a b^\dagger) + c^2 a^\dagger a b^\dagger b \,, \tag{5}$$

где $\Delta = 2J^{-1}\epsilon$, $c^2 = J^{-1}U$, и рассматривать $\widehat{H}$ как гамильтониан модели.

Для того чтобы применить КМОЗ к решению модели, мы рассмотрим два 2×2 матричных оператора $\mathbf{L}_a(\lambda)$ и $\mathbf{L}_b(\lambda)$:

$$\mathbf{L}_a(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - c^{-1}\Delta - c a^\dagger a & a^\dagger \\ a & -c^{-1} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathbf{L}_b(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - c b^\dagger b & b^\dagger \\ b & -c^{-1} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где параметр $\lambda \in \mathbb{C}$. Отметим, что матричные элементы операторов $\mathbf{L}_a(\lambda)$ и $\mathbf{L}_b(\lambda)$ взаимно коммутируют. Эти L-операторы были введены в работах [15,16] и могут быть получены как специальные пределы общего бозонного L-оператора [17,18]. В качестве матрицы монодромии модели мы можем положить

$$\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{L}_a(\lambda)\mathbf{L}_b(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\lambda) & \mathbf{B}(\lambda) \\ \mathbf{C}(\lambda) & \mathbf{D}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\lambda) &= \lambda b^\dagger - \mathbf{X}; \\ \mathbf{X} &= c^{-1}\Delta b^\dagger + c a^\dagger a b^\dagger + c^{-1} a^\dagger; \\ [b^\dagger, \mathbf{X}] &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

а

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\lambda) &= \lambda a - \mathbf{Y}; \\ \mathbf{Y} &= c^{-1} b + c a b^{\dagger} b\,; \\ [a, \mathbf{Y}] &= 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Матричные элементы

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(c a^{\dagger} a + c b^{\dagger} b + \Delta c^{-1}) + \Delta b^{\dagger} b + a^{\dagger} b + c^2 a^{\dagger} a b^{\dagger} b\,; \\ &\mathbf{D}(\lambda) = a b^{\dagger} + c^{-2}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

След матрицы монодромии (8)

$$\tau(\lambda) = Tr\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{D}(\lambda) \tag{12}$$

в явном виде равен

$$\tau(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(c\widehat{N} + \Delta c^{-1}) + \widehat{H} + c^{-2}, \tag{13}$$

где $\widehat{N}$ оператор полного числа частиц (2), а $\widehat{H}$ это гамильтониан (5). Причем,

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \tau(0) - c^{-2}, \\ \widehat{N} &= -\,c^{-1} \frac{\partial \tau(\lambda)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} - c^{-1}\Delta \end{aligned} \tag{14}$$

Матрицу монодромии модели можно определить также взяв произведение L-операторов в обратном порядке

$$\widetilde{\mathbf{T}}(\lambda) = \mathbf{L}_b(\lambda)\mathbf{L}_a(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{A}}(\lambda) & \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda) \\ \widetilde{\mathbf{C}}(\lambda) & \widetilde{\mathbf{D}}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Заметим, что $Tr\mathbf{T}(\lambda) = Tr\widetilde{\mathbf{T}}(\lambda) = \tau(\lambda)$, и

$$\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda) = \mathbf{C}^{+}(\lambda^*),\ \widetilde{\mathbf{C}}(\lambda) = \mathbf{B}^{+}(\lambda^*). \tag{16}$$

Введенные L-операторы удовлетворяют сплетающему соотношению

$$\mathbf{R}(\lambda,\mu)\mathbf{L}_{a,\,b}(\lambda) \otimes \mathbf{L}_{a,\,b}(\mu) = \mathbf{L}_{a,\,b}(\mu) \otimes \mathbf{L}_{a,\,b}(\lambda)\mathbf{R}(\lambda,\mu) \tag{17}$$

с рациональной R-матрицей

$$\mathbf{R}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} f(\mu,\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu,\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

с матричными элементами равными

$$f(\mu,\lambda) = 1 - \frac{c}{\mu-\lambda}, \quad g(\mu,\lambda) = -\frac{c}{\mu-\lambda}.$$

Взаимная коммутативность матричных элементов операторнозначных матриц $\mathbf{L}_B$ and $\mathbf{L}_S$ приводит к соотношению

$$\mathbf{R}(\lambda,\mu)\mathbf{T}(\lambda)\otimes\mathbf{T}(\mu) = \mathbf{T}(\mu)\otimes\mathbf{T}(\lambda)\mathbf{R}(\lambda,\mu)\,, \tag{19}$$

которое определяет алгебру элементов $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$. Следствием этого соотношения является коммутативность матриц перехода (12) для произвольных комплексных чисел λ,μ:

$$[\tau(\lambda),\tau(\mu)] = 0. \tag{20}$$

Можно показать, что $\widehat{N}\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}(\lambda)(\widehat{N}+1)$. Таким образом, $\mathbf{B}(\lambda)$ действует как оператор рождения квази-частицы, а $\mathbf{C}(\lambda)$ как оператор ее уничтожения.

В обычном для КМОЗ подходе строятся N-частичные вектора

$$\mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle = \prod_{j=1}^{N}\mathbf{B}(\lambda_j)\mid\Omega\rangle = \prod_{j=1}^{N}(\lambda_j b^{\dagger} - \mathbf{X})\mid\Omega\rangle, \tag{21}$$

где вакуумный вектор $\mid\Omega\rangle = \mid 0\rangle_a \otimes \mid 0\rangle_b$ ($a\mid 0\rangle_a = 0; b\mid 0\rangle_b = 0$) является собственным операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ (11):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\lambda)\mid\Omega\rangle &= a(\lambda)\mid\Omega\rangle = \lambda(\lambda - \Delta c^{-1}), \\ \mathbf{D}(\lambda)\mid\Omega\rangle &= d(\lambda)\mid\Omega\rangle = -c^{-1}, \end{aligned} \tag{22}$$

причем,

$$\mathbf{C}(\lambda)\mid\Omega\rangle = 0.$$

В дальнейшем мы будем обозначать жирными буквами последовательности произвольных параметров следующего вида:

$$\{\mathbf{x}\} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Из (21) следует, что вектор состояния (21) может быть записан в виде

$$\mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle = \sum_{m=0}^{N}(-1)^{m+1}e_m(b^{\dagger})^m\mathbf{X}^{N-m}\mid\Omega\rangle, \tag{23}$$

где

$$e_m = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_m}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_m}$$

это элементарная симметрическая функция [19].

Сопряженный N-частичный вектор состояния равен

$$\langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid = \langle \Omega \mid \prod_{j=1}^{N} \mathbf{C}(\lambda_j) = \langle \Omega \mid \sum_{m=0}^{N} (-1)^{m+1} e_m a^m \mathbf{Y}^{N-m} \tag{24}$$

где

$$\langle \Omega \mid \mathbf{B}(\lambda) = 0.$$

Можно показать [10,11], что вектор состояния (21) является собственным вектором матрицы перехода (12)

$$\tau(\mu) | \, \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \rangle = \theta_N(\mu) | \, \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \rangle \,, \tag{25}$$

а, следовательно, и гамильтониана (5), если $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ это корни уравнений Бете, имеющих для данной модели вид

$$c\lambda_n(c\lambda_n - \Delta) = \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq n}}^{N} \frac{\lambda_n - \lambda_j + c}{\lambda_n - \lambda_j - c} \tag{26}$$

при $n = 1, 2, \ldots, N$. Взяв комплексное сопряжение этих уравнений, получим, что сопряженные корни λ_j^* удовлетворяют тем же уравнениям. Это означает, что решениями уравнений являются как вещественные, так и взаимно сопряженные комплексные числа, а, следовательно, $\{\boldsymbol{\lambda}^*\} = \{\boldsymbol{\lambda}\}$. В дальнейшем, через λ_j мы будем обозначать решения уравнений Бете. Параметры μ_j будем считать произвольными.

Собственные значения матрицы перехода (12) представимы в виде

$$\begin{aligned} \theta_N(\mu) &= a(\mu) \prod_{j=1}^{N} f(\mu, \lambda_j) + d(\mu) \prod_{j=1}^{N} f(\lambda_j, \mu) \qquad (27) \\ &= \mu(\mu - \Delta c^{-1}) \prod_{j=1}^{N} (1 - \frac{c}{\mu - \lambda_j}) + c^{-2} \prod_{j=1}^{N} (1 + \frac{c}{\mu - \lambda_j}). \end{aligned}$$

Сопряженный N-частичный вектор состояния (24) является собственным вектором матрицы перехода (12)

$$\langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid \tau(\mu) = \theta_N(\mu) \langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid \tag{28}$$

с тем же собственным значением (27), если $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ являются корнями уравнений Бете (26).

Из уравнения (14) мы находим, что N-частичные собственные энергии гамильтониана (5) равны:

$$\widehat{H} \mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle = E_N \mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle \tag{29}$$
$$E_N = -c^{-2} + c^{-2} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{c}{\lambda_j}\right).$$

Основное состояние гамильтониана (5) соответствует минимальному значению собственной энергии. Набор решений уравнений Бете, определяющих это состояние, будем обозначать как σ_g: $\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\}$.

Рассмотрим состояния построенные операторами (16):

$$\mid \widetilde{\mathbf{\Psi}}_N(\{\boldsymbol{\mu}\})\rangle = \prod_{j=1}^{N} \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda_j) \mid \Omega\rangle, \ \langle \widetilde{\mathbf{\Psi}}_N(\{\boldsymbol{\mu}\}) \mid = \langle \Omega \mid \prod_{j=1}^{N} \widetilde{\mathbf{C}}(\mu_j)\,. \tag{30}$$

В работе [18] было доказано, что на решениях уравнений Бете

$$\mid \widetilde{\mathbf{\Psi}}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle = \nu_N \mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle, \ \langle \widetilde{\mathbf{\Psi}}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid = \nu_N^{-1} \langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid\,. \tag{31}$$

Для рассматриваемой модели

$$\nu_N = \prod_{n=1}^{N} (\Delta - c\lambda_n) = (-1)^N \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{c\lambda_n}\,. \tag{32}$$

При вычислении корреляционных функций мы будем использовать хорошо известную формулу [20, 21] для скалярных произведений векторов состояний интегрируемых моделей. Для рассматриваемой системы она имеет вид

$$S_N(\{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\lambda}\}) = \langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\mu}\}) \mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle \tag{33}$$
$$= c^N \frac{\prod\limits_{j=1}^{N} \prod\limits_{\alpha=1}^{N} (\mu_j - \lambda_\alpha)}{\prod\limits_{j>k} (\mu_k - \mu_j) \prod\limits_{\alpha<\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)} \det T(\{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\lambda}\}),$$

с матричными элементами $N \times N$ матрицы T равными

$$T_{ab} = c^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_a} \tau(\mu_b, \{\boldsymbol{\lambda}\}) \tag{34}$$
$$= \frac{1}{(\mu_b - \lambda_a)^2} \left\{ -a(\mu_b) \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq a}}^{N} (1 - \frac{c}{\mu_b - \lambda_j}) + d(\mu_b) \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq a}}^{N} (1 + \frac{c}{\mu_b - \lambda_j}) \right\}.$$

В этой формуле предполагается, что $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ являются решениями уравнений Бете, а $\{\boldsymbol{\mu}\}$ есть набор произвольных параметров. Квадрат нормы собственных векторов вычисляется по формуле Годена [22]:

$$\mathcal{N}^2 = S_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}, \{\boldsymbol{\lambda}\}) = c^N \prod_{j=1}^{N} d^2(\lambda_j) \prod_{\alpha\neq\beta} \frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta + c}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} \det \Phi(\{\boldsymbol{\lambda}\}), \tag{35}$$

где матричные элементы $N \times N$ матрицы Φ имеют вид

$$\Phi_{ab} = -\frac{\partial}{\partial \lambda_b} \ln \frac{a(\lambda_a)}{d(\lambda_a)} \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq a}}^{M} \frac{\lambda_a - \lambda_k - c}{\lambda_k - \lambda_a - c}. \tag{36}$$

Собственные вектора образуют полную ортогональную систему:

$$\langle \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_1}\}) \mid \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_2}\}) \rangle = \delta_{\sigma_1,\sigma_2}$$
$$\sum_{\sigma} \frac{\mid \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma}\}) \rangle \langle \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma}\}) \mid}{\mathcal{N}_\sigma^2} = 1\,. \tag{37}$$

Индекс σ нумерует наборы независимых решений уравнений Бете (26), а суммирование ведется по всем K наборам независимых решений.

Детерминантное представление (33) можно применить к вычислению элемента перехода оператора уничтожения фотона

$$\langle \boldsymbol{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}'\}) \mid a^n \mid \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \rangle\,, \tag{38}$$

где $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ and $\{\boldsymbol{\lambda}'\}$ это решения уравнений Бете (26) для систем состоящих из N и $N-n$ частиц соответственно. Действительно, заметим, что из определения (10) следует, что $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} C(\lambda) = a$ и, следовательно,

$$\langle \boldsymbol{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\mu}\}) \mid a^n \mid \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \rangle = \frac{1}{\mu^n} \lim_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n\to\infty} S_N(\{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\lambda}\}). \tag{39}$$

Заменив произвольные параметры $\{\boldsymbol{\mu}\}$ решениями уравнений Бете $\{\boldsymbol{\lambda}'\}$, мы получим ответ для элемента (38). Предел в выражении (39) может быть найден с помощью формулы

$$\lim_{v_1, v_2, \dots, v_n \to \infty} \frac{\det\{G(v_j, u_k)\}}{\prod\limits_{M \geqslant j > k \geqslant 1} (v_k - v_j)} = \frac{\det\left\{ \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1}}{\partial v^{j-1}} G(v, u_k) \mid_{v \to \infty} \right\}\Big|_{j=1}^{n}}{\prod\limits_{M \geqslant j > k > n} (v_k - v_j)}, \tag{40}$$

где $G(u, v)$ это произвольная дифференцируемая, по крайней мере M раз, функция от двух переменных. Обозначая

$$V_{jk} \equiv \frac{1}{(j-1)!} \mu_j^{n(n-1)} \frac{\partial^{j-1}}{\partial \mu_j^{j-1}} T(\mu_j, u_k) \mid_{\mu_j \to \infty},$$

мы получим следующий ответ

$$A_{N,n}(\{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\lambda}\}) \equiv \langle \boldsymbol{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\mu}\}) \mid a^n \mid \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \rangle = c^N \frac{\prod\limits_{j=n+1}^{N} \prod\limits_{\alpha=1}^{N} (\mu_j - \lambda_\alpha)}{\prod\limits_{j>k>n} (\mu_k - \mu_j) \prod\limits_{\alpha<\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)} \det T_{(n)}(\{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\lambda}\}). \tag{41}$$

Матричные элементы $N \times N$ матрицы $T_{(n)}$ равны V_{ab} для $a \leqslant n$ и T_{ab} (34) для $a > n$, $1 \leqslant b \leqslant N$. Для того чтобы получить ответ для элемента перехода (38), следует заменить параметры $\{\boldsymbol{\mu}\}$ на решения уравнений Бете для $N - n$ частиц.

Например, для $n = 1$ получим следующее выражение для элемента перехода оператора уничтожения

$$\langle \boldsymbol{\Psi}_{N-1}(\{\boldsymbol{\lambda}'\}) \mid a \mid \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \rangle = c^N \frac{\prod\limits_{j=3}^{N} \prod\limits_{\alpha=1}^{N} (\lambda'_j - \lambda_\alpha)}{\prod\limits_{j>k>2} (\lambda'_k - \lambda'_j) \prod\limits_{\alpha<\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)} \det T_{(1)}(\{\boldsymbol{\lambda}'\}, \{\boldsymbol{\lambda}\}), \tag{42}$$

где матричные элементы $N \times N$ матрицы имеют вид

$$T_{(1)}(\{\boldsymbol{\lambda}'\},\{\boldsymbol{\lambda}\}) = \begin{pmatrix} -1 & T_{12} & \dots & T_{1N} \\ -1 & T_{22} & \dots & T_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & T_{N2} & \dots & T_{NN} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы вычислить элемент перехода оператора рождения, следует взять комплексное сопряжение элемента перехода оператора уничтожения:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}'\}) \mid a^n \mid \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle^* &= \langle \Omega \mid \prod_{j=1}^{N-n} \mathbf{C}(\lambda'_j) a^n \prod_{j=1}^{N} \mathbf{B}(\lambda_j) \mid \Omega\rangle^* \\ &= \langle \Omega \mid \prod_{j=1}^{N} \mathbf{B}^+(\lambda_j)(a^\dagger)^n \prod_{j=1}^{N-n} \mathbf{C}^+(\lambda'_j) \mid \Omega\rangle \\ &= \langle \Omega \mid \prod_{j=1}^{N} \widetilde{\mathbf{C}}(\lambda_j)(a^\dagger)^n \prod_{j=1}^{N-n} \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda'_j) \mid \Omega\rangle \\ &= \frac{\nu'_{N-n}}{\nu_N} \langle \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid (a^\dagger)^n \mid \boldsymbol{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}'\})\rangle . \end{aligned} \tag{43}$$

При выводе мы воспользовались определением (30) и свойством (31), а $\boldsymbol{\lambda}'$ это решения уравнений Бете (26) для $N-n$ частиц. Полученная формула позволяет выразить элемент перехода оператора рождения через определитель:

$$\begin{aligned} A^+_{N,n}(\{\boldsymbol{\lambda}\},\{\boldsymbol{\lambda}'\}) &\equiv \langle \boldsymbol{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid (a^\dagger)^n \mid \boldsymbol{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}'\})\rangle \\ &= c^N \frac{\nu_N}{\nu'_{N-n}} \frac{\prod\limits_{j=n+1}^{N} \prod\limits_{\alpha=1}^{N} (\lambda'_j - \lambda_\alpha)}{\prod\limits_{j>k>n} (\lambda'_k - \lambda'_j) \prod\limits_{\alpha<\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)} \det T^+_{(n)}(\{\boldsymbol{\lambda}'\},\{\boldsymbol{\lambda}\}), \end{aligned} \tag{44}$$

где $T^+_{(n)}(\{\boldsymbol{\lambda}'\},\{\boldsymbol{\lambda}\})$ есть эрмитово сопряженная матрица (41) на решениях уравнений Бете. Полученные представления для элементов перехода (41) и (44) позволяют вычислять различные n-фотонные временные корреляционные функции.

Мы определим n-фотонную временную корреляционную функцию $\langle (a^\dagger)^n a^n(t)\rangle_N$ как среднее по N-частичному основному состоянию модели $\mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\})\rangle$:

$$\langle (a^\dagger)^n a^n(t)\rangle_N = \frac{1}{\mathcal{N}^2_{\sigma_g}} \langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\}) \mid (a^\dagger)^n e^{-i\mathbf{H}t} a^n e^{i\mathbf{H}t} \mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\})\rangle. \quad (45)$$

Воспользовавшись полнотой и ортогональностью (37) собственных векторов гамильтониана (5), получим:

$$\begin{aligned} \langle (a^\dagger)^n a^n(t)\rangle_N &= \sum_\sigma \frac{e^{it(E_N^{\sigma_g} - E^\sigma_{N-n})}}{\mathcal{N}^2_{\sigma_g}\mathcal{N}^2_\sigma} \langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^\sigma\}) \mid (a^\dagger)^n \mid \mathbf{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\})\rangle \\ &\qquad \times \langle \mathbf{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\}) \mid a^n \mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^\sigma\})\rangle \\ &= \sum_\sigma \frac{e^{it(E_N^{\sigma_g} - E^\sigma_{N-n})}}{\mathcal{N}^2_{\sigma_g}\mathcal{N}^2_\sigma} \Big| \langle \mathbf{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\}) \mid a^n \mid \mathbf{\Psi}_{S,N}(\{\boldsymbol{\lambda}^\sigma\})\rangle \Big|^2 \frac{\nu^\sigma_{N-n}}{\nu^{\sigma_g}_N}\,, \quad (46) \end{aligned}$$

где суммирование ведется по наборам решений уравнений Бете (26) для $N-n$ частиц $\boldsymbol{\lambda}^\sigma$, Подставляя формулы (29), (32), (35) и (41) в (46), получим окончательный ответ.

Из формулы (9) следует, что $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} B(\lambda) = b^\dagger$. Повторяя вывод для элемента перехода оператора уничтожения a (38), получим ответ для элемента перехода оператора рождения n фотонов в яме b:

$$\begin{aligned} B^+_{N,n}(\{\boldsymbol{\lambda}\}, \{\boldsymbol{\lambda}'\}) &\equiv \langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid (b^\dagger)^n \mid \mathbf{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}'\})\rangle \\ &= c^N \frac{\prod\limits_{j=n+1}^{N} \prod\limits_{\alpha=1}^{N} (\lambda'_j - \lambda_\alpha)}{\prod\limits_{j>k>n} (\lambda'_k - \lambda'_j) \prod\limits_{\alpha<\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)} \det T^+_{(n)}(\{\boldsymbol{\lambda}'\}, \{\boldsymbol{\lambda}\})\,, \quad (47) \end{aligned}$$

где матрица T определена в (41), (44), а λ, λ' являются решениями соответствующих уравнений Бете. Выражение (47) отличается от (44) множителем ν_N/ν'_{N-n} и, следовательно,

$$\langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\}) \mid (b^\dagger)^n \mid \mathbf{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}'\})\rangle = \langle \mathbf{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}'\}) \mid a^n \mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}\})\rangle\,.$$

Корреляционная функция

$$\langle (b^\dagger)^n a^n(t)\rangle_N = \frac{1}{\mathcal{N}^2_{\sigma_g}} \langle \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\}) \mid (b^\dagger)^n e^{-i\mathbf{H}t} a^n e^{i\mathbf{H}t} \mid \mathbf{\Psi}_N(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\})\rangle$$
$$= \sum_\sigma \frac{e^{it(E_N^{\sigma_g} - E_{N-n}^{\sigma})}}{\mathcal{N}^2_{\sigma_g}\mathcal{N}^2_{\sigma}} \Big| \langle \mathbf{\Psi}_{N-n}(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma_g}\}) \mid a^n \mid \mathbf{\Psi}_{S,N}(\{\boldsymbol{\lambda}^{\sigma}\})\rangle \Big|^2, \quad (48)$$

Полученные ответы для временных корреляционных функций позволяют вычислить, в частности, запутанность Эйнштейна–Подольского–Розена, величину важную в квантовой метрологии. Она характеризуется знаком наблюдаемой

$$\mathcal{E} = \langle a^\dagger b\rangle_N \langle b^\dagger a\rangle_N - \langle a^\dagger a b^\dagger b\rangle_N \,.$$

Считается, что ямы пространственно запутаны, если $\mathcal{E} > 0$.

Другой важной величиной, которая измеряет видимость интерференционных полос, дается выражением

$$\alpha = \frac{2|\langle a^\dagger b\rangle_N|}{N}\,. \quad (49)$$

Эта величина характеризует степень когерентности между двумя ямами.

Результаты, полученные в статье для временных корреляционных функций, позволят детально изучить динамику запутанности и видимости.

Литература

1. G. Milburn, J. Corney, E. Wright, D. Walls, *Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential.* — Phys. Rev. **A 55**, 4318 (1997).
2. D. Witthaut, F. Trimborn, S. Wimberger, *Dissipation induced coherence of a two-mode Bose-Einstein condensate.* — Phys. Rev. Lett. **101**, 200402 (2008).
3. E. Boukobza, M. Chuchem, D. Cohen, A. Vardi, *Phase-diffusion dynamics in weakly coupled Bose-Einstein condensates.* — Phys. Rev. Lett. **102**, 180403 (2009).
4. T. Pudlik, H. Hennig, D. Witthaut, D. Campbell, *Dynamics of entanglement in a dissipative Bose-Hubbard dimer.* — Phys. Rev. **A 88**, 063606 (2013).
5. F. Trimborn, D. Witthaut, V. Kegel, H. J. Korsch, *Nonlinear Landau-Zener tunneling in quantum phase space.* — New J. Phys. **12**, 053010 (2010).
6. I. Tikhonenkov, M. G. Moore, A. Vardi, *Robust sub-shot-noise measurement via Rabi-Josephson oscillations in bimodal Bose-Einstein condensates.* — Phys. Rev. **A 83**, 063628 (2011).

7. M. Chuchem, K. Smith-Mannschott, M. Hiller, T. Kottos, A. Vardi, D. Cohen, *Quantum dynamics in the bosonic Josephson junction.* — Phys. Rev. **A 82**, 053617 (2010)
8. V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, *Quantum-Enhanced Measurements: Beating the Standard Quantum Limit.* — Science **306**, 1330 (2004).
9. D. Jaksch, H.-J. Briegel, J. Cirac, C. Gardiner, P. Zoller, *Entanglement of Atoms via Cold Controlled Collisions.* — Phys. Rev. Lett. **82**, 1975 (1999).
10. L. D. Faddeev, *Quantum completely integrable models of field theory.* — Sov. Sci. Rev. Math. C, **1** (1980), 107–160; In: 40 Years in Mathematical Physics, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 2, World Sci., Singapore, 1995, pp. 187–235.
11. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments.* — Lecture Notes Phys., **151** (1982), pp. 61–119.
12. V. Z. Enol'skii ,V. B. Kuznetsov , M. Salerno, *On the quantum inverse scattering method for the DST dimer.* — Phys. **D 68**, 138 (1993).
13. J. Links, K. Hibberd, *Bethe Ansatz Solutions of the Bose–Hubbard Dimer.* — SIGMA **2**, Paper 095 (2006).
14. R. Orús, S. Dusuel, J. Vidal, *Equivalence of Critical Scaling Laws for Many-Body Entanglement in the Lipkin-Meshkov-Glick Model.* — Phys. Rev. Lett. **101**, 025701 (2008).
15. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen, *Exact solution of generalised Tavis-Cummings models in quantum optics.* — J. Phys. A **29**, 6305 (1996).
16. Н. М. Боголюбов, П. П, Кулиш, *Точно-решаемые модели квантовой нелинейной оптики.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **398**, 26 (2012).
17. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, Москва, 1992.
18. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
19. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* Oxford University Press, Oxford, 1995.
20. Н. А. Славнов *Вычисление скалярных произведений волновых функций и формфакторов в рамках алгебраического анзаца Бете.* — Теор. Матем. Физ. **79**, 232 (1989).
21. N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain.* — Nucl. Phys. **B 516**, 647 (1999).
22. V. E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions.* — Comm. Math. Phys. **86**, 391 (1982).
23. M. Hillery, M. Zubairy, *Entanglement Conditions for Two-Mode States.* — Phys. Rev. Lett. **96**, 050503 (2006).
24. Q. He, M. Reid, T. Vaughan, C. Gross, M. Oberthaler, P. Drummond, *Einstein-Podolsky-Rosen Entanglement Strategies in Two-Well Bose-Einstein Condensates.* — Phys. Rev. Lett. **106**, 120405 (2011).

Bogoliubov N. M. Time-dependent correlation functions for a bimodal Bose–Hubbard model.

The bimodal Bose–Hubbard model is studied. The application of the Quantum Inverse Method allows to calculate the time-dependent correlation functions of the model. Form-factors of the bosonic creation and annihilation operators in the wells are expressed in the determinantal form.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
Санкт-Петербург, 191023
Университет ИТМО,
Кронверкский пр. 49,
Санкт-Петербург, 197101
E-mail: bogoliubov@pdmi.ras.ru

Поступило 18 марта 2015 г.