Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 433, 2015 г.

М. В. Бабич

ДИАГРАММЫ ЮНГА И СТРАТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА КВАДРАТНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ.

**Петру Петровичу Кулишу
в связи с его семидесятилетием**

§1. Введение

В работах [3,4] описан новый класс функций на (ко)присоединённых орбитах общей линейной группы $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$. Из функций этого класса можно выбирать координатные наборы. Элементы набора сопряжены друг-другу относительно канонической скобки Ли-Пуассона, образуют координаты Дарбу на орбите. Устоявшегося названия у этих координат пока нет, предлагается назвать их *проекционно-флаговыми*, поскольку основным инструментом для их построения является проектирование вдоль линейных пространств, образующих флаги, а просто слово "*проекционный*" слишком близко к слову "*проективный*".

На каждой орбите существует несколько наборов таких функций, наборов проекционно-флаговых координат. Для описания всего множества наборов потребовалось развить некоторую технику, изложению этой техники и посвящена большая часть данной статьи. В основании проблемы лежит *громоздкость описания самой орбиты* – матрицы могут иметь произвольное количество собственных значений, для каждого из собственных значений возможен любой размер жордановых блоков, и количество этих блоков тоже любое. Поскольку зависимость от каждого из параметров, заведомо, нетривиальная (хотя бы через размерность орбиты), то и сложность ответа – *размеченная диаграмма Юнга*, – адекватна задаче, ожидать чего-то много более простого не приходится.

Итак, рассмотрим множество всех матриц $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$, и будем трактовать его элемент A как линейное преобразование комплексного N-мерного пространства, в котором зафиксирован некоторый базис: $\mathrm{gl}(N) \simeq$

Ключевые слова: диаграмма Юнга, Жорданова форма, инвариантное подпространство, стратификация пространства матриц.

$\mathrm{End}\ \mathbb{C}^N$. Задать $A \in \mathrm{gl}(N)$ это значит, каким-либо образом, описать преобразование $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N$. Любое линейное преобразование задаёт в пространстве, где оно действует, систему флагов. Речь далее идёт о флагах, которые, в случае диагонализуемого преобразования, состоят из линейных оболочек увеличивающегося количества собственных пространств – каждое упорядочение собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N_{\max}}$ порождает такой флаг:

$$\ker(A - \lambda_1 \mathrm{I}) \subset \ker(A - \lambda_1 \mathrm{I}) + \ker(A - \lambda_2 \mathrm{I}) \subset \ldots$$

Характерным свойством этих флагов является следующее. Если базис выбран так, что координатные подпространства $E_1,\ E_1 + E_2,\ E_1 + E_2 + E_3,\ \ldots,\ E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_{N_{\max}} = \mathbb{C}^N$ совпадают с пространствами флага, то матрица преобразования в этом базисе блочно-треугольная, со скалярными диагональными блоками. Следовательно, чтобы задать преобразование в таком базисе, достаточно задать набор из $N_{\max} - 1$-го отображения $P_k \in \mathrm{Hom}(\sum\limits_{i>k} E_i, E_k)$. Информация же о сопряжённом классе преобразования будет содержаться в блочно-диагональной части этой матрицы, представляющей из себя набор скалярных матриц $\lambda_1 \mathrm{I}, \lambda_2 \mathrm{I}, \ldots, \lambda_{N_{\max}}$.

Именно эту, *диагональную часть блочно-треугольной матрицы задают размеченные диаграммы*, описанию которых посвящены первые три параграфа. В диагонализуемом случае количество столбцов диаграммы равно количеству собственных чисел, высóты (глуби́ны) столбцов равны размерностям собственных подпространств. В некоторые клетки вписаны (комплексные) числа. На каждой глубине h имеется столько клеток со вписанными в них числами, каково количество собственных пространств размерности h – такие клетки мы называем *размеченными*. В размеченные клетки записываются собственные числа. Порядок расположения размеченных клеток задаёт порядок блоков на диагонали матрицы. Описанию связи между диаграммой и порядком диагональных блоков посвящены четвёртый и пятый параграфы – “**Размеченные диаграммы**” и “**Суммирование диаграм**”. Заметим тут, что некоммутативность, введённого ниже, суммирования (размеченных) диаграмм обеспечивает кодирование информации о упорядочении диагональных блоков.

Операция суммирования размеченных диаграмм, эквивалентная упорядочению диагональных блоков, ассоциативна. Однако дальнейшие построения, позволяющие восстановить преобразование A по предлагаемому набору данных, уже *будут зависеть* от группировки слагаемых даже при сохранении их порядка в сумме. Эта операция, названная разборкой диаграммы, описана в последнем парарафе, она задаётся фиксированием *скобочной структуры* на сумме элементарных диаграмм, или, эквивалентно, на первой, самой длинной строчке (на множестве столбцов). Структура скобок должна быть вложенной – для любой пары скобок, одна из них вложена в другую. Кроме того, между ближайшими, вложенными друг в друга с помощью скобок, наборами слагаемых, расположено ровно одно слагаемое (*элементарная*, или *простейшая* диаграмма). Разным расположениям скобок будут соответствовать разные наборы координатных функций. Последовательно отщепляя элементарные, "исчерпаем" диаграмму, получив, вместо неё, упорядоченное множество простейших диаграмм.

Отвлекаясь от цели данной статьи, а именно от описания *устройства множества* проекционно-флаговых координат, отметим, что один элемент этого множества, один координатный набор, устроен следующим образом. Первая часть координат, "p-набор", это уже упомянутые отображения

$$P_k \in \mathrm{Hom}(\sum_{i>k} E_i, E_k), k = 1, \ldots, N_{\max} - 1,$$

точнее – матричные элементы отображений P_k, записанных в какомнибудь базисе. Вторая часть, "q-набор", представляет из себя аналогичный набор матричных элементов отображений Q_k, записанных в том же базисе. Отображения

$$Q_k \in \mathrm{Hom}(E_k, \sum_{i>k} E_i), k = 1, \ldots, N_{\max} - 1$$

однозначно "кодируют" положение в пространстве описанного выше флага, флага, определяемого отображением A.

В заключение приведём один красивый результат.

Для любой матрицы A размерность многообразия матриц, подобных ей, равна

$$N^2 - \sum_{i,j} (\mathrm{rank}(A - \lambda_i \mathrm{I})^{j-1} - \mathrm{rank}(A - \lambda_i \mathrm{I})^j)^2$$

сумма по всем собственным значениям λ_i, и всем j для которых $\ker(A - \lambda_i \mathrm{I})^j \neq \ker(A - \lambda_i \mathrm{I})^{j-1}$.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность П. П. Кулишу, именно он указал мне, что адекватным инструментом для описания подобных объектов являются диаграммы Юнга. Благодаря его совету и удалось решить задачу, описать множество всех проекционно-флаговых координат на (ко)присоединённых орбитах $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$.

§2. Диаграммы Юнга.

Обозначим через $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(N)$ множество всевозможных разбиений числа N на сумму положительных слагаемых. Определим функцию $\mathfrak{y} : \mathrm{gl}(N) \to \mathbb{Y}$, которая каждой $A \in \mathrm{gl}(N)$ ставит в соответствие неупорядоченный набор натуральных чисел

$$A \xrightarrow{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}(A) = \Big\{ \bigsqcup_{i,j} \varkappa(\lambda_i, j) \Big\} \in \mathbb{Y},$$

где $\varkappa(\lambda_i, j) := \dim\ker(A - \lambda_i \mathrm{I})^j - \dim\ker(A - \lambda_i \mathrm{I})^{j-1} \in \mathbb{N}$. Пары чисел $(\lambda_i, j) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$ пробегают все значения, для которых $\varkappa(\lambda_i, j)$ не ноль, то есть числа λ_i – собственные значения.

Множества уровня функции $\mathfrak{y}$ разбивают всё $\mathrm{gl}(N)$ на непустые множества, занумерованные всевозможными разбиениями $\mathscr{Y} \in \mathbb{Y}$:

$$\mathscr{Y} = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n^A}\},\ \kappa_1 + \dots + \kappa_{n^A} = N,\ \kappa_n \in \mathbb{N}.$$

Для каждого значения $\mathscr{Y} \in \mathbb{Y}$ обозначим через $\{\cup\mathcal{O}\}_{\mathscr{Y}}$ множество уровня функции $\mathfrak{y}$:

$$A \in \{\cup\mathcal{O}\}_{\mathscr{Y}} \Leftrightarrow \mathfrak{y}(A) = \mathscr{Y}.$$

Очевидно, что все матрицы, подобные данной (орбиты присоединённого действия $\mathrm{GL}(N)$) лежат в одном $\{\cup\mathcal{O}\}_{\mathscr{Y}}$, однако $\mathfrak{y}$ это более грубый инвариант сопряжённого класса, чем, скажем, Жорданова форма. Одно семейство $\{\cup\mathcal{O}\}_{\mathscr{Y}}$ содержит матрицы, имеющие разные собственные значения, и даже имеющие разное количество Жордановых клеток. Несмотря на это, орбиты, лежащие в одном $\{\cup\mathcal{O}\}_{\mathscr{Y}}$ во многом схожи, в частности, все они имеют одинаковую размерность.

Пример 1 (Матрицы 2×2)**.** *Поскольку число 2 разбивается на суммы двумя способами:* $\mathbb{Y}(2) = \{\{1,1\},\{2\}\}$*, то имеются всего два случая.*

- *Первый случай* $\mathscr{Y} = \{1,1\}$*, тут* $\{\cup\mathcal{O}\}_{\mathscr{Y}}$ *это четырёхмерное* $\mathrm{gl}(2) \setminus \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}\}$*, расслоенное на двумерные квадрики*

$$A \in \mathcal{O}(J_{\lambda_1,\lambda_2}) \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathrm{I}) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2, A \not\sim \mathrm{I}.$$

Слои параметризованы парой собственных значений. Жордановы матрицы лежат на слоях, параметризованных парами совпадающих чисел $\lambda_1 = \lambda_2$.

- *Второй случай $\mathscr{Y} = \{2\}$ соответствует нульмерным орбитам, $\{\cup \mathcal{O}\}_{\mathscr{Y}}$ это комплексная прямая, погруженная в $\mathrm{gl}(2)$, прямая состоит из всех скалярных матриц $A \sim \mathrm{I}$.*

Вернёмся к изложению. Каждой матрице $A \in \mathrm{End}\, \mathbb{C}^N$ поставлено в соответствие разбиение $\mathscr{Y} = \mathfrak{y}(A)$ числа N на натуральные слагаемые $\sum\limits_{i,j} \varkappa(\lambda_i, j) = N$. Множество разбиений изоморфно множеству "пустых" диаграмм Юнга, имеющих N ни чем не заполненных клеток. Это множество, так же как и множество разбиений числа N на слагаемые, обозначим $\mathbb{Y}$.

Далее мы будем, некоторым образом, заполнять часть клеток диаграмм – "размечать" диаграмму. Для обозначения множества этих, специальным образом размеченных, диаграмм будем использовать обозначение $\overleftarrow{\mathbb{Y}}$. Размеченные диаграммы будем обозначать рукописными буквами со стрелочками: $\overleftarrow{\mathscr{Y}} \in \overleftarrow{\mathbb{Y}}$. Очевидным образом определена операция "забывания разметки", отображение-проекция $\overleftarrow{\mathbb{Y}} \to \mathbb{Y}$. Прежде чем исследовать размеченные диаграммы, введём, однако, необходимые понятия и определения для описания "пустых" диаграмм.

Диаграмма Юнга представляет из себя часть решётки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ограниченную с двух сторон осями координат, а с третьей стороны ломаной (ступенчатой, *целочисленной*) линией, которую мы будем называть *лестницей*. Точное определение дадим чуть ниже. Лестница полностью диаграмму определяет. Клетку диаграммы можно ассоциировать с её центром, точкой с натуральными значениями координат. Ограничения, которым удовлетворяют эти координаты, удобно задать, описав лестницу.

Направим одну из осей направо, и назовём её осью абсцисс, а другую ось вниз, и назовём её осью ординат. Обозначим координату по оси абсцисс n, а по оси ординат κ. Обе координаты принимают натуральные значения $n, \kappa \in \mathbb{N}$. Максимальное значение абсциссы обозначим n^A, максимальное значение ординаты обозначим $\kappa_{\max}$. Если через $\mathbb{N}_k$ обозначить отрезок натурального ряда: $\{1, 2, \ldots, k\} = \mathbb{N}_k$, то $\kappa \in \mathbb{N}_{\kappa_{\max}}$, $n \in \mathbb{N}_{n^A}$ Точки (клетки, ячейки, вершины) диаграммы будем обозначать $\mathfrak{z}$, так что $\mathfrak{z}(n, \kappa)$ это клетка диаграммы, лежащая в ряду κ и столбце n.

Определение 1. *Назовём пару клеток, у которых одна из координат совпадает, а другая отличается на единицу "***клетками-соседями***".*

Определение 2. *Назовём клетку, у которой либо снизу, либо справа нет "клетки-соседа"* **граничной** *клеткой.*

Определение 3. *Множество граничных клеток назовём* **лестницей**.

Определение 4. *Назовём клетку, у которой ни снизу, ни справа нет "клеток-соседей"* **краем ступеньки**.

Замечание 1. *Нарисуем непрерывную ломаную линию, с вершинами в некоторых ячейках диаграммы, ограничивающую многоугольник, целочисленные точки которого являются вершинами диаграммы. Пусть многоугольник получился не вырожденный. Для матрицы с одним собственным значением это случай, когда все Жордановы блоки матрицы A имеют размер 2×2 минимум, и если какой-то размер блока присутствует, то количество таких блоков не менее двух.*

В этом случае **края ступенек – это "внешние" углы многоугольника** *(величиной $\pi/2$), не лежащие на осях. Вершины "внутренних" углов (величиной $3\pi/2$) вообще не являются граничными(!), они не принадлежат лестнице.*

Определение 5. *Назовем граничные вершины с той же ординатой, что и у края ступеньки,* **горизонтальной границей** *данной ступеньки, а граничные вершины с той же абсциссой, что и у края ступеньки, –* **вертикальной границей** *данной ступеньки. Самой* **ступенькой** *назовём объединение горизонтальной и вертикальной её границ (частей). Нумеровать ступеньки будем переменной $m \in \mathbb{N}$* **"снизу-слева вверх-направо"**, *то есть самая нижняя ступенька является первой.*

Таким образом, край ступеньки – это пересечение горизонтальной и вертикальной её частей, ступенька имеет *длину* и *высоту*[1].

Определение 6. Длина *ступеньки – это количество вершин на горизонтальной части ступеньки,* **высота** *ступеньки – это количество вершин на вертикальном участке ступеньки.*

[1]Мерой целочисленного "отрезка" мы считаем количество вершин, на нём лежащих, число, на единицу большее, чем его геометрическая длина.

Обозначим полное количество ступенек в диаграмме $m_{\max}$. Как уже определено, ступеньки нумеруются переменной $m \in \mathbb{N}_{m_{\max}}$. Определим координатные функции края ступеньки l и h.

Определение 7. *Абсциссу края ступеньки номер m обозначим $l(m)$, ординату этой ступеньки обозначим $h(m)$.*

Таким образом, край ступеньки номер m это клетка $\mathfrak{z}(l(m), h(m))$.

Определение 8. *Назовём* **полкой номер** *m, и обозначим $\{\mathbf{l}\}_m$, всё множество клеток диаграммы с ординатой $h(m)$.*

Полка $\{\mathbf{l}\}_m = \bigcup\limits_{n=1}^{l(m)} \mathfrak{z}(n, h(m))$ – это весь ряд диаграммы от края ступеньки номер m до оси ординат, продолжение горизонтальной части ступеньки номер m в сторону уменьшения координаты n.

Длину ступеньки m будем обозначать $\eta(m)$, высоту ступеньки m будем обозначать $\zeta(m)$. Если полную высоту (глубину) диаграммы обозначить $\kappa_{\max} := h(1)$, то получится $n^A = l(m_{\max})$, и

$$l(m) = \sum_{i=1}^{m} \eta(i), \quad h(m) = \kappa_{\max} - \sum_{i=1}^{m-1} \zeta(i).$$

Для иллюстрации этих обозначений рассмотрим два крайних случая:

- Диаграмма имеет форму прямоугольника. В этом случае имеется одна ступенька, $m_{\max} = 1$. Длина этой единственной ступеньки равна максимальному значению абсцисс звеньев n^A, а высота ступеньки равна максимальному значению ординат звеньев $\kappa_{\max}$. Единственная полка совпадает с горизонтальной границей этой ступеньки.
- Диаграмма составлена из вершин-точек с натуральными координатами, лежащих внутри прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами на осях. В этом случае, если на стороне треугольника лежит L вершин, то $n^A = L$, имеется $m_{\max} = L$ ступенек, все ступеньки имеют единичную и длину и высоту. Каждый ряд клеток диаграммы является полкой, нумерованы они снизу вверх.

Дадим ещё одно, важное в дальнейшем, определение.

Определение 9. *Диаграмма $\mathscr{Y}_0$, называется подчинённой диаграмме $\mathscr{Y}$ если для любой ступеньки лестницы $\mathscr{Y}_0$, лестница $\mathscr{Y}$ обязательно* *имеет ступеньку на той же глубине, и эта ступенька $\mathscr{Y}$ не у́же, чем соответствующая ступенька $\mathscr{Y}_0$ (длина её не меньше). Диаграмма $\mathscr{Y}$ называется подчиняющей $\mathscr{Y}_0$.*

У подчинённой диаграммы и ступенек не больше и они (те что есть) не длиннее. Это определение вводит на множестве диаграмм отношение частичного порядка.

§3. Диаграмма Юнга матрицы.

Поставим в соответствие каждой матрице диаграмму Юнга, несущую некоторую специфическую, информацию о её, матрицы, Жордановой структуре.

Определение 10. *Назовём диаграммой Юнга $\mathfrak{y}(A)$, соответствующей матрице A, такую диаграмму, что в качестве высот столбцов она имеет слагаемые суммы*

$$\sum_{ij} \dim\ker(A-\lambda_i \mathrm{I})^j - \dim\ker(A-\lambda_i \mathrm{I})^{j-1},$$

упорядоченные по невозрастанию. Сумма тут по всем различным парам $(\lambda_i, j) \in \mathbb{C}\times\mathbb{N}$, дающим ненулевые слагаемые.

Это определение диаграммы матрицы "по столбцам". Та же самая диаграмма может быть задана и "по строкам".

У диаграммы $\mathfrak{y}(A)$ номер ступеньки нумерует размер имеющихся Жордановых блоков, от меньшего к большему: номеру $m=1$ соответствует самый маленький размер Жордановых блоков – "размер №1". Номеру $m=2$ соответствует следующий размер блоков – "размер №2", номеру $m_{\max}$ соответствует самый большой их размер – "размер №$m_{\max}$". Высота каждой ступеньки равна количеству Жордановых блоков данного размера. Длина полки m равна сумме, по собственным значениям, размеров Жордановых блоков, причём тут суммируются размеры (количества их диагональных элементов) тех блоков, что имеют *номер* размера не больше m. То есть суммируем длины диагоналей (или сторон) Жордановых блоков с размерами №1,№2, …,№m.

Замечание 2. *Количество ступенек $m_{\max}$ лестницы, это количество различных размеров Жордановых клеток, количество точек роста функций $\varkappa(\lambda_s, j) = \dim\ker(A-\lambda_s \mathrm{I})^j - \dim\ker(A-\lambda_0 \mathrm{I})^{j-1}$ от натуральнозначной переменной j. Точка роста $j=j_m$ считается без учёта кратности, то есть если $j=j_m$ это точка роста для* *нескольких различных собственных значений, то она считается за одну. В этом случае длины ступенек, соответствующих разным собственным значениям, сложатся и эта ступенька будет длиннее каждой.*

Замечание 3. *Величина* $\dim\ker(A-\lambda_0\,\mathrm{I})^j - \dim\ker(A-\lambda_0\,\mathrm{I})^{j-1}$ *равна количеству Жордановых блоков, соответствующих* λ_0, *и размером не менее* $j \times j$, *поэтому величина* n^A *равна сумме, по всем собственным значениям, размеров их самых больших Жордановых блоков.*

Пусть таперь матрица имеет единственное собственное значение.

Замечание 4. *Если* A *имеет единственное собственное значение* $\lambda = \lambda_0$, *то* $\mathfrak{y}(A)$ *это диаграмма, у которой количество клетокзвеньев, лежащих на линии* $n = j$ *и левее равно* $\dim\ker(A-\lambda_0\,\mathrm{I})^j$.

Замечание 5. *Если у матрицы одно собственное значение, то длина* $h(m)$ *полки* m *это длина соответствующей Жордановой цепочки. Иными словами, длина полки* $h(m)$ *это размер Жорданова блока* $h(m) \times h(m)$, *того блока, чей номер размера* №m. *Размеры считаем от меньшего к большему, например, если есть простые собственные значения (без присоединённых векторов), то их размер, заведомо, наименьший (№1), и в этом случае* $h(1) = 1$. *Высота ступеньки это количество Жордановых цепочек (блоков) данного размера.*

Замечание 6. *Клетки диаграммы, построенной по матрице с единственным собственным значением* λ_0, *можно заполнить векторами какого-нибудь Жорданова базиса таким образом, что левым соседом, если такой имеется, каждого вектора будет его "*$A - \lambda_0\mathrm{I}$*"-образ, и собственными векторами заполнить те клетки, у которых нет левых соседей.*

Заметим, напоследок, что отображение множества матриц с единственным собственным значением в множество диаграмм сюрьективно:

Предложение 1. *Для каждой диаграммы существует матрица, у которой конструкция корневого пространства будет изображаться данной диаграммой.*

Определим теперь размеченные диаграммы, а так же класс размеченных диаграмм, соответствующих данной матрице.

§4. Размеченные диаграммы.

Определение 11. *Размеченной диаграммой назовём диаграмму, у которой на каждой полке выделены несколько клеток. Количество этих выделенных клеток равно длине ступеньки на данной полке. В каждую из выделенных клеток вписано какое-нибудь комплексное число.*

Другими словами, в том ряду, где лежит край ступеньки, в некоторые клетки вписаны числа. Всего таких, заполненных, клеток с числами в ряду столько, какова длина ступеньки на этой глубине. Обозначать наличие разметки у диаграммы $\mathscr{Y}$ будем "обратной стрелкой": $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$. Такое обозначение выбрано, чтобы подчеркнуть, что не вводится структуры векторного пространства.

Примером размеченной диаграммы является такая, у которой числами заполнены все нижние клетки. Однако, по данному определению, числа эти можно "распределять по полке", то есть убирать с горизонтальной части ступеньки и вписывать в произвольные ячейки той же полки, то есть можно числа переставлять, сохраняя ординату клетки со вписанным числом неизменной.

Чтобы определить, какие из размеченных диаграмм соответствуют данной матрице, сначала определим одну такую диаграмму (представителя), а потом зададим группу преобразований, орбита которой даст искомое множество размеченных диаграмм, соответствующих данной матрице. Группой этой будет подгруппа группы всех перестановок клеток. Подгруппа определяется условием, что её элементы действуют "на полках", не меняя ординат отмеченных клеток (остальные клетки неразличимы).

Упорядочим, произвольным образом, собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ матрицы A. Напомним, что диаграмма $\mathfrak{y}(A)$, соответствующая матрице A, имеет в качестве столбцов упорядоченные (переменной n) по невозрастанию, столбцы клеток высотой $\varkappa(\lambda_i, j)$:

$$\varkappa(\lambda_{i_n}, j_n) \geqslant \varkappa(\lambda_{i_{n+1}}, j_{n+1}).$$

Определение 12. *В нижней клетке каждого столбца диаграммы* $\mathfrak{y}(A)$ *запишем то значение* λ_{i_n}*, которому данный столбец высоты* $\varkappa(\lambda_{i_n}, j_n)$ *соответствует. Среди столбцов одной высоты, числа* λ_{i_n}

упорядочены по индексу (номеру собственного значения):

$$\left.\begin{array}{l}\varkappa(\lambda_{i_{n'}}, j_{n'}) = \varkappa(\lambda_{i_{n''}}, j_{n''}) \\ n' < n''\end{array}\right\} \Longrightarrow i_{n'} \leqslant i_{n''}.$$

Так размеченную диаграмму обозначим $\overleftarrow{\mathfrak{y}}(A)$ *и назовём* **стандартно-размеченной диаграммой, соответствующей матрице** A *(при данном упорядочении собственных чисел).*

Определение 13. *Будем говорить, что размеченная диаграмма* $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$, **соответствует матрице** A, *если на каждой её полке то же множество чисел, что и у стандартно размеченной* $\overleftarrow{\mathfrak{y}}(A)$.

Можно поступить и чуть иначе. Сначала определить *отображение стандартизации размеченной диаграммы*, при котором все числа на каждой полке упорядочиваются в соответствии с порядком, заданным на множестве собственных чисел, и записываются как можно правее – на горизонтальной границе ступеньки. Потом, воспользовавшись уже имеющейся стандартной диаграммой-представителем $\overleftarrow{\mathfrak{y}}(A)$, дать эквивалентное определение класса диаграмм, соответствующих A.

Определение 14. *Множество размеченных диаграмм, соответствующих матрице A, это прообраз отображения стандартизации элемента* $\overleftarrow{\mathfrak{y}}(A)$.

§5. Суммирование диаграмм.

Определим, очевидно, коммутативную, операцию суммирования "пустых" диаграмм.

Определение 15. *Суммой нескольких диаграмм назовём диаграмму, строки которой составлены из соответствующих (расположенных на одной глубине) строк слагаемых. Обозначать сумму будем знаком "+":* $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}_1 + \mathscr{Y}_2$.

Эквивалентное определение на языке столбцов:

Определение 16. *Суммой нескольких диаграмм назовём диаграмму, составленную из всех столбцов слагаемых, упорядоченных по невозрастанию высоты.*

Пусть у матрицы A есть несколько собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Рассмотрим преобразование $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \mathbb{C}^N$, матрицей которого является A. Выберем, произвольным образом, в каждом из корневых подпространств какой-нибудь базис и рассмотрим набор диаграмм $\mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_2, \ldots$

матриц преобразований, являющихся сужениями $\mathcal{A}$ на корневые подпространства соответствующих собственных значений.

Предложение 2. *Диаграмма $\mathfrak{y}(A)$ матрицы A является суммой диаграмм $\mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_2, \ldots$ матриц сужений $\mathcal{A}$ на корневые пространства.*

Определим теперь сумму *размеченных* диаграмм Юнга. Суммирование размеченных диаграмм будет, в отличие от суммы "пустых" диаграмм, *не коммутативно*, хотя стандартизации сумм, взятых в любом порядке, будут одинаковы. Суммирование, так же, будет коммутировать и с "операцией забывания разметки", превращающей размеченную диаграмму в "пустую", с той же лестницей.

Определение 17. *Суммой нескольких размеченных диаграмм, взятых в некотором порядке, назовём размеченную диаграмму, соответствующие строки которой которой составлены, без изменения порядка, из строк слагаемых. Обозначать сумму будем знаком "$\vec{+}$": $\overleftarrow{\mathscr{Y}} = \overleftarrow{\mathscr{Y}}_1 \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}}_2$.*

Теперь понятие подчинённости диаграмм можно распространить и на размеченные диаграммы[2].

Определение 18. *Размеченная диаграмма $\overleftarrow{\mathscr{Y}_0}$, называется подчинённой размеченной диаграмме $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$, если найдутся размеченные диаграммы $\overleftarrow{\mathscr{Y}}', \overleftarrow{\mathscr{Y}}''$ такие, что $\overleftarrow{\mathscr{Y}} = \overleftarrow{\mathscr{Y}}' \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}_0} \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}}''$. Допускается, что в сумме не обязательно присутствуют все слагаемые, может не быть одного из слагаемых $\overleftarrow{\mathscr{Y}}', \overleftarrow{\mathscr{Y}}''$.*

§6. Разборка диаграммы Юнга.

Легко видеть, что отношение подчинённости согласовано с операцией суммы диаграмм, причём как размеченых, так и пустых.

Предложение 3. *Если размеченная диаграмма $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$ является суммой диаграмм $\overleftarrow{\mathscr{Y}_1}, \overleftarrow{\mathscr{Y}_2}, \ldots$:*

$$\overleftarrow{\mathscr{Y}} = \overleftarrow{\mathscr{Y}_1} \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}_2} \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}_3} \vec{+} \ldots \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}_{n'}},$$

то отрезок суммы (несколько идущих подряд слагаемых)

$$\overleftarrow{\mathscr{Y}_{n'}} \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}_{n'+1}} \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}_{n'+2}} \vec{+} \ldots \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}_{n''}}, \quad n'' \geqslant n'$$

подчинён диаграмме $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$.

[2] Это понятие родственно понятиям подразбиения и равносоставленности

Таким образом суммирование диаграмм, как размеченных, так и пустых, согласовано с их подчинённостью. Сумма двух диаграмм подчиняет диаграмму-слагаемое. Определим теперь обратную операцию.

Определение 19. ***Разбиением*** *диаграммы назовём такой набор диаграмм, что их сумма равна исходной. Набор упорядоченный, если диаграммы размечены.*

Очевидно, что каждое из слагаемых в разбиении данной диаграммы подчинено ей.

Определение 20. *Назовём диаграмму* ***элементарной****, если она имеет единственную ступеньку, и ступенька эта единичной длины.*

Другими словами, элементарная диаграмма состоит из одного столбца, длины всех строк её единичны.

Элементарную диаграмму имеет скалярная матрица (пропорциональная единичной), матрица гомотетии. Размеченная элементарная диаграмма представляет из себя столбец клеток, у которого в нижнюю клетку записано комплексное число, это коэффициент гомотетии.

Предложение 4. *"Пустая" диаграмма, являющаяся диаграммой матрицы $\lambda'\mathrm{I}$ размера $N \times N$, это элементарная диаграмма – один столбец клеток высоты N. Скалярной матрице $\lambda'\mathrm{I}$ соответствует единственная размеченная диаграмма (она же, конечно, является и стандартной) – это столбец, у которого в нижнюю клетку вписано число λ'.*

Замечание 7. *Размеченная элементарная диаграмма представляет из себя столбец клеток, в нижнюю клетку которого записано комплексное число.*

Определение 21. *Назовём* ***отщеплением столбца справа*** *(слева) от диаграммы, запись диаграммы $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$ в виде суммы* ***диаграммы-остатка*** *$\overleftarrow{\mathscr{Y}}_r$, и прибавленной к ней* ***справа*** *(слева) элементарной диаграммы $\overleftarrow{\mathscr{D}}_r$:*

$$\overleftarrow{\mathscr{Y}} = \overleftarrow{\mathscr{Y}}_r \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{D}}_r,$$

для отщепления слева: $\overleftarrow{\mathscr{Y}} = \overleftarrow{\mathscr{D}}_l \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}}_l$.

Определение 22. *Назовём* ***разборкой диаграммы*** *представление диаграммы в виде упорядоченной суммы элементарных диаграмм, полученных последовательным отщеплением элементарных. Каждое* *отщепление элементарной диаграммы назовём шагом разборки. Количество клеток в отщеплённой диаграмме (её высоту) назовём* ***шириной шага*** *разборки.*

Далее мы не будем обсуждать разборку пустых диаграмм. Поскольку суммирование пустых диаграмм коммутативно и ассоциативно, то такая разборка эквивалентна упорядочению столбцов диаграммы.

Пусть диаграмма размечена. Суммирование размеченных диаграмм тоже ассоциативно. Это означает, что результат, как упорядоченная сумма диаграмм, не зависит от того, *сначала слева* мы прибавляем диаграмму $\overleftarrow{\mathscr{Y}}_a$ к $\overleftarrow{\mathscr{Y}}_b$, а *потом справа* к их сумме $\overleftarrow{\mathscr{Y}}_c$, или наоборот – сначала справа, а потом слева: $(\overleftarrow{\mathscr{Y}}_a \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}}_b) \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}}_c = \overleftarrow{\mathscr{Y}}_a \vec{+} (\overleftarrow{\mathscr{Y}}_b \vec{+} \overleftarrow{\mathscr{Y}}_c)$.

Замечание 8. *Не важно в какой последовательности мы, то справа, то слева, отщепляем от диаграммы элементарные. И эта операция, и обратная к ней, а именно, операция суммирование диаграмм, ассоциативна.*

Заметим, однако, что когда мы будем вводить **координатные функции** на $\mathrm{gl}(N)$, то разной последовательности отщеплений – сначала справа, потом слева, или наоборот, – будут соответствовать *разные* наборы функций.

Заметим, что на каждом шаге количество выделенных ячеек, куда вписаны собственные значения преобразования, уменьшается на единицу. Исчерпание какого-либо собственного значения в разметке диаграммы будет соответствовать исчезновению соответствующего собственного числа у полученного *преобразования-остатка*. Последовательность этих операций с преобразованиями тоже назовём "разборкой", *разборкой преобразования* (матрицы). Одной из целей наших рассмотрений является описание *всех* возможных разборок заданного преобразования.

Вернёмся к диаграммам и их разборке.

Прежде всего, заметим, что, прибавляя элементарную диаграмму к данной диаграмме (с любой стороны), мы увеличиваем на единицу длину соответствующей ступеньки у исходной диаграммы. Или создаём ступеньку, если у диаграммы, к которой ступеньку прибавляем, не было ступеньки на данной глубине.

Предложение 5. *На каждом шаге разборки ровно одна из ступенек лестницы становится короче на единицу (исчезает, если её длина* *была единичной), все же остальные ступеньки лестницы остаются прежними.*

Шаги разборки будем нумеровать переменной $k \in \mathbb{N}$. Прежде чем выбрать параметр, характеризующий шаг номер k, заметим, что если просто использовать номер той, ставшей на единицу короче, ступеньки, то иногда, в результате шага, будет меняться нумерация ступенек, имевших больший номер. Это произойдёт когда длина ступеньки была равна единице и, в результате шага, ступенька исчезла. Это неудобно.

В качестве параметра, определяющего какой именно шаг сделан, мы возьмём количество клеток, "изъятых" из диаграммы на данном шаге. Эта величина – сумма высот ступенек, номер которых не меньше номера укороченной, и будет описывать шаг разборки. Он совпадает с глубиной залегания "укоротившейся" ступеньки.

Если задана некоторая конкретная разборка α, то определена функция, обозначим её $\widehat{m}_\alpha(k) : \mathbb{N}_{n^A} \to \mathbb{N}_{m_{\max}}$, которая сообщает, какой номер m имела ступенька (исходной диаграммы), что укоротилась на шаге k: $m = \widehat{m}_\alpha(k)$. Количество изъятых на шаге k клеток обозначим $\widehat{h}$. Очевидно, что $\widehat{h}$ это "глубина залегания" укоротившейся ступеньки: $\widehat{h} = \widehat{h}_\alpha(k) = h(\widehat{m}_\alpha(k))$

$$\widehat{h}_\alpha(k) = \kappa_{\max} - \sum_{i=1}^{\widehat{m}-1} \zeta(i) = \sum_{i=\widehat{m}}^{m_{\max}} \zeta(i), \quad \widehat{m} = \widehat{m}_\alpha(k).$$

Поскольку на каждом шаге длина ровно одной из ступенек уменьшается ровно на единицу, то количество шагов, необходимых для полной разборки диаграммы, равно длине всей диаграммы, это n^A.

6.1. Правая разборка размеченной диаграммы. Опишем подробно *правую разборку* , то есть отщепление элементарных диаграмм *справа*. Отщепление слева, очевидно, аналогично. Имеющееся различие связано с несимметричностью диаграммы как геометрического объекта, как *набора строк, выровненного по левому краю*. Это было удобно для описания диаграммы лестницей и т.п. Реально же, в наших построениях, можно, в соответствии с надобностью, выравнивать диаграмму то по правому краю, то по левому, сдвигая строки как единое целое и не меняя глубины их залегания. Итак, сосредоточимся сначала на правых разборках.

Чтобы описать *правую разборку* диаграммы, заметим, что прибавление справа элементарной диаграммы (высоты h', размеченной числом λ') к данной диаграмме состоит в “пририсовывании” по одной “стопке” клеток ко всем её ступенькам с номером, начиная с того номера, который имеет ступенька, расположенная на глубине h'. В случае отсутствия ступеньки на глубине h', у диаграммы-суммы образуется новая ступенька. Она единичной длины, и расположена на глубине h'. В любом случае, край ступеньки, расположенной на глубине h', оказывается размеченным числом λ', и все клетки с вертикальных границ ступенек, чья ордината меньшей h' (то есть они лежат выше) *не размечены.*

Итак, отщепление справа состоит *в изъятии* одного слоя крайних правых клеток у некоторых ступенек, у тех, что не ниже той ступеньки, на глубине которой находится нижняя клетка отщеплённой диаграммы. Эта ступенька и станет на одну клетку у́же.

Предложение 6. *Правая разборка диаграммы однозначно определяется разметкой.*

Доказательство. На каждом шаге у диаграммы-остатка короче становится единственная ступенька, самая верхняя из тех ступенек, край которых размечен. И остальные ступеньки и разметка остатка не меняются. Отщеплённая элементарная диаграмма имеет высоту этой уменьшенной ступеньки и размечена тем числом, что было написано на крае уменьшенной ступеньки.

Тем самым, слагаемые, возникающие при отщеплении справа, однозначно определены. □

При разборке пустой диаграммы, на каждом шаге у диаграммы-остатка становится у́же (исчезает, если её длина была единичной) одна из ступенек *по произволу.* Все остальные ступеньки лестницы остаются прежними. Отщепляется элементарная диаграмма высоты этой, укороченной ступеньки.

Начнём разбирать диаграмму $\mathscr{Y}$. Переобозначим её $\mathscr{Y}_0 := \mathscr{Y}$, а ту диаграмму, что получится после k шагов разборки, обозначим $\mathscr{Y}_k$.

Заметим, что $\mathscr{Y}_k$ можно изобразить как исходную диаграмму, в которой клетки, удалённые на первых m шагах, лишь зачеркнуты, так как оставшиеся звенья своих координат n, κ не меняют.

Назовём *замыкающей клеткой* шага k ту клетку, которая лежит на краю ступеньки, уменьшившей свою длину на этом шаге. Другими словами, замыкающая клетка шага k это та, что имеет самую большую ординату из всех клеток, удалённых из $\mathscr{Y}_{k-1}$ на этом шаге. Проведём полную разборку какой-нибудь диаграммы и отметим, все звенья, которые были замыкающими при этой разборке, например, записав в них какие-нибудь числа.

Предложение 7. *На каждой полке исходной диаграммы $\mathscr{Y}$ будет отмечено столько клеток, какова длина полки.*

Доказательство. Каждая замыкающая клетка, при разборке, уменьшает длину этой ступеньки на единицу. В результате полной разборки все ступеньки исчезают (оказываются нулевой длины). □

Мы видим, что если вписать (произвольные) числа в замыкающие звенья какой-нибудь разборки, мы получим *размеченную диаграмму.*

Определение 23. *Назовём* ***разметкой разборки*** *выделение на каждой полке тех звеньев, что были замыкающими при этой разборке.*

Теорема 1. *Отображение, ставящее в соответствие каждой правой разборке диаграммы её разметку, является биекцией в множество всевозможных разметок.*

Доказательство. Построим обратное отображение. Для этого рассмотрим произвольную разметку, и найдём самую верхнюю (то есть имеющую минимальную ординату κ) отмеченную клетку из тех, что лежат на краях ступенек. Обозначим его $\mathfrak{z}(n', \kappa')$. Такая клетка обязательно найдётся, потому что множество клеток, отмеченных на краях, не пусто. Не пусто оно, так как в нём заведомо содержится край первой ступеньки – первая полка совпадает с горизонтальной частью первой ступеньки, так что что *все клетки первой полки отмечены*, в частности, крайняя клетка.

На первом шаге вычеркнем все клетки вертикальных границ ступенек "не ниже уменьшенной", то есть звенья $\mathfrak{z}(n, \kappa)$, имеющие координату $\kappa \geqslant \kappa'$ и не имеющие правого соседа. Отмеченное звено лежало на краю ступеньки, так что длина этой ступеньки уменьшится на единицу (если длина была единица, то ступенька исчезнет).

Это найденное звено было самым верхним в вертикальных краях ступенек, так что, *кроме него, на этом шаге, не будет вычеркнуто ни одного отмеченного звена.*

Легко понять, что *набор оставшихся звеньев снова будет представлять из себя размеченную диаграмму*, назовём её $\mathscr{Y}_1$, где на каждой полке опять будет отмечено столько клеток, какова длина соответствующей ступеньки.

Будем продолжать процесс, пока не исчерпаем всю диаграмму. На предпоследнем шаге мы получим диаграмму, состоящую из одного столбца клеток, и самая нижняя клетка будет отмечена. Последний шаг вычеркнет и этот столбец, не останется ни одной клетки. □

Вернёмся к описанию разборок. Мы видели, что каждой разметке соответствует единственная правая разборка, для которой эта разметка является разметкой разборки. Пусть ширина диаграммы n^A. Рассмотрим некоторую конкретную разборку и обозначим её буквой α. Описать разборку можно, указав последовательность ширин шагов этой разборки. Если диаграмма размечена, то при указании ширин, мы должны указать, каким числом λ', отщеплённая диаграмма размечена. Удобно отщеплённую элементарную диаграмму высоты $\nu(k)$ (шаг ширины $\nu(k)$) обозначать единичной матрицей $\mathrm{I}_{\nu(k)}$ размерности $\nu(k) \times \nu(k)$. Если элементарная диаграмма, отщеплённая на шаге номер k, размечена числом λ', то этот *шаг разборки будем описывать матрицей* $\lambda'\mathrm{I}_{\nu(k)} \in \mathbb{C}^{\nu(k)\times\nu(k)}$, *матрицей того преобразования гомотетии, которое соответствует данной элементарной диаграмме.* Всю правую разборку диаграммы будем записывать в виде блочно-скалярной матрицы[3], у которой блоки, в соответствии с порядком отщепления, упорядочены справа-снизу вверх-налево, то есть первая отщеплённая диаграмма стоит в правом нижнем углу. Именно такое упорядочение обладает свойством: *если в размеченной диаграмме, на какой-то полке, клетка, размеченная числом* λ', *стояла правее клетки с* λ'', *то, в соответствующей этой разборке, блочно-скалярной матрице блок с* λ' *тоже окажется правее (и ниже) блока с* λ''.

Заметим, что в размеченных диаграммах именно *порядок размеченных клеток на одной полке* существенен, поскольку именно он *участвует в определении подчинённости диаграмм.*

Если у матрицы единственное собственное значение λ', то любая разборка этой матрицы выглядит как $\lambda'\mathrm{I}$, но стоящие на диагонали числа λ' организованы в квадратные блоки разных размеров (в зависимости от Жордановой структуры матрицы) и они по-разному упорядочены (в зависимости от тактики разборки).

---

[3]То есть она блочно-диагональная, и на диагонали стоят блоки, пропорциональные единичной матрице той или иной размерности.

Вообще, возможные размеры диагональных блоков (длины шагов разборки) тем меньше, чем меньше размерности собственных пространств. Высота диаграммы $\kappa_{\max}$ равна размерности максимального собственного подпространства. Крайний случай, это одномерные собственные пространства. Если собственные пространства одномерны, то это означает, что каждому собственному значению соответствует одна Жорданова клетка. Диаграмма такой матрицы это одна строчка, одна ступенька единичной высоты. Такую (неинтересную) диаграмму имеет, в частности, матрица с простым спектром.

Пример 2. *Пусть у матрицы всего одно собственное значение λ' и её нормальная Жорданова форма представляет собой единственную Жорданову клетку $N \times N$. В этом случае диаграмма состоит из одной строчки клеток. Стандартная (любая) её разметка это строчка N клеток в которые вписано число λ'. Шаг (любой) разборки состоит в отщеплении одной клетки с λ'. Диаграмма-остаток это такая же строчка, но на единицу короче. Отщеплённая элементарная диаграмма записывается как $\lambda' \mathrm{I}_1 \in \mathbb{C}^{1\times 1} \simeq \mathbb{C}$. Вся разборка (пока мы обсуждаем только правые разборки) изображается матрицей $\mathrm{I}_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$, но интерпретируется она как* блочно-диагональная, имеющая на диагонали N блоков 1×1.

Для обозначения пустых диаграмм мы используем рукописную букву $\mathscr{Y} \in \mathbb{Y}$ с индексами. Определена функция $\mathfrak{y} : \mathrm{gl}(N, \mathbb{C}) \to \mathbb{Y}$. Эта функция принимает одинаковые значения на подобных матрицах (определяется Жордановой формой), но некоторая часть информации о Жордановой структуре теряется. Теряется, в частности, информация о величине и количестве собственных значений.

Размеченная диаграмма $\overleftarrow{\mathscr{Y}} \in \overleftarrow{\mathbb{Y}}$ содержит исчерпывающую информацию о Жордановой нормальной форме, кроме того, там есть и добавочная информация. В этом смысле, размеченная диаграмма, соответствующая матрице, похожа на выбор некоторой конкретной её нормальной Жордановой формы. Эта форма тоже, как и разметка, определена не однозначно, с точностью до перестановки Жордановых клеток.

Аналогом стандартной разметки является выбор какого-либо правила, стандартизация Жордановой формы. Например: упорядочить все блоки по размеру, а внутри блоков одного размера упорядочить их в соответствии с упорядочением собственных значений.

В этой статье предлагается некая специфическая запись информации о Жордановой форме. Эта, предлагаемая, форма записи – размеченные диаграммы, – позволят не только определить интересный класс функций на орбите, но и описать его (класс), то есть множество всех таких функций.

Итак, размеченную диаграмму $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$ можно записать как специального вида блочно-диагональную матрицу. При правой разборке диаграммы, тем клеткам, что отщепляются на шаге номер k, поставлена в соответствие квадратная матрица-блок того же размера $\nu(k) \times \nu(k)$, какова была ширина этого шага разборки. На диагонали блока записано то значение λ', что стояло в замыкающем звене, а все остальные места заполнены нулями. Получившийся "скалярный блок", записан на диагонали блочно-диагональной матрицы. Блоки упорядочены снизу-справа наверх-налево. Первый блок $k = 1$ будет в правом-нижнем углу.

Построенное отображение размеченных диаграмм в множество блочно-скалярных матриц изоморфизм. Обратное отображение строится так. Преобразуем диагонали блоков в элементарные диаграммы того же размера, размеченные данным числом, и складываем, сохраняя порядок – элементарная диаграмма, полученная из находившегося правее (и ниже) блока в сумме диаграмм стоит правее. Чтобы не вводить новых обозначений, отождествим блочно-скалярные матрицы и размеченные диаграммы.

Обозначение 1. *Элементами множества $\overleftarrow{\mathbb{Y}}$ являются символы $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$, каждый из которых можно записать либо как размеченую диаграмму, либо как блочно-диагональную матрицу со скалярными (пропорциональными единичным) блоками. Мы будем называть это* ***матричной записью размеченной диаграммы****.*

6.2. Произвольная разборка размеченной диаграммы. Опишем теперь отщепление элементарной диаграммы *слева*. Элементарной диаграммой, которая отщепляется, является часть первого столбца – от самой верхней клетки $\mathfrak{z}(1,1)$ до первой (выше всех расположенной) из отмеченных в первом столбце, скажем $\mathfrak{z}(1,\nu(k'))$. После изъятия части первого столбца диаграмма может потерять форму диаграммы Юнга (если $\nu(k') < \kappa_{\max}$), левая граница будет иметь "выемку" высотой $\nu(k')$ и шириной единица. Чтобы опять получить диаграмму Юнга, сдвинем первые $\nu(k')$ строк, не изменяя разметки, налево на единицу. Это восстановит правильную форму диаграммы.

Легко видеть, что и разметка её будет удовлетворять требованию “число отмеченных клеток на полке равно длине ступеньки”. Это так, поскольку мы убрали одну отмеченную клетку, одновременно сделав, соответствующую ей, ступеньку на единицу у́же. Ни длины остальных ступенек, ни отмеченные на них клетки не изменились.

Произвольная разборка состоит из последовательных отщеплений – то справа, то слева, причём отщеплённые части не переставляются ни друг с другом, ни с диаграммой-остатком. Все элементарные диаграммы в сумме окажутся упорядочены по абсциссе самой верхней клетки. В слагаемом номер n верхняя клетка $\mathfrak{z}(n, 1)$.

Последнее, что осталось сделать, это описать, в какой последовательности – когда справа, когда слева, мы отщепляем элементарные диаграммы. Для этого придётся ввести ещё одну структуру. Будем, на каждом шаге, заключать диаграмму-остаток в скобки. Когда вся разборка будет произведена, у нас будет система из вложенных друг в друга скобок, причём самое глубокое вложение будет порядка n^A. Эти скобки будут окружать последнюю диаграмму-остаток, которая уже сама будет элементарной, обозначим её, например, $\overleftarrow{\mathscr{D}_\alpha}$. Если последняя отщепленная элементарная диаграмма была отщеплена справа, то, в сумме, скобка, уровня вложения $n^A - 1$, выглядит так: $((\overleftarrow{\mathscr{D}_\alpha}) + \overleftarrow{\mathscr{D}_{\alpha+1}})$. Если предыдущая диаграмма была отщеплена слева, то скобка уровня вложения $n^A - 1$ выглядит так: $(\overleftarrow{\mathscr{D}_{\alpha-1}} + (\overleftarrow{\mathscr{D}_\alpha}))$. Продолжая в том же духе, мы наложим на сумму

$$\overleftarrow{\mathscr{Y}} = \overleftarrow{\mathscr{D}}_1 + \overleftarrow{\mathscr{D}}_2 + \cdots + \overleftarrow{\mathscr{D}}_{\alpha-1} + \overleftarrow{\mathscr{D}}_\alpha + \overleftarrow{\mathscr{D}}_{\alpha+1} + \cdots + \overleftarrow{\mathscr{D}}_{n^A-1} + \overleftarrow{\mathscr{D}}_{n^A}$$

структуру вложенных друг в друга скобок. Структуру такую, что между скобками предыдущего и последующего уровней вложения заключено единственное слагаемое-диаграмма. Диаграмма расположена между закрывающимися скобками, если она отщеплялась справа, и между открывающимися скобками, если она отщеплялась слева. Например

$$(\overleftarrow{\mathscr{D}}_1 + (\overleftarrow{\mathscr{D}}_2 + ((\overleftarrow{\mathscr{D}}_3 + ((((\overleftarrow{\mathscr{D}}_4 + ((\overleftarrow{\mathscr{D}}_5) + \overleftarrow{\mathscr{D}}_6)) + \overleftarrow{\mathscr{D}}_7) + \overleftarrow{\mathscr{D}}_8) + \overleftarrow{\mathscr{D}}_9)) + \overleftarrow{\mathscr{D}}_{10})))$$

Размеченную диаграмму, снабжённую такой структурой вложенных скобок, будем обозначать $(\!(\overleftarrow{\mathscr{Y}})\!)$. В матричной записи мы, вместо структуры вложенных интервалов, будем использовать другой способ задать последовательность отщеплений.

Блочно-диагональная часть $((\overleftarrow{\mathscr{Y}}))$ та же, что и у $\overleftarrow{\mathscr{Y}}$, а вне-блочно-диагональная часть разбита на пары симметричных друг другу прямоугольников, имеющих общие, с каким-нибудь диагональным блоком, стороны. На каждом шаге разборки часть диагонали, соответствующая остатку предыдущего шага, разбивается на две части. Одна часть это диагональ скалярного блока, соответствующего отщеплённой диаграмме, другая часть соответствует диаграмме-остатку. Эти два отрезка диагонали, являются диагоналями пары квадратов с общей вершиной. Стороны и продолжения сторон этих двух квадратов ограничат пару (симметричных друг другу) прямоугольников.

Определение 24. *Матричная запись* $((\overleftarrow{\mathscr{Y}}))$ *представляет из себя разбиение матрицы* $N \times N$ *на пары таких прямоугольников, соединённых отщеплённым скалярным блоком.*

К каждому блоку, соответствующему отщеплённой элементарной диаграмме (кроме последнего остатка $(\overleftarrow{\mathscr{D}_\alpha}))$, подходит пара прямоугольников, симметричных относительно диагонали, и имеющих с блоком общую сторону. Для блока, соответствующего диаграмме, окаймлённой закрывающимися скобками, прямоугольник, расположенный выше диагонали, примыкает к верхней стороне диагонального блока и идёт наверх, пока не закончится либо на верхней границе матрицы, либо на нижней границе прямоугольника, идущего от блока, окаймлённого открывающимися скобками. Для того же блока (соответствующего диаграмме, окаймлённой закрывающимися скобками) прямоугольник, расположенный ниже диагонали симметричен только что описанному. Он, соответственно, примыкает к левой стороне того же диагонального блока и идёт налево, пока не закончится либо на левой границе матрицы, либо на правой границе прямоугольника, идущего сверху от блока, окаймлённого открывающимися скобками. Все такие разбиения квадратной матрицы, при фиксированной блочно-диагональной части, можно охарактеризовать следующим образом.

Вне-блочно-диагональная часть, симметрично относительно диагонали, разбита на прямоугольники с вертикальными и горизонтальными сторонами так, что одна из сторон каждого из прямоугольников является общей стороной со стороной одного из диагональных блоков. Для прямоугольника, у которого две стороны совпали с границами разных диагональных блоков (у блочной 2×2 *матрицы), отдельно указан тот блок, граница с которым "объявлена общей".*

Таким образом, ровно один из диагональных блоков остаётся без соответствующих ему прямоугольников. Этот, “оставшийся без прямоугольников”, диагональный блок соответствует “остатку разборки” – последней элементарной диаграмме, той, что, в записи ($(\overleftarrow{\mathscr{Y}})$) в виде суммы со скобочной структурой, окаймлена слева открывающейся скобкой, а справа закрывающейся. Этот блок считаем не примыкающим ни к какому прямоугольнику.

Пример 3 (Диагонализуемый случай)**.** *Диаграмма диагонализуемой матрицы характеризуется тем, что все числа, которыми размечена диаграмма, разные. Для каждого числа “глубина залегания” равна размерности соответствующего собственного подпространства. Задание разметки такой диаграммы состоит в произвольном упорядочении собственных чисел на полках. Разборка, как и разборка любой диаграммы, это задание структуры вложенных промежутков на первой строке, промежутки вложены с единичными зазорами.*

В матричной записи единственным отличием от общего случая является попарное несовпадение чисел, записанных в диагональные блоки.

Литература

1. И. М. Гельфанд, М. И. Наймарк, *Унитарные представления классических групп.* — Труды математического института им В.И. Стеклова, 36, (1950).
2. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *R-matrix and Baxter Q-operators for the noncompact SL(N;C) invariant spin chain SIGMA 2.* — 084 `arXiv:nlin.SI/0612003`, (2006).
3. М. В. Бабич, С. Э. Деркачев, *О рациональной симплектической параметризации коприсоединенной орбиты GL(N,C), диагонализуемый случай.* — Алгебра и анализ, **22**, No. 3, (2010) 16–30.
4. М. В. Бабич, *Rational version of Archimedes symplectomorphysm and birational Darboux coordinates on coadjoint orbit of GL(N,C).* — Preprint MPIM Bonn, MPIM2010-59, (2010), 1-36.
5. У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, Москва, 328с, (2006).

Babich M. V. Young tableaux and stratification of space of complex square matrices.

A stratification of the manifold of all square matrices is considered. One equivalence class consists of the matrices with the same type of Jordan structure, the same *sets* of values $\mathrm{rank}(A - \lambda_i \mathrm{I})^j$. The stratification is consistent with a fibration on the submanifolds of matrices similar to each other, i.e. with the adjoint orbits fibration. Internal structures of the matrices from one equivalence class are very similar, among other factors their (co)adjoint orbits are birationally symplectomorphic. A Young tableaux technic developed in the article describes this stratification and the fibration of the strata on the (co)adjoint orbits.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 Санкт-Петербург

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: mbabich@pdmi.ras.ru,
misha.babich@gmail.com

Поступило 11 марта 2015 г.