

А. Р. Минабутдинов

СЛУЧАЙНЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ СУММ В АВТОМОРФИЗМЕ ПАСКАЛЯ ДЛЯ МЕРЫ ЛЕБЕГА

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим бесконечномерный единичный куб $I = \{0, 1\}^\infty$ с σ -алгеброй борелевских множеств \mathcal{B} , порожденной цилиндрическими множествами $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $x_i \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, меру μ_a , являющуюся произведением $\prod_1^\infty (a, 1 - a)$ мер Бернулли $(a, 1 - a)$, $0 < a < 1$, и автоморфизм Паскаля P . Автоморфизм Паскаля является важным примером адических преобразований (см. [1]). Он был определен¹ в [2] и изучался в ряде работ, см. работу [3] и ссылки в ней.

Рассмотрим функцию $g \in L^2_{\mu_a}(I)$ и соответствующую эргодическую сумму

$$S_x^g(j) = \sum_{k=0}^{j-1} g(P^k x). \quad (1)$$

По эргодической теореме для п.в. x

$$\frac{1}{n} S_x^g(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g d\mu_a.$$

В работе [19] Э. Жанвресс, Т. де ля Рю и И. Веленик предложили рассмотреть случайное отклонение от эргодической теоремы. Для натурального l они рассмотрели случайную функцию²

$$\varphi_{x,l}^g(t) = \frac{S_x^g(t \cdot l) - t \cdot S_x^g(l)}{R_{x,l}^g} \quad (2)$$

Ключевые слова: автоморфизм Паскаля, эргодическая теорема, кривая Такаги.

Статья подготовлена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00373.

¹Этот автоморфизм ранее (без упоминания этого термина и связи с графом Паскаля) использован в [16] и [21].

²Функция $S_x^g(j)$ линейно интерполирована между соседними натуральными j .

из $C[0, 1]$ (параметр случайности – это $x \in I$) со случайным масштабированием $R_{x,l}^g$, которое канонически выбирается равным константе, если $\max_t |S_x^g(tl) - tS_x^g(l)| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$, и пропорциональным $\max_t |S_x^g(tl) - tS_x^g(l)|$ в противном случае. Если для выбранных функции g и точки x существует последовательность $l_n(x)$, такая, что $\varphi_{x,l_n(x)}^g$ сходится к функции φ_x^g в равномерной метрике, то $\varphi_x^g(\cdot)$ называют *предельной* функцией, ее график *предельной кривой*, а последовательность $l_n(x)$ *стабилизирующей последовательностью*.

В [19] рассмотрены цилиндрические функции $g = g(x_1, \dots, x_N)$, удовлетворяющие условию

$$\text{cov}_{\mu_a}(g, \sum_{i=1}^N r_i) \neq 0, \tag{3}$$

где $r_i(x) = (-1)^{x_i}$, $i \in \mathbb{N}$, – функции Радемахера. Графиком предельной функции $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x,l_n(x)}^g(\cdot)$ в этом случае для μ_a -п.в. x оказалась кривая Такаги при $a = 1/2$ и ее естественное обобщение при других значениях a . В общем случае в [19] было показано, что всякая цилиндрическая, некогомологичная константе функция f приводит к некоторой предельной функции $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x,l_n(x)}^f$. В качестве последовательности $\{l_k(x)\}_k$ естественным образом выступают выбираемые по точке x (под)последовательности биномиальных коэффициентов $l_k(x) = \binom{n_{k(x)}}{k(x)}$, обладающие свойством $\frac{k(x)}{n_{k(x)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$. Эти результаты из базовой для нас работы [19] будут сформулированы в теоремах 4–6 ниже.

Однако было замечено, что это не единственно возможная предельная кривая. В § 4.1 работы [19] авторы привели примеры функций, для которых в качестве предельной получается совершенно другая кривая. В связи с этим в пп. 4.1 и 4.2 авторы вышеупомянутой работы прямо ставят два вопроса.

Вопрос 1. *Какие предельные кривые возможны для произвольной цилиндрической функции f ?*

Авторы работы [19] предположили, что возможны лишь две предельные кривые: обобщенная кривая Такаги и участки вышеупомянутой новой кривой.

Вопрос 2. Если рассмотреть случай функции $g \in L^2_{\mu_a}(I)$, удовлетворяющей естественному обобщению условия (3)³

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}_{\mu_a}(g, \sum_{i=1}^N r_i) \neq 0, \quad (4)$$

то будет ли существовать предельная кривая?

Для того чтобы предел в условии (4) существовал, авторы работы [19] предложили следующее условие:

$$\sum_{N \geq 1} \|\mathbb{E}_{\mu_a}(g|\mathcal{F}_{N+1}) - \mathbb{E}_{\mu_a}(g|\mathcal{F}_N)\|_2 < \infty, \quad (5)$$

где \mathcal{F}_N , $N \in \mathbb{N}$, – пространство цилиндрических функций от (x_1, \dots, x_N) .

Цель данной работы – дать ответ на эти вопросы.

Основной результат можно сформулировать в виде двух теорем, отвечающих соответственно на первый и второй вопросы для случая⁴ $a = 1/2$.

Теорема 1. Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой $(I, \mathcal{B}, \mu_{1/2})$, $N \in \mathbb{N}$ и $g \in \mathcal{F}_N$ – некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Для $\mu_{1/2}$ -п.в. x предельной функцией является функция $\alpha_{g,x}T_{1/2}^1$, где $\alpha_{g,x} = \pm 1$.
2. Если для заданной точки $x \in [0, 1]$ предельная функция существует, то найдутся вещественные числа $\alpha_{g,x}$, $\beta_{g,x}$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, I_n}^g = \alpha_{g,x}T_{1/2}^1 + \beta_{g,x}T_{1/2}^2 \text{ в } C[0, 1],$$

где $T_{1/2}^1$ и $T_{1/2}^2$ – непрерывные самоподобные функции.

График функции $\frac{1}{2}T_{1/2}^1$ является кривой Такаги. В общем случае функции $\{T_a^k\}_{k \geq 1}$ известны в теории чисел в связи с “sum-of-binary-digits-problem”, подробнее см. в §7. В §3 построен класс функций

³Некоторое условие, несомненно, необходимо, чтобы исключить функции, удовлетворяющие слабому принципу инвариантности (см. [29]), для которых такая стабилизация невозможна.

⁴Мера $\mu_{1/2}$ соответствует мере Лебега $\lambda_{1/2}$ при каноническом отображении $\theta : I \rightarrow [0, 1]$, переводящем точку $x \in I$ в $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \in [0, 1]$.

$\{T_a^k\}_{k \geq 1}$ и приведены новые результаты, описывающие свойства самоподобия линейных комбинаций $\alpha T_a^1 + \beta T_a^2$ при иррациональных a . Доказано, что график любой линейной комбинации $\alpha T_a^1 + \beta T_a^2$ в этом случае с точностью до нормировки⁵ приближается некоторым участком графика функции T_a^2 (см. предложение 1 в §3).

Вместо условия (5) из вопроса 2 мы накладываем на функцию g более сильное условие. Рассмотрим диадическую метрику ρ на аддитивной группе \mathbf{Z}_2 целых диадических чисел, которую можно отождествить с кубом I . Метрика ρ на $I \sim \mathbf{Z}_2$ задается стандартным образом: $\rho(x, y) = \|x - y\|$, где $\|z\| = 2^{-u(z)}$ – каноническая норма; здесь $u(z)$ – номер первой ненулевой координаты элемента $z \in \mathbf{Z}_2$. Обозначим через $C_\rho(I)$ пространство функций, непрерывных в топологии, индуцированной метрикой ρ .⁶ Для ряда Фурье $\sum_{t=0}^{\infty} c_t w_t$ функции $g \in L^2_{\mu_a}(I)$ по системе Уолша–Пэли $\{w_t\}_{t=1}^{\infty}$ обозначим через B_m сумму $\sum_{t=m+1}^{\infty} |c_t|$.

Теорема 2. Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой $(I, \mathcal{B}, \mu_{1/2})$, $N \in \mathbb{N}$, функция $g \in C_\rho(I)$ удовлетворяет условию (5) и для коэффициентов ряда Фурье по системе Уолша–Пэли выполнено условие $B_n = o(2^{-n})$, $n \rightarrow \infty$. Положим $\alpha_g = -\text{sgn}(\sum_{j=1}^{\infty} \text{cov}(r_j, g))$.

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Для $\mu_{1/2}$ -п.в. x предельной функцией является функция $\alpha_g T_{1/2}^1$.
2. Если для заданной точки $x \in [0, 1]$ предельная функция существует, то она равна $\alpha_g T_{1/2}^1$.

Основным методом в данной работе является разложение функции $g \in C_\rho(I)$ в ряд Фурье по функциям Уолша $\{w_t\}_{t=1}^{\infty}$ (в нумерации Пэли). Нам удалось получить явную формулу, задающую эргодические суммы $S_x^{w_t}(j)$, что позволило оценить порядок нормирующих коэффициентов $R_{x,l}^{w_t}$ (это оказалось самой технически сложной задачей) и

⁵Сдвига, растяжения и вычитания линейной функции.

⁶Это пространство можно интерпретировать как пространство функций, все точки разрыва которых являются разрывами первого рода и двоично-рациональны.

в итоге определить предельную функцию $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n(x)}^{w_l}$. Именно результат для базисных функций позволяет сделать заключение о предельной функции φ_x^g , если g удовлетворяет предположениям из вопросов 1 и 2.

Работа организована следующим образом. Во втором параграфе сформулированы основные результаты из базовой для нас работы [19]. В §3 описан класс фрактальных кривых, который позволит описать предельные кривые, а также исследованы их свойства самоподобия. Параграф 4 посвящен основным результатам данной работы; в пп. 4.3 и 4.4 получены ответы на вопросы 1 и 2. В §5 предложен подход для случая произвольной инвариантной меры μ_a . В §6 мы рассказываем о связи полученных результатов со знаменитой гипотезой о непрерывности спектра автоморфизма Паскаля. В §7 будет дана теоретико-числовая интерпретация наших результатов. Наконец, последний параграф 8 оставлен для некоторых доказательств и дополнительных иллюстраций.

Автор выражает глубокую благодарность А. М. Вершику и А. А. Лодкину за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и множество замечаний.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ИСХОДНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вершину (точку) x бесконечномерного куба I естественно рассматривать как путь в графе Паскаля. Если начальный отрезок x_1, x_2, \dots, x_n длины n пути x содержит k нулей⁷, то путь проходит через вершину (n, k) графа Паскаля.

На точках (путях) автоморфизм действует следующим образом⁸ (см. [2]):

$$x \mapsto Px, \quad P(0^{m-l}1^l\mathbf{10}\dots) = 1^l0^{m-l}\mathbf{01}\dots \quad (6)$$

(запись подразумевает, что координаты x_i , $i \geq m+3$, остаются неизменными).

Согласно теореме де Финетти, инвариантные эргодические меры автоморфизма Паскаля – это произведения $\mu_a = \prod_1^\infty (a, 1-a)$ меры Бернулли $(a, 1-a)$, где $0 < a < 1$.

⁷И, соответственно, $n-k$ единиц.

⁸Произвольная степень автоморфизма определена для всех точек, кроме тех, для которых последовательность координат постоянна с некоторого места.

Для всякого пути (точки) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ из I обозначим через $J_n(x)$ цилиндр $[x_1, \dots, x_n]$. Всякий такой цилиндр можно рассматривать как вершину n -мерного куба $I_n = \prod_1^n \{0, 1\}$. Тогда автоморфизм Паскаля на вершинах n -мерного куба действует переходом к следующей вершине в **обратном** лексикографическом порядке. Вершины (цилиндры), принадлежащие сечению куба I_n по вершинам с k нулями, упорядоченные в обратном лексикографическом порядке, образуют этажи башен автоморфизма Паскаля, см. [3]. Эти башни мы обозначаем через $\tau_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Например, башня $\tau_{4,2}$ состоит из шести цилиндров:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad (7)$$

Аutomорфизм на точках из башни $\tau_{n,k} \subset I$, $0 \leq k \leq n$, действует по обычному правилу: точку $x \in I$, лежащую на i -м этаже башни $\tau_{n,k}$, он переводит на $(i + 1)$ -й этаж, при этом меняются лишь первые n координат точки x .

Для башни $\tau_{n,k}$ будем обозначать через $\tau_{n,k}(i)$ цилиндр на i -м этаже этой башни, например, $\tau_{4,2}(1) = [1100]$. В силу того, что для всякого n набор башен $\{\tau_{n,k}\}_{k=0}^n$ содержит в себе все 2^n цилиндров, всякая точка $x \in I$ лежит на некотором этаже i некоторой башни $\tau_{n,k(x)}$. Иногда удобнее считать, что x лежит на начальных этажах башни, что можно обеспечить, если брать n не подряд.

Теорема 3 ([19] или [18, лемма 2.5]). *Для всякого $\varepsilon > 0$ и для μ_a -почти всякой точки x найдется последовательность башен $\tau_{n_j, k_{n_j}}$, где $n_j = n_j(x)$, $\frac{k_{n_j}}{n_j} \rightarrow a$, такая, что x принадлежит одному из цилиндров $\tau_{n_j, k_{n_j}}(i)$, где $1 \leq i \leq \varepsilon \binom{n_j}{k_{n_j}}$.*

Стабилизирующую последовательность l_j , согласно этой теореме, удобно выбирать в виде $\binom{n_j}{k_j}$. При таком выборе отношение t_x номера i этажа башни τ_{n_j, k_j} , на котором лежит x , к высоте башни, равной

$\binom{n_j}{k_j}$, сколь угодно мало. Поэтому в дальнейшем, в силу непрерывности по t функций $\varphi_{x,l}^g(t)$, можно рассматривать последовательность башен τ_{n_ν, k_ν} , таких, что $\frac{k_\nu}{n_\nu} \rightarrow a$, считая, что x принадлежит башне $\tau_{n_\nu, k_\nu}(1)$. Описав множество всех возможных предельных функций в этом предположении, по теореме 3 мы опишем все возможные предельные функции для μ_a -п.в. x .

Обозначим через θ отображение, переводящее точку $x \in I$ в $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \in [0, 1]$, а через I_0 обозначим множество последовательностей $x \in I$, постоянных с некоторого места; через G обозначим множество двоично-рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$. Отображение $\theta : I \setminus I_0 \rightarrow [0, 1] \setminus G$ является взаимно однозначным, оно задает изоморфизм динамических систем $(I, \mathcal{B}, P, \mu_a)$ и $([0, 1], \mathcal{B}, T, \lambda_a)$ (см. работы [26] и [3]), где автоморфизм T действует на точках $x \in [0, 1]$, представленных в диадическом разложении, согласно формуле (6). При этом мерам μ_a на I соответствуют меры λ_a на отрезке (в частности, мере $\mu_{1/2}$ соответствует мера Лебега $\lambda_{1/2}$), а всякому цилиндру $[\omega_1, \dots, \omega_n]$ (этажу башни) соответствует стандартный диадический интервал, точки которого начинаются с $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ в диадическом разложении.

Рассмотрим цилиндрическую функцию $f \in \mathcal{F}_N$, $N < n$. Построим частичные суммы $F_{n,k}^f(\cdot) = S_{x \in \tau_n^k(1)}^f(\cdot)$, складывая значения, которые функция принимает на этажах башни, и полагая $F_{n,k}^f(0) = 0$:

$$F_{n,k}^f(i) = \sum_{j=1}^i f(\tau_{n,k}(j)), \quad 0 \leq i \leq \binom{n}{k}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Функция $F_{n,k}^f(\cdot)$ является целочисленной функцией с целочисленным аргументом. Для нецелочисленных аргументов доопределим ее между узлами с помощью линейной интерполяции. Пример для башни $\tau_{4,2}$ и функции Радемахера (взятой с противоположным знаком) $-r_1(x) = (-1)^{x_1}$, $x \in I$, приведен в таблице и изображен на рисунке 1 ниже.

Обозначим через $h_{N,k}^f$ сумму вдоль башни $\tau_{N,k}$:

$$h_{N,k}^f = F_{N,k}^f\left(\binom{N}{k}\right)$$

для $k = 0, \dots, N$.

Функцию g вида $f - f \circ T + C$, где $f \in L^\infty$, а C — некоторая константа, называют *когомологической константе*.

i	Башня $\tau_{4,2}$	$-r_1$	$F_{4,2}^{-r_1}(i)$
6	0011	-1	0
5	0101	-1	1
4	1001	1	2
3	0110	-1	1
2	1010	1	2
1	1100	1	1
0			0

Таблица 1. Значения функции $F_{4,2}^{-r_1}$ вдоль башни $\tau_{4,2}$.

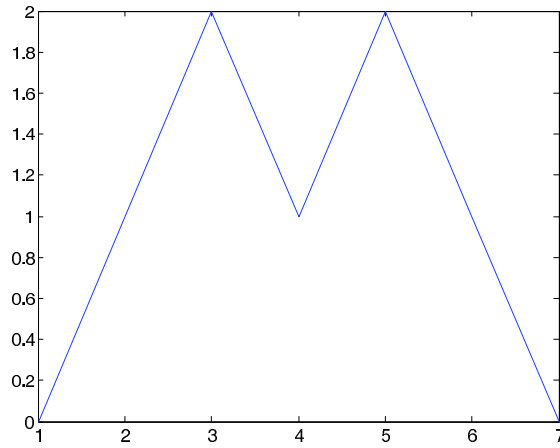


Рис. 1. График функции $F_{4,2}^{-r_1}$.

Сформулируем основные результаты работы [19] в наших обозначениях.

Теорема 4 ([19, лемма 2.2]). *Цилиндрическая функция $g \in \mathcal{F}_N$ комологична константе тогда и только тогда, когда $h_{N,k} \propto \binom{N}{k}$ для $k \in \{0, \dots, N\}$.*

Теорема 5 ([19, теорема 2.4]). *Пусть g – цилиндрическая функция, принадлежащая \mathcal{F}_N . Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Для μ_a -п.в. x предельная функция $\varphi_x^g \in C[0, 1]$ существует, то есть

$$\varphi_{x, l_j(x)}^g \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi_x^g,$$

тогда и только тогда, когда g не когомологична константе.

2. Предельная функция $\varphi^g(t)$ полностью определяется своими значениями в a -рациональных точках вида a^i , $i \geq 1$.
3. Из поточечной сходимости $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_k(x)}^g(t_{i, k(x)}) = \varphi_x^g(a^i)$ в точках вида $t_{i, k(x)} = \frac{\binom{n_{k(x)} - i}{k(x) - i}}{\binom{n_{k(x)}}{k(x)}}$, где $i \geq 0$, вдоль стабилизирующей последовательности $l_k(x) = \binom{n_{k(x)}}{k(x)}$ следует равномерная сходимость $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_k(x)}^g = \varphi_x^g$.

В работе [19] показано, что предельная кривая $\varphi^g(t)$ принадлежит классу кривых, описываемых треугольными массивами ∇_a . Конструкция данного класса будет приведена в §3 ниже. Для нас наиболее важным является то, что в случае $\varphi(a^i) = \frac{\partial^k p^i}{\partial p^k} \Big|_{p=a}$ данные кривые совпадают с кривыми T_a^k , см. теорему 8 ниже.

Теорема 6 ([19, теорема 2.5]). Для цилиндрических функций $f \in \mathcal{F}_N$, удовлетворяющих условию $\text{cov}_{\mu_a}(f, \sum_{i=1}^N r_i) \neq 0$, предельной функцией является функция T_a^1 .

Для $x \in \tau_{n, k}(1)$ обозначим через $\varphi_{n, k}^g$ функцию $\varphi_{x, \binom{n}{k}}^g$, а через $R_{n, k}^g$ соответствующий нормирующий коэффициент:

$$\varphi_{n, k}^g(t) = \frac{F_{n, k}^g(t \binom{n}{k}) - t \cdot F_{n, k}^g(\binom{n}{k})}{R_{n, k}^g}. \quad (9)$$

При доказательстве теоремы 5 авторами работы [19] было проверено, что для всякой последовательности $\{k_l\}_{l=1}^\infty$, такой, что $\frac{k_l}{n(k_l)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a$, существуют подпоследовательности $\{k_{l_j}\}_{j=1}^\infty$, вдоль которых происходит стабилизация предельной кривой: $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n(k_{l_j}), k_{l_j}}^g \in C[0, 1]$. В этой работе в п. 4.3 мы установим точный вид предельной кривой вдоль каждой такой подпоследовательности, что дает ответ на первый вопрос.

§3. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ САМОПОДОБНЫХ КРИВЫХ

Цель данного параграфа – определить класс самоподобных функций T_a^k , $a \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, и описать их свойства самоподобия.

3.1. Диадическая и обобщенная диадическая запись вещественного числа. Любое число $x \in [0, 1]$ можно записать в диадическом виде: $x = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k 2^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m_n}$ для подходящей последовательности натуральных чисел $m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_n \leq \dots$. Возьмем $a \in (0, 1)$. Всякое число $y \in [0, 1]$ можно представить в виде

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_{k-1}} (1-a)^{s_{k-1}} = \frac{a}{1-a} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_k} (1-a)^{s_k}, \quad (10)$$

где $\omega_k \in \{0, 1\}$, $s_k = \sum_{j=1}^k \omega_j$ и (в первой формуле) $s_0 = 0$. Такую запись⁹ назовем *a-диадической*. Запись единственна для п.в. $y \in [0, 1]$, однако для *a-рациональных* точек (т.е. точек с $\omega_{l_0-1} = 0$, $\omega_k = 1$, $k \geq l_0$), как обычно, существует два представления: конечное и бесконечное. Мы выбираем конечное представление:

$$y = \sum_{k=1}^{l_0} \omega_k a^{k-s_{k-1}} (1-a)^{s_{k-1}}.$$

В дальнейшем нам иногда будет необходимо явно указывать точку, для которой мы пишем *a-диадическое* представление. В этих случаях для выбранной точки $y \in [0, 1]$ мы будем использовать обозначения $\omega_j(y)$ и $s_j(y)$, а также $l_0(y)$, если y является *a-рациональным*, вместо вышеупомянутых ω_j , s_j и l_0 .

Числа $y \in [0, 1]$, удовлетворяющие условию $\lim_j \frac{s_j(y)}{n} = 1-a$, называются *нормальными* числами; в частности, при $a = \frac{1}{2}$ – нормальными числами по основанию 2.

⁹Запись неявно использовалась многими авторами; например, С. Какутани [21] рассматривал последовательности *a-диадических* интервалов, соответствующих этой записи. В работе [12] представление рассматривалось в несколько отличной форме, а именно $y = \sum_0^{\infty} (1-a)^n a^{l_n}$ для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_n \leq \dots$, и называлось *обобщенным диадическим*.

Задающую a -диадическое число последовательность $(\omega_j(y))_{j=0}^{\infty}$, состоящую из нулей и единиц, удобно отождествлять с путем в графе Паскаля. Начальным отрезкам этой последовательности будут соответствовать a -диадические интервалы. Например, если $a = 1/2$, то отрезок $(\omega_1 \omega_2 \omega_3) = (1 0 1)$ соответствует обычному диадическому интервалу $[\frac{5}{8}, \frac{6}{8})$.

Замечание 1. Как было отмечено в работе [3], возможно задать другое представление автоморфизма Паскаля $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], T, \lambda_a)$, которое мы обозначим через $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], K_a, \lambda_{1/2})$, где соответствующей инвариантной мерой является мера Лебега, но автоморфизм K_a действует на a -диадических числах по формуле (6). Изоморфизмом является функция распределения L_a меры λ_a , о которой будет подробно рассказано в следующем пункте:

$$L_a \circ P = K_a \circ L_a.$$

Аutomорфизм K_a рассматривался в работе [21] для доказательства равномерной распределённости деления отрезка по Какутани.

3.2. Сингулярная функция Лебега и связанный с ней класс функций. Пусть параметры a и b принадлежат интервалу $(0, 1)$. Мы рассматриваем функции $S_{a,b}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, которые переводят число x , представленное в a -диадической записи в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_{k-1}} (1-a)^{s_{k-1}},$$

в

$$S_{a,b}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k b^{k-s_{k-1}} (1-b)^{s_{k-1}}. \quad (11)$$

Функции $S_{a,b}(\cdot)$ были определены в [9] и изучались в [11]. В частности, в работе [9] показано, что при $a \neq b$ эти функции являются сингулярными, непрерывными, возрастающими.

В частном случае $a = \frac{1}{2} \neq b$ получаем хорошо известную (см. работы [25] и [10]) функцию распределения меры λ_b , часто называемую *сингулярной функцией Лебега* или *сингулярной функцией де Рама*; см., например, [22] и [23]. Эту функцию часто обозначают $L_b(x)$. Нетрудно показать (см. [23]), что в двоично-рациональных точках вида $\frac{k}{2^l}$, $0 \leq k \leq 2^l - 1$, эта функция равна $\sum_{j=0}^{k-1} b^{j-s_2(j)} (1-b)^{s_2(j)}$,

где $s_2(j)$ – сумма цифр в двоичном разложении натурального числа j . Это наблюдение позволило получить новые результаты в области (power/binomial)-sum-of-digits problems в работе [23]¹⁰ и большом количестве более ранних работ. Подробности о связи с изучаемыми в данной работе эргодическими суммами см. в §7 ниже. Справедливо соотношение $L_b \circ L_a^{-1} = S_{a,b}$.

В общем случае для всякой a -рациональной точки

$$x_0 = \sum_{j=1}^{l_0} \omega_j(x_0) a^j \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{j-1}(x_0)}$$

и произвольного числа $x \in [0, 1]$ функция $S_{a,b}$ удовлетворяет следующему уравнению самоподобия:

$$S_{a,b}(x_0 + a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}(x_0)} x) = S_{a,b}(x_0) + b^{l_0} \left(\frac{1-b}{b}\right)^{s_{l_0}(x_0)} S_{a,b}(x). \quad (12)$$

Вывод формулы (12) приведен в приложении 8.1.1. Формула (12) означает, что график функции $S_{a,b}(x)$ на обобщенном диадическом интервале $[x_0, x_0 + a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}(x_0)}]$ является миниатюрной версией функции $S_{a,b}$, сжатой в $b^{l_0} \left(\frac{1-b}{b}\right)^{s_{l_0}}$ раз по вертикали и в $a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}}$ раз по горизонтали.

Другой способ задания функций $S_{a,b}(\cdot)$ состоит в их определении как решений системы уравнений де Рама. Согласно [14], система¹¹

$$\begin{cases} G(ax) = bG(x), \\ G(a + (1-a)x) = b + (1-b)G(x) \end{cases} \quad (13)$$

имеет единственное решение G^* , которое, как показано в [9], совпадает с $S_{a,b}$.

Из (13) легко получить следующие свойства функции $S_{a,b}$:

- (a) $S_{a,b} \circ S_{b,c} = S_{a,c}$,
- (b) $S_{a,b}^{-1} = S_{b,a}$,
- (c) $S_{a,b}(1-t) = 1 - S_{1-a,1-b}(t)$, $t \in [0, 1]$,

для произвольных $a, b, c \in (0, 1)$.

¹⁰См. также несколько отличное изложение в [15].

¹¹Случай $a = \frac{1}{2}$ рассматривался самим де Рамом, см. [13].

Класс $S_{a,b}(\cdot)$ позволяет определить новый класс функций¹² (см. [11])

$$T_a^k := \frac{\partial^k S_{a,b}}{\partial b^k} \Big|_{b=a}.$$

При $a = 1/2$ и $k = 1$, т.е. для функции $\frac{1}{2}T_{1/2}^1$, график этой функции является знаменитой кривой Такаги, см. [27]. Функции T_a^k разделяют многие свойства функции Такаги. Например (см. [11]), они являются нигде не дифференцируемыми¹³.

Дифференцируя функцию $S_{a,b}$ по параметру b и полагая b равным a , согласно (11), получаем явное представление для функции T_a^k :

$$\begin{aligned} T_a^k(x) &:= \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{\partial^k}{\partial b^k} ((1-b)^{s_{j-1}} b^{j-s_j+1}) \Big|_{b=a} \\ &= k! \sum_{j \geq 1} \omega_j \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{s_{j-1}}{i} \binom{j-s_{j-1}}{k-i} a^{j-k} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{j-1}-i}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $x = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j a^{j-s_{j-1}} (1-a)^{s_{j-1}}$. Сходимость следует из равномерной суммируемости ряда в правой части.

Замечание 2. Функции $T_a^k(x)$ являются аналитическими функциями от a .

Для функций T_a^1 система уравнений де Рама принимает вид

$$\begin{cases} T_a^1(ax) = a T_a^1(x) + x, \\ T_a^1(a + (1-a)x) = (1-a) T_a^1(x) + 1 - x. \end{cases} \quad (15)$$

Для T_a^k , где $k \geq 2$, получаем

$$\begin{cases} T_a^k(ax) = a T_a^k(x) + k T_a^{k-1}(x), \\ T_a^k(a + (1-a)x) = (1-a) T_a^k(x) - k T_a^{k-1}(x). \end{cases} \quad (16)$$

¹²Их также можно записать в виде $T_a^k = \frac{\partial^k L_b}{\partial b^k} \Big|_{b=a} \circ L_a^{-1}$.

¹³Это резко отличает их от, например, “похожих” функций $\frac{\partial^k S_{\frac{1}{2},b}}{\partial b^k} \Big|_{b=a}$, изучавшихся в [8]. В [8] установлено, что эти функции п.в. дифференцируемы при $a \neq 1/2$, что кажется совершенно неожиданным результатом. В работе [22] описывалось множество точек, где функция $L_a(x)$ имеет нулевую производную, а также доказана дифференцируемость п.в. функции $(T_{1/2}^1 \circ L_a^{-1})(x)$ при $a < 1/2$.

Свойства самоподобия кривых T_a^k , $k \geq 1$, являются следствием самоподобия функции $S_{a,b}$ и устанавливаются, как показано в следующей теореме¹⁴.

Теорема 7. Для всякого $k \geq 1$, для всякой a -рациональной точки $x_0 = \sum_{j=1}^{l_0} \omega_j(x_0) a^j \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{j-1}(x_0)}$ и произвольного числа $x \in [0, 1]$ функция T_a^k удовлетворяет функциональному соотношению

$$T_a^k(x_0 + a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)} x) = T_a^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k c_\mu T_a^\mu(x), \quad (17)$$

где коэффициенты c_μ вычисляются по формуле

$$c_\mu = \binom{k}{\mu} \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial a^{k-\mu}} a^{l_0-1-s_{l_0-1}} (1-a)^{1+s_{l_0-1}} \quad (18)$$

и $T_a^0(x) \equiv x$.

Доказательство. Дифференцируем равенство (12) по b и, полагая b равным a , получаем

$$T_a^k(x_0 + rx) = T_a^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} T_a^\mu(x) \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial a^{k-\mu}} a^{l_0-1-s_{l_0-1}} (1-a)^{1+s_{l_0-1}}. \quad \square$$

Формула (17) означает, что функция $T_a^k(x)$ на обобщенном диадическом интервале $[x_0, x_0 + \alpha_0]$, $\alpha_0 = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$, выражается через линейную комбинацию функций $\{T_a^j(x)\}_{j=1}^k$ и линейной функции $c_0 x$, которую естественно назвать трендом¹⁵. Для функции $\psi \in C[0, 1]$ определим новую функцию $\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c} \in C[0, 1]$ равенством

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c}(x) = \frac{1}{c} (\psi(x_0 + \alpha_0 x) - \psi(x_0) - x\psi(x_0 + \alpha_0)). \quad (19)$$

Функция $\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c}$ получается из функции $\psi(x)$ сужением на a -диадический интервал с коррекцией на нормировку, константу и тренд.

¹⁴Частный случай $a = \frac{1}{2}$ доказан в [23, предложение 4.2] дифференцированием равенства (12)

¹⁵Ввиду того, что $T_a^\mu(0) = T_a^\mu(1) = 0$, $\mu \in \mathbb{N}$.

Следствие 1. На обобщенном a -диадическом интервале $[x_0, x_0 + \alpha_0]$, где $\alpha_0(x_0) = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$, справедливы следующие равенства:

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{T_a^1, C_0}(x) = T_a^1(x) \quad (20)$$

и

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{T_a^2, C_0}(x) = \gamma T_a^1(x) + T_a^2(x), \quad (21)$$

где $C_0 = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}}$, $\gamma = -\frac{2(s_{l_0} - l_0(1-a))}{a(1-a)}$.

Доказательство. По теореме 7 на обобщенном a -диадическом интервале $[x_0, x_0 + \alpha_0]$ для функции $T_a^1(x)$ выполнено соотношение

$$T_a^1(x_0 + \alpha_0 x) = T_a^1(x_0) + C_1 x + C_0 T_a^1(x). \quad (22)$$

Для функции $T_a^2(x)$ выполнено соотношение

$$T_a^2(x_0 + \alpha_0 x) = T_a^2(x_0) + C_2 x + C_0(\gamma T_a^1(x) + T_a^2(x)), \quad (23)$$

где

$$C_\mu = \binom{2}{\mu} \frac{\partial^\mu}{\partial a^\mu} a^{l_0 - s_{l_0}} (1-a)^{s_{l_0}}, \quad \mu \in \{0, 1, 2\},$$

$$\gamma = -\frac{2(s_{l_0} - l_0(1-a))}{a(1-a)} = \frac{C_1}{C_0}. \quad \square$$

Таким образом, на интервале описанного вида функция $T_a^1(x)$ с точностью до константы, тренда и нормировки совпадает с собой же. Для $T_a^2(x)$ это не так: необходимо рассматривать линейные комбинации вида $\gamma T_a^1(x) + T_a^2(x)$.

Возникает естественный вопрос: верно ли, что всякий график линейной комбинации $\alpha T_a^1(x) + \beta T_a^2(x)$ является участком (с точностью до константы и тренда) графика функции $T_a^2(x)$? На этот вопрос отвечает следующее предложение.

Предложение 1. Пусть $a \in (0, 1)$ – иррациональное число. Всякую линейную комбинацию вида $\alpha T_a^1(x) + \beta T_a^2(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, можно представить как предел в $C[0, 1]$ функций $\lim_{x_k \rightarrow z} \beta \Lambda_{x_k, c_k}^{T_a^2, c_k}$ для некоторой сходящейся последовательности a -рациональных чисел x_k и

$$c_k = a^{l_0(x_k) - s_{l_0}(x_k)} (1-a)^{s_{l_0}(x_k)}.$$

Доказательство. Положим γ равным $\frac{\alpha}{\beta}$. Согласно следствию 1, функция $\Lambda_{x_k, c_k}^{T_a^2, c_k}$, где $c_k = a^{l_0(x_k)} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0(x_k)}}$, равна $\gamma(k)T_a^1(x) + T_a^2(x)$, где

$$\gamma(k) = -\frac{2(s_{l_0(x_k)} - l_0(x_k)(1-a))}{a(1-a)}$$

для всякого a -рационального x_k . В силу того, что $a \in (0, 1)$, а траектории поворота окружности на иррациональный угол плотны, выражениями вида $i - (1-a)j$, где $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, можно приблизить произвольное число $z \in \mathbb{R}$.

Поэтому мы можем выбрать x_k таким образом, чтобы $\gamma(k)$ стремилось по k к γ . Сходимость функций $\Lambda_{x_k}^{T_a^2, c_k}(x)$, очевидно, равномерна. \square

Упомянем также, что в базовой работе [19] авторы определили классы функций $\varphi_{\nabla_a^{(k)}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Через ∇_a они обозначили бесконечный треугольный массив пар чисел $(x_{i,j}, y_{i,j})$, $i \geq 0$, $0 \leq j \leq i$, удовлетворяющих двум равенствам: $x_{i+1,j+1} = x_{i,j} - x_{i+1,j}$ и $y_{i+1,j+1} = y_{i,j} - y_{i+1,j}$, которые при заданных "начальных значениях" $(x_{i,0}, y_{i,0})$, $i \geq 0$, определяют остальные пары $(x_{i,j}, y_{i,j})$, $i \geq 0$, $1 \leq j \leq i$. В a -рациональных точках вида $x_{i,0} = a^i$ функции $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}$ задаются так: $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}(x_{i,0}) = y_{i,0} = i(i-1) \dots (i-k)a^{i-k-1}$, а в остальных a -рациональных точках t ранга $i+1$ — с помощью равенств $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}(t + x_{i+1,j}) = \varphi_{\nabla_a^{(k)}}(t) + y_{i+1,j}$. Согласно лемме 3.1 из работы [19] данное определение на всюду плотном множестве a -рациональных точек позволяет определить самоподобные непрерывные функции на $[0, 1]$. В терминах работы [19] сформулируем следующее утверждение.

Теорема 8. При $k \in \mathbb{N}$ функции $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}$ совпадают с функциями T_a^k .

Доказательство. Достаточно проверить, что (а) $T_a^k(x)$ сохраняет конкатенационную структуру массива ∇_a , и убедиться, что (б) значения в a -рациональных точках вида $x_{i,0}^{(k)} = a^i$ совпадают.

Для проверки утверждения (б) воспользуемся формулой (14) при $x = a^i$. Мы имеем

$$\omega_j(x) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

$$T_a^k(a^i) = \frac{\partial^k}{\partial a^k} a^i = i(i-1) \dots (i-k)a^{i-k-1}.$$

Чтобы убедиться в справедливости утверждения (а), нужно проверить, что для $x_{i+1,j+1} = x_{i,j} - x_{i+1,j}$ соотношение $T_a^k(x_{i+1,j+1}) = T_a^k(x_{i,j}) - T_a^k(x_{i+1,j})$ выполнено при условии, что $x_{i,0} = a^i$. Сначала по индукции убеждаемся в том, что $x_{i,j} = a^{i-j}(1-a)^j$. Свойство $T_a^k(x_{i,j}) = T_a^k(x_{i+1,j+1}) + T_a^k(x_{i+1,j})$ можно проверить напрямую с помощью формулы (14), но удобнее воспользоваться теоремой 7. В её обозначениях $x_0 = a^{i+1-j}(1-a)^j$, $x = 1$. \square

Графики функций $T_a^k(x)$ для некоторых значений параметров приведены в приложении 8.2.1. В данной работе нас особенно интересуют функции $T_{1/2}^1$, $T_{1/2}^2$ и их линейные комбинации $\alpha T_{1/2}^1 + \beta T_{1/2}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, которые, как мы докажем, описывают все возможные предельные функции при $a = 1/2$.

§4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Система базисных функций Уолша. Систему функций Радемахера $\{r_n(y)\}_1^\infty$ на кубе I можно коротко определить следующим образом¹⁶:

$$r_n(y) := (-1)^{y_n}, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in I.$$

Напомним определение системы функций Уолша (в нумерации Пэли).

Определение 1. Положим $w_0(y) \equiv 1$. Число $t \in \mathbb{N}_0$ представим в виде $t = t_0 2^0 + t_1 2^1 + \dots + t_{N-1} 2^{N-1}$, где $t_i \in \{0, 1\}$. Положим

$$w_t(y) = \prod_{i=0}^{N-1} (r_{i+1}(y))^{t_i} = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y),$$

где r_i — i -я функция Радемахера.

Функции Уолша–Пэли образуют группу характеров диадической группы \mathbf{Z}_2 , но мы будем пользоваться лишь тем, что они образуют ортонормированный базис в $L_{\mu_{1/2}}^2(I)$. Для функции $f \in L_{\mu_{1/2}}^2(I)$ обозначим через $S_n(f, y)$ частичные суммы ряда Фурье по системе Уолша–Пэли:

$$S_n(f, y) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_k(y),$$

¹⁶Наше определение задает функции Радемахера на группе \mathbf{Z}_2 , при отображении θ оно естественно соответствует классическому определению $r_n(y) = \text{sign}(\sin(2^n \pi y))$, $y \in [0, 1)$, $n \geq 1$, на $[0, 1)$.

где $c_k = \int_0^1 f(y)w_k(y)dy$.

4.2. Явная формула для эргодических сумм. В этом пункте будет получена явная формула для эргодической суммы, построенной по функции Уолша.

4.2.1. *Биномиальное разложение натурального числа.* Пусть $k \in \mathbb{N}$; для любого $i \in \mathbb{N}$ существуют и единственны¹⁷ целые числа $a_k > a_{k-1} > \dots > a_{k-s} \geq 0$, такие, что $i = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_{k-s}}{k-s}$. Данное представление натурального числа называют биномиальным разложением или k -каскадом (см., например, [20, гл. 10.4]). Определим функцию¹⁸ $\partial_k^{N,j}(\cdot)$ на натуральных числах равенством

$$\partial_k^{N,j}(i) = \binom{a_k - N}{k - j} + \binom{a_{k-1} - N}{k - 1 - j} + \dots + \binom{a_{k-s} - N}{k - s - j}.$$

Если натуральное число i рассматривать как номер пути $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ в графе Паскаля, ведущего в вершину (n, k) (см. таблицу 1), то $\partial_k^{N,j}(i)$ – число путей, начинающихся в вершине (N, j) и не превосходящих пути ω относительно обратного лексикографического порядка.

4.2.2. *Явная формула для эргодических сумм функций Уолша.* Для произвольной функции Уолша $w_t = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y)$ обозначим через m сумму $s_2(t) = \sum_{i=0}^{N-1} t_i$. Тогда для любого натурального аргумента $i = \binom{a_k}{k_1} + \dots + \binom{a_1}{1}$, удовлетворяющего условию $a_1 \geq N$, выполнено соотношение

$$F_{n,k}^{w_t}(i) = \sum_{j=0}^N h_{N,j}^{w_t} \partial_k^{N,j}(i), \quad 0 \leq i \leq \binom{n}{k}, \quad (24)$$

¹⁷В существовании легко убедиться, используя “жадный алгоритм”: возьмем в качестве a_k максимальное натуральное число, такое, что $x \geq \binom{x}{k}$; на следующем шаге заменим x на $x - \binom{x}{k}$, а k на $k - 1$ и будем продолжать, пока не получим ноль. Единственность проверяется по индукции.

¹⁸Выбор обозначения связан с тем, что через $\partial^l(A)$ обозначают l -тень множества $A \subset \{0, 1\}^n$, т.е. множество всех векторов, получающихся из его элементов заменой l единиц на нули. Если A k -регулярно (т.е. каждый вектор из A содержит ровно k единиц), то, согласно теореме Крускала–Катоны, $|\partial^l(A)| \geq \partial^{0,l}(|A|)$; см., например, [20], а также [5].

где множитель $h_{N,j}^{w_t}$ равен $\binom{N}{j} \left[2 \cdot \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \frac{\binom{N-j}{2l} \binom{j}{m-2l}}{\binom{N}{m}} - 1 \right]$ и совпадает с интегралом функции w_t вдоль башни $\tau_{N,j}$. Заметим, что $F_{n,k}^{w_t}(i)$ не зависит от t , а только лишь от $m = s_2(t)$. С точки зрения динамики это означает, что эргодические суммы $S_x^{w_{t_1}}(i)$ и $S_x^{w_{t_2}}(i)$ для функций Уолша w_{t_1} и w_{t_2} , являющихся произведением одинакового количества функций Радемахера, совпадают во всех точках $i = \binom{a_k}{k_1} + \dots + \binom{a_1}{1}$, для которых $a_1 \geq N$, см. рис. 4 и 5 в п. 8.2.2. Следовательно, достаточно найти предельные кривые для функций Уолша вида $w_{(2^m-1)} = \prod_{i=0}^{m-1} r_{i+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Для них формула (24) принимает особо простой вид:

$$F_{n,k}^{w_{t_m}}(i) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \partial_k^{m,j}(i), \quad t_m = 2^m - 1. \quad (25)$$

Доказательство формулы (24) приведено в приложении 8.1.2.

Если ограничиться только аргументами вида $x_{i,k,n} = \binom{n-i}{k-i}$, то формулу (25) можно записать в виде

$$F_{n,k}^{w_t}(x_{i,k,n}) = S_{n-i,k-i}^m \cdot \binom{n-i}{k-i}, \quad (26)$$

где через $S_{n,k}^m$ обозначено выражение

$$\sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \frac{(k)_j (n-k)_{m-j}}{(n)_m}$$

(через $(s)_j$ обозначена падающая степень $s(s-1) \dots (s-j+1)$). При $n = 2k$ асимптотика последовательности $S_{2k-i,k-i}^m$ при $k \rightarrow \infty$ описывается следующей леммой.

Лемма 1. Пусть $m \geq 1$, $i \geq 0$ – фиксированные целые числа, $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$S_{2k-i,k-i}^m = \begin{cases} C_l i + O\left(\frac{1}{k^{l+2}}\right), & \text{если } m = 2l + 1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{C_l}{(2l+1)} (l(i(i-1) - l) - 2k) + O\left(\frac{1}{k^{l+2}}\right), & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где коэффициент C_l равен $\frac{(-1)^{l+1} (2l+1)!!}{(2k)^{l+1}}$.

Доказательство. См. приложение 8.1.3. □

Эргодическая сумма после вычитания тренда запишется в виде

$$F_{n,k}^{w_{t,m}}(x_{i,k,n}) - \frac{x_{i,k,n}}{\binom{n}{k}} F_{n,k}^{w_{t,m}}\left(\binom{n}{k}\right) = \left(S_{n-i,k-i}^m - S_{n,k}^m\right) \cdot \binom{n-i}{k-i}. \quad (27)$$

После этого, см. формулу (9), остается рассмотреть ее как функцию аргумента $t_{i,k,n} = \frac{x_{i,k,n}}{\binom{n}{k}} \in [0, 1]$ и поделить на подходящий нормирующий множитель $R_{n,k}^{w_t}$:

$$\varphi_{n,k}^{w_t}(t_{i,k,n}) = \frac{F_{n,k}^{w_t}(t_{i,k,n} \binom{n}{k}) - t_{i,k,n} \cdot F_{n,k}^{w_t}\left(\binom{n}{k}\right)}{R_{n,k}^{w_t}}. \quad (28)$$

Из формул (26) и (28) легко следует, что

$$\varphi_{n,k}^{w_t}(y) = (-1)^{m+1} \varphi_{n,n-k}^{w_t}(1-y), \quad y \in [0, 1], \quad m = s_2(t). \quad (29)$$

4.3. Предельные кривые. В силу теоремы 5 и формулы (28) для некогомологичных константе цилиндрических функций $g \in \mathcal{F}_N$ равномерный предел $\varphi_x^g = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x,l_n}^g$ существует и полностью определяется (поточечными) предельными значениями $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{n_{k_\nu}, k_\nu}^g(t_{i,k_\nu, n_\nu})$ в точках $t_{i,k_\nu, n_\nu} = \frac{\binom{n_{k_\nu}-i}{k_{k_\nu}}}{\binom{n_{k_\nu}}{k_{k_\nu}}}$, $i \geq 1$, вдоль стабилизирующей последовательности $l_\nu(x) = \binom{k_\nu}{k_\nu}$, где $\frac{k_\nu}{n_{k_\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$. Выберем последовательность $j_\nu = o(k_\nu)$, такую, что $\tilde{k}_\nu = k_\nu + j_\nu$, $2\tilde{k}_\nu = n_\nu + |j_\nu|$. На графе Паскаля последовательность j_ν задает длину кратчайшего пути из (n_ν, k_ν) в расположенную ниже центральную вершину $(2\tilde{k}_\nu, \tilde{k}_\nu)$. Положим γ равным (быть может, бесконечному) пределу $\lim_{\nu \rightarrow \infty} j_\nu$. Для λ -п.в. x этот предел бесконечен.

Предложение 2. Пусть $g = w_t$ — функция Уолша, n_ν, k_ν, j_ν — выбранные выше по g и x последовательности, $m = s_2(t)$ и $\gamma = \lim_{\nu \rightarrow \infty} j_\nu$.

1. Для $y \in [0, 1]$ имеют место следующие поточечные сходимости.

(a) Если $s_2(t) = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(y) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} T_{1/2}^1(y).$$

(b) Если $s_2(t) = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ и $|\gamma| = \infty$, то

$$\varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(y) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} T_{1/2}^1(y).$$

(с) Если $s_2(t) = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ и $|\gamma| < \infty$, то

$$\varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(y) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} (2\gamma T_{1/2}^1(y) + T_{1/2}^2(y)).$$

При этом нормирующий коэффициент $R_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}$ равен¹⁹

$$c_m \binom{n_\nu}{k_\nu} ((1 + j_\nu) \cdot k^{-1-[m/2]} + o(k^{-2-[m/2]})),$$

$$\text{где } c_m = \begin{cases} 2^{-l-2}(2l+1)!!, & \text{если } m = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 2^{-l-2}l(2l-1)!!, & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Сходимость также имеет место в $C[0, 1]$.

Доказательство. В силу формулы (29) можно считать, что $k_\nu \leq n/2$, что эквивалентно неотрицательности j_ν . Согласно формуле (27),

$$\varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(t_{i, k_\nu, n_\nu}) = \left(S_{n_\nu - i, k_\nu - i}^m - S_{n_\nu, k_\nu}^m \right) \cdot \frac{\binom{n_\nu - i}{k_\nu - i}}{\binom{n_\nu}{k_\nu}}.$$

Тогда, поскольку $n_\nu = 2\tilde{k}_\nu - j_\nu$, $k_\nu = \tilde{k}_\nu - j_\nu$, получаем

$$\varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(t_{i, k_\nu, n_\nu}) = \left(S_{2\tilde{k}_\nu - j_\nu - i, \tilde{k}_\nu - j_\nu - i}^m - S_{2\tilde{k}_\nu - j_\nu, \tilde{k}_\nu - j_\nu}^m \right) \cdot \frac{\binom{n_\nu - i}{k_\nu - i}}{\binom{n_\nu}{k_\nu}}.$$

В силу того, что $j_\nu = o(k_\nu)$, согласно лемме 1, имеем

$$\begin{aligned} & S_{2\tilde{k}_\nu - j_\nu - i, \tilde{k}_\nu - j_\nu - i}^m - S_{2\tilde{k}_\nu - j_\nu, \tilde{k}_\nu - j_\nu}^m \\ &= \begin{cases} C_l i + o\left(\frac{1}{k_\nu^{l+2}}\right), & \text{если } m = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{C_l l (i(i-1) + 2ij_\nu)}{(2l+1)} + o\left(\frac{1}{k_\nu^{l+2}}\right), & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}, \end{cases} \end{aligned}$$

где коэффициент C_l равен $\frac{(-1)^{l+1}(2l+1)!!}{(2k_\nu)^{l+1}}$. Отношение $\frac{\binom{n_\nu - i}{k_\nu - i}}{\binom{n_\nu}{k_\nu}}$ стремится к $\left(\frac{1}{2}\right)^i$ при $\nu \rightarrow \infty$. Таким образом, мы получаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(t_{i, k_\nu, n_\nu}) \\ &= (-1)^{l+1} \begin{cases} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}, & \text{если } m = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}, & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}, |\gamma| = \infty, \\ (2\gamma i + i(i-1))\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}, & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}, \gamma < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

¹⁹Через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.

где γ равно (возможно, бесконечному) пределу $\lim_{\nu \rightarrow \infty} j_\nu$, а соответствующий нормирующий коэффициент $R_{n_\nu, k_\nu}^{w_i}$ равен

$$\binom{n_\nu}{k_\nu} \cdot \begin{cases} 2^{-l-2}(2l+1)!!, & \text{если } m = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 2^{-l-2}l(2l-1)!!(1+j_\nu), & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (30)$$

Согласно теореме 5, сходимость в точках $t_{i, k_\nu, n_\nu} = \frac{\binom{n_\nu - i}{k_\nu - i}}{\binom{n_\nu}{k_\nu}}$ влечет равномерную сходимость. \square

Замечание 3. Можно показать, что в работе [19] в качестве примера функций, для которых вдоль последовательности $(2k, k)$ предельной кривой оказывалась $T_{1/2}^2$, рассматривались функции, совпадающие с функциями Уолша $\pm w_{2^m-1}$, $m \geq 2$. Однако не было замечено, что эти функции задают все возможные предельные кривые для **базисных** функций $\{w_t\}_{t \geq 1}$. Также не была найдена общая асимптотика при произвольном $m \in \mathbb{N}$ и не было показано, что предельными функциями при всяком $m \in \mathbb{N}$ являются функции $T_{1/2}^1$ и $T_{1/2}^2$ (что было, однако, предположено на основе нескольких расчетов асимптотики для случаев, когда $2 \leq m \leq 7$).

Докажем теперь теорему 1, объявленную выше.

Теорема 1. Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой $(I, \mathcal{B}, \mu_{1/2})$, $N \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{F}_N$ – некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Для $\mu_{1/2}$ -п.в. x предельной функцией является $\alpha_{g,x} T_{1/2}^1$, где $\alpha_{g,x} = \pm 1$.
2. Если для заданной точки $x \in [0, 1]$ предельная функция существует, то найдутся вещественные числа $\alpha_{g,x}, \beta_{g,x}$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n(x)}^g \alpha_{g,x} T_{1/2}^1 + \beta_{g,x} T_{1/2}^2 \quad (\text{сходимость в } C[0, 1]).$$

Доказательство. 1. Согласно теореме 5, для $\mu_{1/2}$ -п.в. x найдется последовательность (n_ν, k_ν) , такая, что предельная кривая существует. Выберем, как и выше, последовательность j_ν , такую, что $k_\nu = k_\nu + j_\nu$, $2k_\nu = n_\nu + |j_\nu|$, и положим γ_x равным $\lim_{\nu \rightarrow \infty} j_\nu$. Будем предполагать, что $|\gamma_x| = \infty$ (что выполнено для п.в. x). Будем считать ниже, что ν уже выбрано достаточно большим. Произвольную цилиндрическую

функцию $g \in \mathcal{F}_N$ можно разложить в сумму Фурье

$$g(y) = \sum_{t=0}^{2^N-1} c_t w_t(y) = \sum_{m=0}^N \sigma_m^g,$$

где через σ_m^g обозначена сумма $\sum_{t: s_2(t)=m} c_t w_t$. Если

$$\sum_{t: s_2(t)=m} c_t \equiv \text{cov}_{\mu_{1/2}}(g, \sigma_m^g) \neq 0,$$

то, в силу зависимости предельной кривой для функции w_t лишь от числа $s_2(t)$, предельные функции $\varphi_{x, l_n}^{\sigma_m^g}(x)$ и $\varphi_{x, l_n}^{w_t}(x)$ совпадают. В противном случае функция σ_m^g когомологична константе²⁰, предельной кривой для нее не существует, а нормирующий коэффициент $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$ ограничен.

Меняя порядок суммирования в эргодической сумме, видим, что $F_{n_\nu, k_\nu}^g = \sum_{m=0}^N F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$, а значит, допредельная функция $\varphi_{n_\nu, k_\nu}^g(t_{i, k_\nu, n_\nu})$ задается суммой

$$\sum_{m=1}^N \frac{F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}(t_{i, k_\nu, n_\nu}(\binom{n_\nu}{k_\nu})) - t_{i, k_\nu, n_\nu} \cdot F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}(\binom{n_\nu}{k_\nu})}{R_{n_\nu, k_\nu}^g},$$

где $R_{n_\nu, k_\nu}^g = \max_{1 \leq m \leq N} R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$.

Пусть m^* – минимальное натуральное число, такое, что $\sum_{t: s_2(t)=m^*} c_t \neq 0$.

Если m^* нечетно, то, согласно пункту (а) предложения 2, $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_{m^*}^g} = \max_{1 \leq m \leq N} R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$ и предельной функцией оказывается $\alpha_g T_{1/2}^1$, где $\alpha_g = -\text{sign} \sum_{t: s_2(t)=m^*} c_t$. Если m^* четно, то, согласно пункту (б) предложения

2, $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_{m^*}^g} = \max_{1 \leq m \leq N} R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$ (в силу нашего предположения, случай (с) исключен) и предельной функцией оказывается $\alpha_{g,x} T_{1/2}^1$, где $\alpha_{g,x} = \text{sign} \gamma_x \cdot \text{sign} \sum_{t: s_2(t)=m^*} c_t$.

²⁰Это следует, например, из теоремы 4, так как коэффициенты $h_{m,j}^{\sigma_m^g}$, $0 \leq j \leq m$, равны нулю.

2. Рассмотрим теперь случай $|\gamma_x| < \infty$. Так как нормирующий коэффициент $R_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}$ имеет вид $\text{const} \binom{n_\nu}{k_\nu} ((1 + j_\nu) \cdot k_\nu^{-1 - [m/2]} + o(k_\nu^{-2 - [m/2]}))$, где $(1 + j_\nu) \cdot k_\nu^{-1 - [m/2]}$ нестрого убывает по m , предельная функция для g полностью определяется взвешенной суммой предельных функций, соответствующих $\sigma_{m_1}^g$ и $\sigma_{m_2}^g$, где $[m_1/2] = [m_2/2]$ – минимальные числа, такие, что $\sum_{t: s_2(t)=m_i} c_t \equiv \text{cov}_{\mu_{1/2}}(g, \sigma_{m_i}^g) \neq 0, i \in \{1, 2\}$, хотя бы для одного i . Согласно пунктам (а) и (с) предложения 2, предельной функцией является сумма $\alpha_{g,x} T_{1/2}^1 + \beta_{g,x} T_{1/2}^2$. Отношение $\frac{\alpha_{g,x}}{\beta_{g,x}}$ равно $\frac{\text{cov}_{\mu_{1/2}}(g, \sigma_{m_1}^g)}{\text{cov}_{\mu_{1/2}}(g, \sigma_{m_2}^g)} + 2\gamma_x$. \square

В процессе доказательства мы также установили следующий результат.

Предложение 3. *Цилиндрическая функция g , принадлежащая \mathcal{F}_N , когомологична константе тогда и только тогда, когда*

$$\text{cov}_{\mu_{1/2}}(g, \sum_{t: s_2(t)=m} w_t) = 0$$

для всякого $m, 1 \leq m \leq N$.

Замечание 4. Согласно теореме 1, предельной функцией может быть произвольная линейная комбинация $\alpha T_{1/2}^1 + \beta T_{1/2}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Так как число $a = 1/2$ рационально, участки кривой $T_{1/2}^2$ не приближают всякую такую комбинацию, см. предложение 1 выше.

4.4. Случай нецилиндрической функции. Цель данного раздела – дать ответ на вопрос 2.

Через $S_n(g, y) = \sum_{k=0}^n c_k w_k(y)$ мы обозначаем частичную сумму ряда Фурье функции g по системе Уолша–Пэли, а через $B_n(g)$ остаток абсолютного ряда:

$$B_n(g) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|.$$

Мы предполагаем, что $B_n(g)$ убывает суперэкспоненциально:

$$B_n = o(2^{-n}) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В частности, ряд Фурье сходится абсолютно. Если $g \in C_\rho(I)$, то, как известно, частичные суммы $S_n(g, y)$ сходятся к g равномерно.

Покажем сначала, что абсолютная сходимость ряда Фурье влечет условие (5), предложенное в [19]. Частичная сумма $S_{2^N-1}(g, y)$ может рассматриваться как условное ожидание $\mathbb{E}_\lambda(g|\mathcal{F}_N)$. Справедлива оценка

$$\sum_{N \geq 1} \|\mathbb{E}_{\mu_{1/2}}(g|\mathcal{F}_{N+1}) - \mathbb{E}_{\mu_{1/2}}(g|\mathcal{F}_N)\|_2 \leq \sum_{N \geq 1} |c_N| \cdot \|w_N\|_2 = \sum_{N \geq 1} |c_N|.$$

Поэтому условие (5)²¹ выполнено для всякой функции g с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Теорема 2. Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой $(I, \mathcal{B}, \mu_{1/2})$, $N \in \mathbb{N}$, функция $g \in C_\rho(I)$ удовлетворяет условию (5) и для коэффициентов ряда Фурье по системе Уолша–Пэли выполнено условие $B_n = o(2^{-n})$, $n \rightarrow \infty$. Положим $\alpha_g = -\text{sgn}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \text{cov}(r_j, g)\right)$.

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Для $\mu_{1/2}$ -п.в. x предельной функцией является $\alpha_g T_{1/2}^1$.
2. Если для заданной точки $x \in [0, 1]$ предельная функция существует, то она равна $\alpha_g T_{1/2}^1$.

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 1, запишем g в виде суммы ряда Фурье:

$$g(y) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t w_t(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m^g.$$

Как и выше, по x выберем последовательности n_ν, k_ν, j_ν , такие, что вдоль (n_ν, k_ν) предельная кривая $\varphi_x^{w_1}$ для функции Уолша w_1 существует. Выберем, как и выше, последовательность j_ν , такую, что $\tilde{k}_\nu = k_\nu + j_\nu$, $2\tilde{k}_\nu = n_\nu + |j_\nu|$.

²¹Условие (5) означает принадлежность функции диадическому пространству Харди H_1 . Известно (см. [24]), что для функции $g \in H_1$ ряд Фурье по системе Уолша обладает следующим свойством: ряд $\sum_{N \geq 1} \frac{|c_N|}{N}$ сходится. Функция g называется

дифференцируемой по Батзеру–Вагнеру, если существует функция $f \in H_1$, коэффициенты Фурье которой $\{\tilde{c}_N\}_{N \geq 1}$ удовлетворяют условию $N c_N = \tilde{c}_N$. Таким образом, для дифференцируемой по Батзеру–Вагнеру функции условия абсолютной суммируемости ряда Фурье и (5) эквивалентны.

Из центральной предельной теоремы следует, что для п.в. x выполнено²² неравенство $|j_\nu| < n_\nu^{2/3}$. Так как $\frac{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^{g+1}}}{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}} < |\frac{j_\nu}{k_\nu}|$, $m \geq 1$, для п.в. x имеем

$$\frac{\sum_{m=2}^{m_\nu} R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}}{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0. \tag{31}$$

Положим m_ν равным $\log_2 k_\nu$. Для $1 \leq m \leq m_\nu$ все функции σ_m^g определены на τ_{n_ν, k_ν} . Обозначим через g_{m_ν} сумму $\sum_{m=0}^{m_\nu} \sigma_m^g$, а через b_{m_ν} остаток $\sum_{m=m_\nu+1}^{\infty} \sigma_m^g$.

Так как $g \in C_\rho(I)$, ряд Фурье сходится равномерно, и предельная функция φ_{x, l_ν}^g в точке t задается суммой

$$\frac{S_x^g(t \cdot l) - t \cdot S_x^g(l)}{R_{x, l}^g} = \frac{S_x^{g_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{g_{m_\nu}}(l)}{R_{x, l}^g} + \frac{S_x^{b_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{b_{m_\nu}}(l)}{R_{x, l}^g},$$

где через S_x^f обозначена эргодическая сумма (1) для функции f .

Положим $R_{x, l}^g$ равным $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g}$. Для первого слагаемого в точках $t_{i, k_\nu, n_\nu} = \frac{\binom{n_\nu - i}{k_\nu - i}}{\binom{n_\nu}{k_\nu}}$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{S_x^{g_{m_\nu}}(t_{i, k_\nu, n_\nu} \cdot l) - t_{i, k_\nu, n_\nu} \cdot S_x^{g_{m_\nu}}(l)}{R_{x, l}^g} \\ &= \sum_{m=1}^{m_\nu} \frac{F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}(t_{i, k_\nu, n_\nu} \binom{n_\nu}{k_\nu}) - t_{i, k_\nu, n_\nu} \cdot F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}(\binom{n_\nu}{k_\nu})}{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g}}. \end{aligned}$$

Данная сумма, в силу (31) и теоремы 1, сходится к $\alpha_g T_{1/2}^1$. Так как $|S_x^{b_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{b_{m_\nu}}(l)| \leq B_{m_\nu} \binom{n_\nu}{k_\nu}$ и, по предположению, $k_\nu B_{m_\nu}$ стремится к нулю,

$$\frac{S_x^{b_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{b_{m_\nu}}(l)}{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0.$$

²²Фактически можно дать значительно более точную оценку: мера путей x со свойством $|j_\nu^x| < \sqrt{n_\nu^x \ln(n_\nu^x)}$ положительна, см. [4] или [7].

Таким образом, $\varphi_{n\nu, k\nu}^g$ сходится к $\alpha_g T_{1/2}^1$, где

$$\alpha_g = -\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cov}_{\mu_{1/2}}(g, r_i)\right). \quad \square$$

Замечание 5. Как и в теореме 1, если не предполагать выполнения условия (5), для некогомологичной константе функции $g \in C_\rho(I)$ выполнено утверждение 1 теоремы 2, однако знак предельной функции в этом случае зависит от x .

§5. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ЭРГОДИЧЕСКИХ МЕР

Наши рассуждения с некоторыми изменениями справедливы и для произвольных инвариантных эргодических мер μ_a , $a \neq 1/2$. Основным отличием является то, что система Уолша–Пэли $\{w_t\}_t^\infty$ больше не является ортогональной в $L_{\mu_a}^2$. Однако ее можно заменить ортогональной системой $\{w_t^a\}_t^\infty$, $w_t^a = \sum_{\tau=1}^t d_\tau^a w_\tau$, где d_τ^a – коэффициенты ортогонализации. После этого можно получить явное представление для эргодических сумм w_t^a , для которых справедлив аналог теоремы 1, однако его доказательство в этом случае является более сложной задачей.

§6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И СПЕКТР АВТОМОРФИЗМА

В этой части мы покажем связь наших результатов с известной гипотезой о непрерывности спектра. Нам потребуется следующая теорема Халаша.

Теорема 9 ([17]). Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ – эргодическая динамическая система. Предположим, что существует множество $A \in \mathcal{F}$ положительной меры, такое, что для всех $n \geq 1$ сумма $\sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{1}_A - \mu(A)) \circ T^k$ ограничена с положительной вероятностью. Тогда $e^{2\pi i \mu(A)}$ – собственное число автоморфизма T , т.е. существует измеримая ненулевая функция f , такая, что

$$f \circ T = e^{2\pi i \mu(A)} f.$$

Обратно, если существует такое $\nu \in (0, 1)$, что $e^{2\pi i \nu}$ – собственное число автоморфизма T , то существует множество $A \in \mathcal{F}$,

$\mu(A) = \nu$, и константа $C > 0$, такие, что для всех $n \geq 1$ почти везде выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{1}_A - \mu(A)) \circ T^k \right| \leq C.$$

Безусловно, если для $g = \mathbb{1}_A$ существует предельная кривая, то сумма $\left| \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{1}_A - \mu(A)) \circ T^k \right|$ неограниченно возрастает со скоростью $R_{x, l_n(x)}^g$. Для существования предельной формы достаточно, чтобы для некоторого m выполнялось условие $\sum_{t: s_2(t)=m} \text{cov}_{\lambda_{1/2}}(g, w_t) \neq 0$ (напомним, что $\lambda_{1/2}$ – мера Лебега).

Возникает естественный вопрос: что можно сказать о коэффициентах Фурье центрированного индикатора²³ произвольного борелевского множества A положительной меры? Конкретно, верно ли, что оно удовлетворяет свойству $\sum_{t: s_2(t)=m} \text{cov}_{\lambda_{1/2}}(\mathbb{1}_A, w_t) \neq 0$ для некоторого m ?

Другой подход основан на исследовании свойств последовательности $(f \circ P^k(x))_{k=0}^\infty$, $x = (x_1, x_2, \dots)$, где $f = f(x_1, \dots, x_k)$ – цилиндрическая функция. Приведем основной результат из работы [3].

Теорема 10 (см. [3, теорема 4]). *Непрерывность спектра автоморфизма Паскаля $(I, \mathcal{B}, P, \mu_\alpha)$ эквивалентна тому, что для μ_α -п.в. x , всякого натурального N и всякой цилиндрической функции f , принадлежащей \mathcal{F}_N , последовательность $(f \circ P^k(x))_{k=0}^\infty$ не является почти периодической по Безиковичу–Хеммингу.*

Если предельная форма φ_x^f существует, то последовательность $(f \circ P^k(x))_{k=0}^\infty$ не может быть почти периодической по Безиковичу. Таким образом, в данной работе для случая меры Лебега (точнее, меры Хаара $\mu_{1/2}$) условие теоремы 10 проверено для всех цилиндрических функций f , не когомологических константе.

²³Т.е. функции $\mathbb{1}_A - \mu(A)$.

§7. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В теории чисел известной задачей является поиск явной формулы для суммы

$$S_g(N) = \sum_{n=0}^{N-1} g(s_2(n))$$

для заданной функции $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. В классическом случае, когда $g(y) \equiv y$, ответ представляется формулой Троллопа–Деланжа, см. [28]. В современных работах [23] и [15] рассмотрены случаи $g(y) = \binom{y}{m}$, $m > 0$, $g(y) = y^m$ и даже $g(y, t) = \exp(ty)$. Оказывается, что $S_g(N)$ в каждом из этих случаев имеет явное выражение, ключевой частью которого являются линейные комбинации T_a^k , $k \geq 1$.

Графики линейных комбинаций функций T_a^1 и T_a^2 возникают как предельные кривые автоморфизма Паскаля. Отметим, что, так как башню $\tau_{n,k}$ автоморфизма Паскаля можно рассматривать как набор натуральных чисел (см. [3] и [6]) $\{j : s_2(j) = k\}$, упорядоченных по возрастанию, изучаемые нами эргодические суммы (8) соответствуют “условным суммам”

$$\sum_{0 \leq j < \binom{n}{k}, s_2(j)=k} g(j),$$

где функция g зависит от конечного числа младших разрядов в диадической записи натурального числа j .

§8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

8.1. Доказательства.

8.1.1. *Вывод формулы (12)*. Будем считать, что

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j a^{j-s_{j-1}} (1-a)^{s_{j-1}} \in [0, 1].$$

Обозначим через q отношение $\frac{1-a}{a}$, через $\tilde{\omega}_j$ значение $\omega_j(x_0)$, через \tilde{s}_j значение $s_j(x_0)$ для $1 \leq j \leq l_0 - 1$ и через r множитель

$$a^{l_0 - \tilde{s}_{l_0-1} - 1} (1-a)^{\tilde{s}_{l_0-1} + 1} = a^{l_0} q^{\tilde{s}_{l_0-1} + 1}.$$

Отметим, что $\tilde{\omega}_{l_0} = 1$ по определению точки x_0 . Мы имеем

$$\begin{aligned} x_0 + rx &= \sum_{j=1}^{l_0} \tilde{\omega}_j a^j q^{\bar{s}_j-1} + r \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j a^j q^{s_j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{l_0} \tilde{\omega}_j a^j q^{\bar{s}_j-1} + \sum_{j=l_0+1}^{\infty} \omega_{j-l_0} a^j q^{\bar{s}_{l_0-1}+1+s_{j-1-l_0}} = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j a^j q^{\bar{s}_j-1}, \end{aligned}$$

где $\xi_j = \begin{cases} \tilde{\omega}_j, & 1 \leq j \leq l_0, \\ \omega_{j-l_0}, & j \geq l_0 + 1, \end{cases}$ и $\bar{s}_j = \sum_{i=1}^j \xi_i$. Поэтому можно записать

$$S_{a,b}(x_0 + rx) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j b^j \left(\frac{1-b}{b}\right)^{\bar{s}_j-1} = S_{a,b}(x_0) + b^{l_0} \left(\frac{1-b}{b}\right)^{1+s_{l_0-1}} S_{a,b}(x).$$

8.1.2. *Вывод формулы (24).* Пусть функция Уолша $w_t(y)$ является произведением $m = s_2(t)$ различных функций Радемахера

$$\prod_{i=0}^{N-1} (r_{i+1}(y))^{t_i} = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y),$$

где $t_i \in \{0, 1\}$. Пусть натуральное число $i = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_{k-s}}{k-s}$ задает путь в графе Паскаля, ведущий в вершину (n, k) . По определению $F_{n,k}^{w_t}(i)$ равно сумме значений w_t на всех конечных путях (цилиндрах из $\tau_{n,k}$), не превосходящих в обратном лексикографическом порядке путь, соответствующий i .

Разобьем все пути в графе Паскаля, ведущие в вершину (n, k) , на два класса, в соответствии с тем, какое значение (1 или -1) принимает на них функция w_t . Каждый путь, в свою очередь, разобьем на две части: начало длины N и хвост длины $\binom{n}{k} - N$. Начало длины N всякого пути заканчивается в одной из вершин (N, j) , $0 \leq j \leq N$, и полностью определяет значение функции w_t на всем пути. Количества путей, проходящих через вершину (N, j) , из первого класса дает следующая комбинаторная лемма.

Лемма 2. *Число векторов (r_1, \dots, r_N) , состоящих из N единиц и минус единиц, удовлетворяющих двум условиям*

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^m r_{n_i} = 1, & 1 \leq n_i \leq N, & 1 \leq i \leq m, & m \leq N; \\ \text{число } r_i, \text{ равных } -1 & \text{при } 1 \leq i \leq N, \text{ равно } j, \end{cases}$$

равно

$$\sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{N-j-2l}.$$

Пути, проходящие через вершину (N, j) , из второго класса – это все оставшиеся пути, число которых равно

$$\binom{N}{j} - \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{j-2l} = \sum_{l: 1 \leq 2l+1 \leq m} \binom{m}{2l+1} \binom{N-m}{j-2l-1}.$$

Количество хвостов считается по формуле $\binom{a_k-N}{k-j} + \dots + \binom{a_1-N}{1-j}$ (биномиальные коэффициенты доопределены нулем).

В итоге получаем следующую формулу:

$$F_{n,k}^{w_i}(i) = \sum_{j=0}^N \left[-\binom{N}{j} + 2 \cdot \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{j+2l} \right] \times \left\{ \binom{a_k-N}{k-j} + \dots + \binom{a_1-N}{1-j} \right\}. \quad (32)$$

8.1.3. *Доказательство леммы 1.* Пусть $(k)_j = k(k-1)\dots(k-j+1)$ – падающая степень, а $(k)^{\bar{j}} = k(k+1)\dots(k+j-1)$ – растущая степень (символы Похгаммера). Очевидно, что $(k)_j = (-1)^j (-k)^{\bar{j}} = (k-j+1)^{\bar{j}}$.

Для $a, b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ через ${}_2F_1(a, b; c; z) = F\left[\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right]$ обозначим гипергеометрическую функцию Гаусса аргумента z :

$$F\left[\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)^{\bar{n}}(b)^{\bar{n}}}{(c)^{\bar{n}}} \frac{z^n}{n!}.$$

Если a или b конечные, целые, отрицательные, то ряд обрывается:

$$F\left[\begin{smallmatrix} -m, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right] = \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} \frac{(b)^{\bar{n}}}{(c)^{\bar{n}}} z^n.$$

Напомним, что при $z = -1$ и $a - b + 1 = c$ выполнено тождество Куммера

$$F\left[\begin{smallmatrix} a, b \\ 1+a-b \end{smallmatrix}; -1\right] = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+\frac{1}{2}a)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)}. \quad (33)$$

Напомним также, что

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \quad (34)$$

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin(\pi x)}, \quad \Gamma(m/2) = \frac{(m-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(m-1)/2}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

Существует пятнадцать “связующих” соотношений Гаусса (коэффициенты которых – рациональные функции от z) между любыми двумя функциями вида ${}_2F_1(a \pm 1, b; c; z)$, ${}_2F_1(a, b \pm 1; c; z)$, ${}_2F_1(a, b; c \pm 1; z)$.

В частности, можно показать, что

$$F\left[\begin{matrix} a, & b+1 \\ & c \end{matrix}; z\right] = \frac{1}{b(z-1)} \left((1-c) F\left[\begin{matrix} a-1, & b \\ & c \end{matrix}; z\right] + (c-b-1) F\left[\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix}; z\right] \right).$$

Через $F(a, b, c)$ в дальнейшем мы обозначаем функцию $F\left[\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix}; -1\right]$.

По индукции для всякого натурального i получаем

$$F(a, b+i, c) = \frac{(-1)^i}{2^i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{(1-c)^j (c-b-i)^{i-j}}{b^i} F(a-j, b, c-j). \quad (36)$$

Переходим к доказательству леммы.

Достаточно получить асимптотики при $k \rightarrow \infty$ для $S_{n-i, k-i}^m$, где i – неотрицательное целое число. Мы имеем

$$S_{n-i, k-i}^m = (-1)^m \frac{(k-n)^{\bar{m}}}{(-n+i)^{\bar{m}}} \cdot F\left[\begin{matrix} -m, & -k+i \\ n-k-m+1 \end{matrix}; -1\right],$$

что при $n = 2k$ принимает вид $(-1)^m \frac{(-k)^{\bar{m}}}{(-2k+i)^{\bar{m}}} \cdot F\left[\begin{matrix} -m, & -k+i \\ k-m+1 \end{matrix}; -1\right]$.

Так как $d^{\bar{s}} = d^s \left(1 + \frac{s(s-1)}{2d} + O(d^{-2})\right)$ при $|d| \rightarrow \infty$, для $\frac{(-k)^{\bar{m}}}{(-2k+i)^{\bar{m}}}$ имеем

$$\frac{(-k)^{\bar{m}}}{(-2k+i)^{\bar{m}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \left(\frac{m(m-1)}{4} - \frac{mi}{2}\right)k^{-1}\right) + O(k^{-2}). \quad (37)$$

Положим

$$a = -m, \quad (38)$$

$$b = -k, \quad (39)$$

$$c = a - b + 1 = k - m + 1. \quad (40)$$

Таким образом, мы приходим к изучению поведения при $b \rightarrow -\infty$ функций $F\left[\begin{matrix} a, & b+i \\ & c \end{matrix}; -1\right]$, которые, используя тождество (36), можно выразить только через функции $F(a-j, b, c-j)$, для каждой из которых

выполнено тождество (33). Используя формулы (34) и (35), получаем

$$F(a-j, b, c-j) = \begin{cases} 0, & a-j = -2s+1, \\ (-1)^s 2^s (2s-1)!! \frac{1}{(1+a-b)^s}, & a-j = -2s, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & a-j = -2s+1, \\ 2^s (2s-1)!! \left(1 + \frac{s(3s-1)}{2} ((-b)^{-1})\right) (b)^{-s} + O(b^{-s-2}), & a-j = -2s. \end{cases}$$

Пусть $m = -a = 2l$. Мы видим, что для разложения до члена $\frac{1}{(-b)^{l+1}} = \frac{1}{k^{l+1}}$ из формулы (36) потребуются лишь первое и третье слагаемые (все остальные имеют порядок $o(\frac{1}{k^{l+1}})$). Получаем:

$$F \left[\begin{matrix} -2l, & -k+i \\ -2l+k+1 \end{matrix}; -1 \right]$$

$$= (-1)^l 2^l (2l-1)!! \left(1 + \frac{l(3l-i(i+1)-1)}{2} k^{-1} + O(k^{-2})\right) \frac{1}{k^l},$$

откуда

$$S_{2k-i, k-i}^m = \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{2^l} \left(1 - \frac{l(i(i-1)-l)}{2k}\right) k^{-l} + O(k^{-l-2}).$$

Пусть $m = -a = 2l+1$. Для разложения до члена $\frac{1}{(-b)^{l+1}} = \frac{1}{k^{l+1}}$ из формулы (36) потребуются лишь второе слагаемое (даже лишь его часть). Получаем:

$$F \left[\begin{matrix} -2l-1, & -k+i \\ -2l+k+1 \end{matrix}; -1 \right] = (-1)^l 2^l (2l+1)!! i \cdot \frac{1}{k^{l+1}} + O(k^{-l-2}),$$

откуда

$$S_{2k-i, k-i}^m = (-1)^{l+1} 2^{-(l+1)} (2l+1)!! i \cdot \frac{1}{k^{l+1}} + O(k^{-l-2}),$$

что и требовалось доказать.

8.2. Иллюстрации.

8.2.1. *Предельные кривые.*

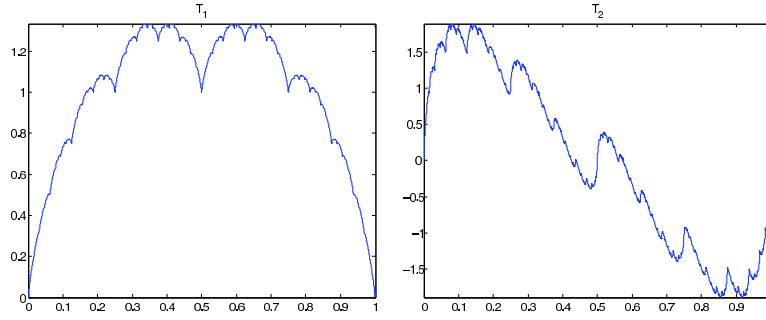


Рис. 2. (а) $n = 1, p = \frac{1}{2}$.

(б) $n = 2, p = \frac{1}{2}$.

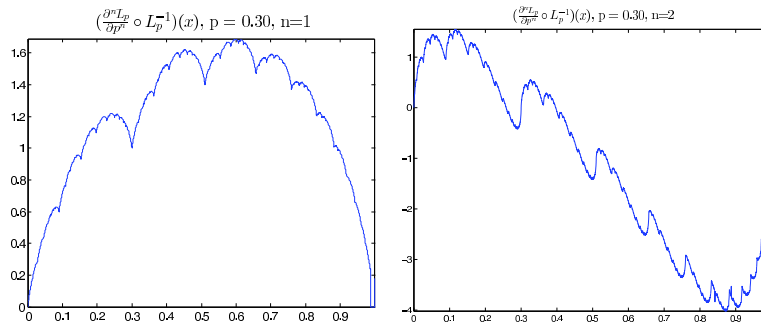
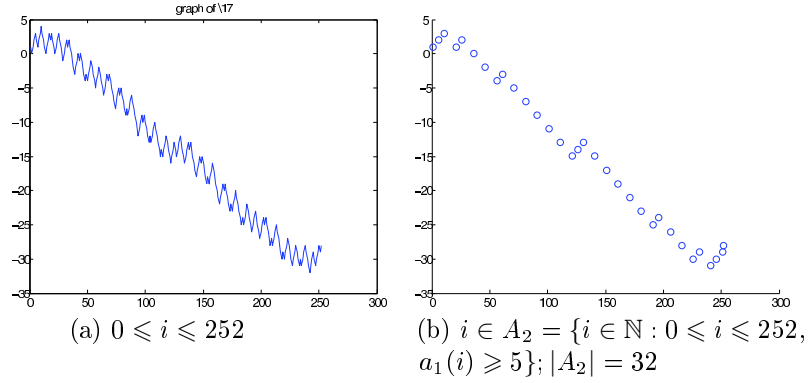
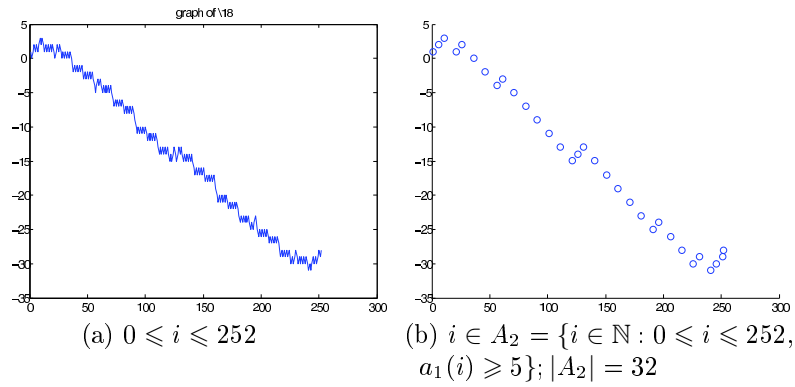


Рис. 3. (а) $n = 1, p = 0.3$.

(б) $n = 2, p = 0.3$.

8.2.2. Эргодические суммы для функций Уолша.

Рис. 4. График функции $S_x^{w_{17}}(i)$, $x \in \tau_{10,5}(1)$.Рис. 5. График функции $S_x^{w_{18}}(i)$, $x \in \tau_{10,5}(1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения*. — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
2. А. М. Вершик, *Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
3. А. М. Вершик, *Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр*. — Функц. анал. и его прил. **45**, вып. 3 (2011), 16–33.
4. А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Асимптотика масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **378** (2010), 58–72.
5. А. Р. Минабутдинов, И. Е. Манаев, *Функция Крускала–Катоны, последовательность Конвея, кривая Такаги и автоморфизм Паскаля*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **411** (2013), 135–147.
6. А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Реализация автоморфизма Паскаля в графе конкатенаций и функция $s_2(n)$* . — Зап. научн. семин. ПОМИ **403** (2012), 95–102.
7. Е. М. Рудо, *Асимптотика распределений случайных блужданий на многомерных графах Паскаля и на решетках корней*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **403** (2012), 158–171.
8. P. Allaart, K. Kawamura, *The Takagi function: a survey*. — Real Anal. Exchange **37**, No. 1 (2012), 1–54.
9. L. Berg, M. Krüppel, *De Rham's singular function and related functions*. — Z. Anal. Anwendungen **19**, No. 1 (2000), 227–237.
10. P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd edition, Wiley, New York, 1995.
11. E. de Amo, M. DiazaCarrillo, J. Fernandez-Sanchez, *Singular functions with applications to fractal dimensions and generalized Takagi functions*. — Acta Appl. Math. **119**, No. 1 (2012), 129–148.
12. M. de Amo, J. Fernandez-Sanchez, *A generalised dyadic representation system*. — Internat. J. Pure Appl. Math. **52**, No. 1 (2009), 49–66.
13. G. de Rham, *Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles*. — Rend. Sem. Mat. **16** (1956), 101–113.
14. R. Girgensohn, *Nowhere differentiable solutions of a system of functional equations*. — Aequationes Math. **47**, No. 1 (1994), 89–99.
15. R. Girgensohn, *Digital sums and functional equations*. — Integers **12**, No. 1 (2012), 141–160.
16. A. Hajan, Y. Ito, S. Kakutani, *Invariant measure and orbits of dissipative transformations*. — Adv. Math. **9**, No. 1 (1972), 52–65.
17. G. Halasz, *Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem*. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **28**, No. 3–4 (1976), 389–395.
18. E. Janvresse, T. de la Rue, *The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli*. — Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Statist. **40**, No. 2 (2004), 133–139.
19. E. Janvresse, T. de la Rue, Y. Velenik, *Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation*. — Stoch. Dyn. **5**, No. 1 (2005), 1–25.
20. S. Jukna, *Extremal Combinatorics. With Applications in Computer Science*. Springer, Berlin, 2010.

21. S. Kakutani, *A problem of equidistribution on the unit interval* $[0, 1]$. — Lect. Notes Math. **541** (1976), 369–375.
22. K. Kawamura, *On the set of points where Lebesgue's singular function has the derivative zero*. — Proc. Japan Acad., Ser. A **87**, No. 9 (2011), 162–166.
23. M. Krüppel, *De Rham's singular function, its partial derivatives with respect to the parameter and binary digital sums*. — Rostocker Math. Kolloq. **64** (2009), 57–74.
24. N. R. Ladhawala, *Absolute summability of Walsh–Fourier series*. — Pacific J. Math. **65**, No. 1 (1976), 103–108.
25. Z. Lomnicki, S. Ulam, *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I. Variables indépendantes*. — Fund. Math. **23** (1934), 237–278.
26. X. Mela, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation*. — Ergodic Theory Dynam. Systems **25**, No. 1 (2005), 227–256.
27. T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*. — Proc. Phys.-Math. Soc. **5-6** (1903), 176–177.
28. E. Trollope, *An explicit expression for binary digital sums*. — Mat. Mag. **41** (1968), 21–25.
29. D. Volný, *Invariance principles and Gaussian approximation for strictly stationary processes*. — Trans. Amer. Math. Soc. **351**, No. 8 (1999), 3351–3371.

Minabutdinov A. R. Random deviations of ergodic sums for the Pascal adic transformation in the case of the Lebesgue measure.

The paper generalizes results by E. Janvresse, T. de la Rue, and Y. Venik on fluctuations in ergodic sums for the Pascal adic transformation in the case of the Lebesgue measure for a wide class of functions. In particular, we answer several questions from the above-mentioned paper.

ВШЭ СПб,
Департамент прикладной математики
и бизнес-информатики,
ул. Кантемировская, д. 3,
С.-Петербург 194100, Россия
E-mail: aminabutdinov@gmail.com

Поступило 16 января 2015 г.