Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 432, 2015 г.

М. Д. Малых

О ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

§1. Введение

Понятие разрешимости в конечном виде относится к числу тех темных понятий, которые, как принято считать, сложились исторически и являются предметом договора, см., например, [1]. Так, при решении геометрических задач на построение фиксируют набор инструментов и правила работы с ними, при исследовании алгебраических уравнений в рамках теории Галуа желают выразить решение при помощи нескольких радикалов, в теории дифференциальных уравнений желают выразить общее решение или интеграл при помощи лиувиллиевых функций, то есть дозволяют не только алгебраические операции, но и вычисления квадратур и экспонент, причем между существованием лиувиллиева интеграла и решения имеется весьма нетривиальная связь, [2, 3].

На практике, при решении нелинейных дифференциальных уравнений средствами систем компьютерной алгебры, прибегают к иным соображениям. В основу работы первого компьютерного солвера дифференциальных уравнений, написанного Мозесом [4] в начале 1960-х годов, было положено следующее элементарное наблюдение: выяснить, имеет ли заданное дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

интегрирующий множитель вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$, можно за конечное число шагов, если закрыть глаза на проблемы с упрощением выражений. При этом если система допускает множитель такого вида, то он является лиувиллиевой функцией аргумента. В Maple для интегрирования дифференциальных уравнений используются специальные классы

Ключевые слова: теория Галуа, свойство Пенлеве, интегрирование в конечном виде, абелевы интегралы, уравнение Риккати.

групп, для которых можно за конечное число шагов выяснить, обладает ли заданное дифференциальное уравнение группой симметрий этого класса, и вычислить ее инфинитезимальный оператор, [5–8]. Мощь Maple в решении дифференциальных уравнений первого порядка объясняется в значительной мере тем, что 78% примеров из справочника Э. Камке допускают линейные группы симметрий, [8]. При этом опять инфинитезимальный оператор выражается в лиувиллиевых функциях, хотя изначально это не предполагается.

Нельзя не заметить также, что набор инструментов, используемых для геометрических построений, и правила их применения менялись со временем, [9, примечание 33], а список трансцендентных функций, находящихся в постоянном употреблении, напротив, сложился еще во времена Гаусса и с тех пор не претерпел сколько-нибудь заметных изменений. Употребляя, скажем, трансцендентные Пенлеве, мы вполне ощущаем, что переходим некоторую границу. Можно ли указать свойство, характеризующее общеупотребительные функции как математический, а не социокультурный феномен? Иными словами, можно ли построить версию дифференциальной теории Галуа для нелинейных дифференциальных уравнений, в которой список допустимых операций не постулировался бы изначально?

Все общеупотребительные функции являются мероморфными решениями дифференциальных уравнений. Лазарус Фукс предложил отыскать все дифференциальные уравнения, общее решение которых не имеет подвижных особых точек за исключением, быть может, полюсов; теперь это свойство дифференциального уравнения называют свойством Пенлеве, [10–12]. Уравнения первого порядка, обладающие этим свойством, или сводятся к линейному уравнению второго порядка, или решаются в элементарных или эллиптических функциях, [13, гл. 2]. Однако Пенлеве [13, гл. 3] обнаружил, что среди дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих названным в его честь свойством, есть и те, которые ведут к совершенно новым трансцендентным функциям, и потому это свойство не может быть использовано для выделения класса общеупотребительных функций.

В начале XX века такое радикальное расширение класса общеупотребительных функций было воспринято с большим энтузиазмом, о чем свидетельствуют, например, обстоятельные пояснения, данные к выбору тем шестого конкурса на премию Лобачевского 1912 года, [15]. Этим, вероятно, и следует объяснить отсутствие интереса к другим, чисто алгебраическим идеям, высказанным в знаменитых Стокгольмских лекциях Пенлеве [16]. Дело в том, что общие решения дифференциальных уравнений, разрешимых в общеупотребительных функциях, являются не только мероморфными функциями независимой переменной, но и алгебраическими функциями констант. Пенлеве удалось обратить это утверждение для уравнений первого и второго порядков. Кратко доказанное там утверждение можно сформулировать так: если общее решение зависит от констант интегрирования алгебраически, то интегрирование этих уравнений не выходит за пределы общеупотребительных функций, если к ним прибавить еще абелевы функции.

Более развернуто: уравнение первого порядка, общее решение которого зависит алгебраически от надлежащим образом выбранной константы, алгебраической заменой сводится к уравнению первого порядка, обладающему свойством Пенлеве. Мы не будем приводить здесь оригинальных формулировок, поскольку, к сожалению, и в статье [17], и в Лекциях изложению придана чрезмерная общность, которая была отмечена и исправлена много позже в Приложении, написанном Пенлеве для сочинения Бутру [18]. Рассмотрение уравнения второго порядка в Лекциях разбито на два этапа. Сначала доказывается, что любое такое уравнение алгебраической заменой может быть сведено к уравнению, общее решение которого зависит от начальных данных рационально, [16, p. 242]. Затем развернуто описывается общее решение такого уравнения (приводится с сокращениями):

Утверждение 1 (Пенлеве, [16, p. 381]). *Если общее решение у заданного уравнения второго порядка*

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}; t) = 0$$

(где f – многочлен относительно $x, \dot{x}, \ddot{x}$) зависит рационально от констант $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0$, связанных соотношением

$$f(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0; t_0) = 0,$$

то этот интеграл принадлежит к одной из следующих категорий:

(1) *или этот интеграл выражается алгебраически,*

(2) *или x выражается рационально через эллиптические функции $\wp(u + C)$ и $\wp'(u + C)$, где u выражается через t квадратурой*

$$u = \int h(t)dt,$$

то есть $x = R(\wp(u+C), \wp'(u+C))$, *при этом коэффициенты функции* R *выражаются алгебраически через коэффициенты исходного дифференциального уравнения и вторую константу интегрирования,*

(3) *или* x *выражается рационально через абелеву функцию* $\mathrm{Al}(u, v)$ *и ее производные по* u *и* v, *причем* u *и* v *выражаются через* t *квадратурами*

$$u = \int h(t)dt + C_1, \quad v = \int k(t)dt + C_2,$$

(4) *или общее решение выражается рационально через функцию* $y(t)$, *то есть* $x = R(y)$, *где* y *удовлетворяет уравнению Риккати*

$$\dot{y} = -y^2 + \gamma(t),$$

R *и* γ *выражаются алгебраически через коэффициенты исходного дифференциального уравнения и произвольную константу* C,

(5) *или* $x = R(y, \wp(u+C), \wp'(u+C))$, *где* u *дается квадратурой*

$$u = \int h(t)dt,$$

а y *удовлетворяет уравнению Риккати*

$$\dot{y} = -y^2 + \gamma(t),$$

причем R *выражается алгебраически через коэффициенты исходного дифференциального уравнения, а* γ *может еще зависеть рационально от* $\wp(u+C)$ *и* $\wp'(u+C)$,

(6) *или исходное уравнение алгебраической заменой сводится к линейному дифференциальному уравнению.*

Эта теорема подводит нас к неожиданному выводу: *зафиксировав алгебраические свойства общего решения, можно выделить класс общеупотребительных трансцендентных функций.* В общем случае можно поставить такую задачу:

Задача 1. *Описать трансцендентные операции, необходимые для представления решений системы дифференциальных уравнений, если известно, что общее решение этой системы зависит от констант алгебраически.*

Сложность формулировки утверждения 1 заставляет искать более удобные объекты для исследования. Пенлеве шел от задач, в которых решение было мероморфной функцией переменной t, и поэтому избрал в качестве основного объекта изучения решения задачи Коши

$$\begin{cases} f(x, \dot{x}, \ddot{x}; t) = 0, \\ (x, \dot{x}, \ddot{x})|_{t=t_0} = (x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0), \end{cases}$$

задающие бирациональное соответствие между поверхностями

$$f(x, y, z; t) = 0 \quad \text{и} \quad f(x, y, z; t_0) = 0.$$

Эти соответствия трудно встроить в теорию Галуа, где основными объектами служат поля. Зато интегралы дифференциального уравнения образуют как раз поля, поэтому их мы и положим в основу рассмотрения.

Цель настоящей статьи – дать абрис такой теории Галуа для дифференциальных уравнений, в которой не фиксируется список допустимых трансцендентных операций (для дифференциальных уравнений первого порядка такая теория была намечена в нашей статье [19]). Опишем ее вкратце, отсылая за точными формулировками и доказательствами к нижеследующим разделам. Если система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, \dot{x_1}, \dots; t) = 0, \\ f_2(x_1, \dots, \dot{x_1}, \dots; t) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, \dot{x_1}, \dots; t) = 0 \end{cases}$$

допускает интеграл, зависящий от $x_1, \dots, x_n$ алгебраически, то она допускает и интеграл, рациональный на многообразии V в аффинном пространстве A^{2n}, заданном уравнениями

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{n+1}, \dots; t) = 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_{n+1}, \dots; t) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_{n+1}, \dots; t) = 0. \end{cases}$$

Все рациональные интегралы системы дифференциальных уравнений составляют поле, которое мы будем называть полем интегралов.

Коэффициенты исходной системы дифференциальных уравнений порождают некоторое дифференциальное поле над полем констант $\mathbb{C}$;

мы будем называть его полем основных функций и считать заданным вместе с уравнением. Коэффициенты интегралов, рациональных на многообразии V, тоже являются какими-то функциями переменной t. Если эти коэффициенты принадлежат полю основных функций, то система допускает алгебраический интеграл, который можно сразу добавить к системе. В противном случае эти коэффициенты порождают некоторое поле над полем основных функций, которое мы будем называть полем трансцендент, вводимых интегрированием.

Задача 2. *Описать трансцендентные операции, необходимые для задания функций поля трансцендент, вводимых интегрированием системы дифференциальных уравнений.*

Ключом к решению этой задачи послужит теорема 11, согласно которой *поле интегралов системы дифференциальных уравнений эквивалентно полю рациональных функций на гиперповерхности, допускающей непрерывную группу бирациональных автоморфизмов, размерность которой совпадает с числом алгебраически независимых трансцендент, вводимых интегрированием системы.* Доказательство этой теоремы и представляет главную цель нижеследующих разделов.

§2. Дифференциальные уравнения над полем основных функций

Алгебраическая теория дифференциальных уравнений берет свое начало в лекциях Вейерштрасса, известных в изложении Лео Кёнигсбергера [20, 21], и работах Пенлеве, суммированных им в Стокгольмских лекциях [16]. Старые авторы работали по умолчанию с аналитическими функциями над полем $\mathbb{C}$ и чрезмерно смело обращались с вырожденными случаями. Современные авторы, напротив, обычно рассматривают решения дифференциальных уравнений как кривые на дифференциальном многообразии, используя при этом стандартную топологию $\mathbb{R}^n$, [22]. Однако при исследовании алгебраических вопросов естественно работать в топологии Зарисского.

2.1. Поля функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения задают связь между функциями независимой переменной (скажем, времени t) и их производными. Повышением порядка рассматриваемой системы дифференциальных уравнений обычно удается добиться того, чтобы правые части уравнений, составляющих систему, были многочленами относительно функций и их производных, коэффициенты которых могут быть какими угодно аналитическими функциями переменной t. Будем считать, что коэффициенты рассматриваемых уравнений принадлежат некоторому заданному полю функций.

Определение 1. Полем функций *переменной t будем называть дифференциальное поле, элементами которого служат аналитические функции независимой переменной t, имеющие в некоторой односвязной области комплексной плоскости в качестве особенностей разве только полюса, дифференцированием поля служит дифференцирование по t, а полем констант – поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.*

Поле функций, которому принадлежат коэффициенты рассматриваемых дифференциальных уравнений, будем называть полем основных функций. *Набор функций переменной t, алгебраически независимых над полем основных функций, будем называть трансцендентными функциями над k или просто трансцендентами.*

Упомянутую область изменения переменной t будем называть областью определения поля функций k и обозначать $\mathrm{Dom}(k)$. В силу теоремы о монодромии функции поля k однозначно определены в этой области.

Значения функции φ из поля функций k в точке $t = a$ будем обозначать $\varphi|_{t=a}$. Если g – многочлен кольца $k[x_1, \dots, x_n]$, то его коэффициенты зависят от t; подставив вместо t число $t = a$ из поля констант $\mathbb{C}$, получим другой элемент этого поля, который будем обозначать $g|_{t=a}$. Дифференцирование по t можно продолжить на это кольцо, приняв

$$\frac{\partial}{\partial t}(a x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} + \dots) = \dot{a} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} + \dots.$$

Скобки прибережем для другого: подставив в многочлен g кольца $k[x_1, \dots, x_n]$ на место переменных $x_1, \dots, x_n$ точку q аффинного пространства A^n над полем k, получим элемент поля k, то есть функцию переменной t, ее условимся обозначать $g(q)$. Дифференцирование поля t подчиняется правилу Лейбница, поэтому

$$\frac{dg(q)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(q) \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial t}(q).$$

2.2. Дифференциальные уравнения. Поле основных функций k, вообще говоря, не замкнуто ни относительно алгебраических, ни относительно дифференциальных уравнений. Вложим его в алгебраически замкнутое поле K. Если не оговорено противное, будем считать, что поле констант поля K совпадает с $\mathbb{C}$. В этом случае аффинное пространство A^n над полем K, но не над k, является стандартным объектом для алгебраической геометрии, [23, гл. 1].

Замечание 2.1. Никакое алгебраически замкнутое расширение поля основных функций нельзя считать полем функций в смысле определения 1, поскольку любая точка области определения поля основных функций является для какого-нибудь элемента расширения точкой ветвления и поэтому нельзя указать область определения, в которой бы элементы расширения были бы однозначными функциями. В частности, подстановку $t = a$ нельзя рассматривать как однозначно определенное отображение расширения K на $\mathbb{C}$.

Аффинное пространство A^n_k будем рассматривать как подмножество аффинного пространства A^n_K. Если $\mathfrak{a}$ – идеал кольца $k[x_1,\ldots,x_n]$, то множество

$$K[x_1,\ldots,x_n]\mathfrak{a}$$

является идеалом кольца $K[x_1,\ldots,x_n]$, которое будем называть пополнением идеала $\mathfrak{a}$ в поле K и обозначать $\mathfrak{a}^K$. Множество тех точек аффинного пространства A^n над полем k или K, в которых обращаются в нуль все многочлены из $\mathfrak{a}$, будем обозначать $V(\mathfrak{a}/k)$ и $V(\mathfrak{a}/K)$ соответственно.

В нашем случае на полях k и K имеется дополнительная структура – дифференцирование. Его можно применить к каждой координате точки q аффинного пространства A^n и тем самым получить еще n элементов этого поля. Поставим в соответствие точке q аффинного пространства A^n над K точку

$$\dot{q} = (q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)$$

аффинного пространства A^{2n} над K. При этом соотношение

$$\dot{q} \in V(\mathfrak{a}/K)$$

означает, что

$$g(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n) = 0$$

на любом $g \in \mathfrak{a}$.

Определение 2. *Решением в дифференциальном расширении K поля основных функций k системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} g_1(x_1,\dots,x_n,\dot x_1,\dots,\dot x_n)=0,\\ \dots\\ g_m(x_1,\dots,x_n,\dot x_1,\dots,\dot x_n)=0, \end{cases} \tag{1}$$

левые части которых порождают идеал

$$\mathfrak{a}=(g_1,\dots,g_m)$$

кольца $k[x_1,\dots,x_{2n}]$, будем называть такую точку q аффинного пространства A^n над K, что $\dot q\in V(\mathfrak{a}/K)$.

Множество решений зависит только от идеала $\mathfrak{a}$, но не от выбора его образующих; будем обозначать это множество $S(\mathfrak{a}/K)$.

Замечание 2.2. Мы не будем предполагать, что число дифференциальных уравнений совпадает с числом неизвестных, поскольку в противном случае пришлось бы исключить из рассмотрения важнейшие механические примеры. Например, в задаче трех тел ускорения выражаются рационально через координаты тел и расстояния между ними, поэтому, приняв за переменные декартовы координаты тел, их скорости и расстояния между телами, мы получим систему дифференциальных уравнений вида (1), если добавим к уравнениям Ньютона алгебраические уравнения, связывающие декартовы координаты тел и расстояния между ними. Уравнения Ньютона для такой задачи более естественно рассматривать на многообразии, однако принципиальной необходимости в этом нет.

Замечание 2.3. В теории, основанной на топологии пространства $\mathbb{R}^n$, решения дифференциального уравнения – кривые на дифференциальном многообразии, касательные к которым аннулируют распределение Картана, [22]; в топологии Зарисского все оказывается даже проще: решение – просто точка аффинного пространства, рассматриваемого над полем функций.

2.3. Вполне совместные и замкнутые системы дифференциальных уравнений. В определении 2 никак не фиксировано число дифференциальных уравнений, их может оказаться слишком много для того, чтобы множество решений было непусто, и слишком мало для того, чтобы выразить производные $\dot x_i$ через сами функции x_j.

Условие, показывающее, что в расширении K имеется достаточное число решений системы (1), сформулируем по аналогии с теоремой Гильберта о нулях, см. [24]:

Определение 3. *Систему дифференциальных уравнений* (1) *будем называть вполне совместной над полем K, если для многочлена f из $k[x_1, \ldots, x_{2n}]$, обращающегося в нуль на любом решении из $S(\mathfrak{a}/K)$, можно указать такое целое число r, что f^r принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$, порожденному правыми частями уравнений этой системы.*

Условие, показывающее, что уравнений и не слишком мало, сформируем только для неприводимых систем.

Определение 4. *Систему* (1) *будем называть неприводимой в поле K, если неприводимо топологическое пространство $V(\mathfrak{a}/K)$.*

Не вводя в рассмотрение новых трансцендентных функций, можно расширить поля основных функций так, чтобы заданная система дифференциальных уравнений расщепилась на несколько систем, левые части которых порождают неприводимые многообразия в аффинном пространстве над любым расширением поля основных функций. Это позволяет в дальнейшем ограничиться неприводимыми системами дифференциальных уравнений. При этом под неприводимой системой дифференциальных уравнений без указания поля будет подразумеваться система, неприводимая над алгебраическим замыканием поля основных функций.

Итак, рассмотрим неприводимую систему дифференциальных уравнений (1), левые части которых порождают идеал $\mathfrak{p}$, пополнение $\mathfrak{p}^K$ которого, стало быть, просто. Элементы поля частных кольца

$$K[x_1, \ldots, x_{2n}]/\mathfrak{p}^K$$

будем интерпретировать как отображения открытого подмножества аффинного пространства $V(\mathfrak{p}/K)$ в K, называть рациональными функциями на аффинном пространстве $V(\mathfrak{p}/K)$ и обозначать $R(\mathfrak{p}/K)$. Элементы поля частных кольца

$$k[x_1, \ldots, x_{2n}]/\mathfrak{p},$$

которое мы будем обозначать $R(\mathfrak{p}/k)$, можно рассматривать не только как рациональные функции на $V(\mathfrak{p}/k)$ со значениями в k, но и как рациональные функции на $V(\mathfrak{p}/K)$ со значениями в K, то есть это поле частных можно рассматривать как подполе в $R(\mathfrak{p}/K)$.

Определение 5. *Неприводимую систему дифференциальных уравнений над полем k, правые части которой порождают идеал $\mathfrak{p}$ кольца $k[x_1, \dots, x_{2n}]$, будем называть замкнутой, если можно указать такое дифференцирование D поля рациональных функций на $V(\mathfrak{p}/k)$, что для любого расширения K поля k равенство*

$$\frac{df(q)}{dt} = Df(q)$$

верно при всех $q \in S(\mathfrak{p}/K)$ и $f \in k[x_1, \dots, x_{2n}]$.

Такое дифференцирование D можно продолжить на $R(\mathfrak{p}/K)$ при любом K, при этом для любого монома

$$Dx_1^{n_1} \dots x_{2n}^{n_{2n}} \in R(\mathfrak{p}/k).$$

§3. Расширение Пюизё

Обратимся теперь к вопросу о существовании такого расширения исходного поля, над которым исходная неприводимая система дифференциальных уравнений была бы вполне совместна и замкнута.

3.1. Поля рядов Пюизё. В теории алгебраических чисел оказывается весьма удобным погрузить все рассматриваемые поля в поле $\mathbb{C}$, в котором все алгебраические уравнения имеют корни. Аналогом т.н. основной теоремы алгебры в теории дифференциальных уравнений является теорема Коши, которая дает решения систем дифференциальных уравнений в виде степенных рядов. С тем, чтобы расширение поля основных функций было алгебраически замкнутым, следует принять во внимание и дробные степени. Формальные ряды вида

$$a_0 t^{n_0} + a_1 t^{n_1} + \dots,$$

где $n_0 < n_1 < \dots$ – рациональные числа, имеющие общий знаменатель, а $a_0, a_1, \dots$ – элементы некоторого поля $\mathbb{K}$, называют рядами Пюизё по степеням t с коэффициентами в поле $\mathbb{K}$; если поле $\mathbb{K}$ замкнуто алгебраически и имеет характеристику нуль, то множество таких рядов представляет собой алгебраически замкнутое поле, [25, теорема 2.1.5].

Определение 6. *Расширением Пюизё поля основных функций k в точке $t = a$ области $\mathrm{Dom}(k)$ будем называть поле рядов Пюизё по степеням $t - a$ с коэффициентами в поле констант поля основных функций (т.е. по умолчанию поля $\mathbb{C}$) и обозначать $P_a(k)$. Вместо $V(\mathfrak{a}/P_a(k))$ и $S(\mathfrak{a}/P_a(k))$ будем для краткости писать $V_a(\mathfrak{a})$ и $S_a(\mathfrak{a})$.*

Поскольку любую функцию из поля основных функций можно разложить в области $\mathrm{Dom}(k)$ в ряд Лорана с конечным числом отрицательных степеней, расширение Пюизё поля основных функций является алгебраически замкнутым дифференциальным расширением поля основных функций. Его, однако, нельзя считать полем функций в смысле определения 1, поскольку в определении 6 не делается никаких предположений ни о сходимости рядов, ни о выделении однозначных ветвей.

3.2. Совместность дифференциальных уравнений системы. Вместо общего определения 3 примем для начала следующее:

Определение 7. *Систему дифференциальных уравнений* (1) *будем называть вполне совместной, если для многочлена f из $k[x_1,\dots,x_{2n}]$, обращающегося в нуль на любом решении в расширении Пюизё $P_a(k)$ и при* любом *a из области определения поля основных функций k, можно указать такое целое число r, что f^r принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$, порожденному правыми частями уравнений этой системы.*

Покажем, что неприводимая система n дифференциальных уравнений на n неизвестных функций

$$\begin{cases} g_1(x_1,\dots,x_n,\dot x_1,\dots,\dot x_n)=0,\\ \dots\\ g_n(x_1,\dots,x_n,\dot x_1,\dots,\dot x_n)=0\end{cases}\tag{2}$$

в этом смысле вполне совместна.

Теорема 1. *Пусть якобиан неприводимой системы* (2)

$$j=\frac{\partial g_1,\dots,g_n}{\partial x_{n+1},\dots,x_{2n}}$$

не принадлежит идеалу

$$\mathfrak{p}=(g_1,\dots,g_n),$$

порожденному левыми частями уравнений этой системы. Если многочлен f из $k[x_1,\dots,x_{2n}]$ обращается в нуль на любом решении из $S_a(\mathfrak{p})$ при любом a из области определения поля основных функций k, то f принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$.

Доказательство. Идеал

$$\mathfrak{a}=(j,g_1,\dots,g_n)$$

задает замкнутое подмножество $V_a(\mathfrak{a})$ на многообразии $V_a(\mathfrak{p})$. Обозначим через U дополнение к $V_a(\mathfrak{a})$ и возьмем в этой области какую-нибудь точку p, представляющую собой $2n$ рядов Пюизё по степеням $t-a$.

Допустим для начала, что эти ряды сходятся в некоторой окрестности точки $t=a$. Точка p многообразия $V(\mathfrak{p})$ принадлежит U, если ряд $j(p)$ по степеням $t-a$ не равен нулю тождественно, то есть если можно указать такую точку $t=b$, что $p|_{t=b}$ – точка аффинного пространства A^{2n} над $\mathbb{C}$ и $j(p)|_{t=b} \neq 0$.

При рассмотрении задачи Коши удобно вслед за Пенлеве ввести новую независимую переменную $\overline{t}$ и принять, что черта сверху над выражением означает замену переменной t на $\overline{t}$. Обозначим через L поле рядов Лорана по степеням $t-b$ с коэффициентами в поле $\overline{k}$. Тогда теорема Коши утверждает, что при t и $\overline{t}$, достаточно близких к b, рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет решение q в поле L, которое при $t=\overline{t}$ принимает значение $\dot{q}=\overline{p}$. Придавая $\overline{t}$ какие угодно комплексные значения, близкие к $t=b$, получим решения в поле $P_b(k)$. По условию многочлен f аннулируется на любых решениях из $P_b(k)$ и, в частности, на рядах $\dot{q}$, какое бы значение $\overline{t}$ мы ни подставляли, а значит, и на этих рядах как на элементах поля L. Подставляя в

$$f(\dot{q})=0$$

значение $t=\overline{t}$, получим

$$\overline{f}(\overline{p})=0;$$

поскольку $\overline{t}$ – такая же зависимая переменная, как и t, это означает лишь, что $f(p)=0$.

Пусть теперь p' – элемент области U, который дается формальными рядами Пюизё. Для него можно указать такой сходящийся в окрестности точки $t=a$ ряд Пюизё p'', чтобы любое число первых коэффициентов рядов $f(p')$ и $f(p'')$ совпадало. Поскольку на p'' многочлен f обращается в нуль, все коэффициенты ряда $f(p')$ равны нулю, то есть f обращается в нуль на всем открытом множестве U.

По предположению расширение идеала $\mathfrak{p}$ является простым идеалом, поэтому пространство $V_a(\mathfrak{p})$ неприводимо и, следовательно, равенство $f(p)=0$ продолжается на все $V_a(\mathfrak{p})$. Поскольку расширение Пюизё дает алгебраически замкнутое поле, в силу теоремы Гильберта о нулях f принадлежит расширению идеала $\mathfrak{p}$. По условию коэффициенты многочлена f лежат в поле основных функций, поэтому $f \in \mathfrak{p}$. $\square$

Замечание 3.1. Ради конструкции, использованной в доказательстве этой теоремы, выше было позволено рассматривать расширения поля k, поля констант которых больше $\mathbb{C}$.

Было бы намного удобнее использовать одно расширение вместо целого семейства расширений Пюизё, приняв в полном соответствии с определением 3 следующее:

Определение 8. *Систему дифференциальных уравнений* (1) *будем называть вполне совместной над расширением K поля основных функций, если для многочлена f из $K[x_1, \ldots, x_{2n}]$, обращающегося в нуль на любом решении в поле K, можно указать такое целое число r, что f^r принадлежит идеалу $\mathfrak{a}^K$, порожденному правыми частями уравнений этой системы.*

По теореме Пенлеве из области определения поля основных функций можно удалить некоторое множество точек, именуемых неподвижными особыми точками, с тем чтобы в оставшейся области аналитические решения заданного уравнения первого порядка

$$g(x, \dot{x}) = 0, \quad g \in k[x_1, x_2],$$

можно было продолжать, не встречая других особенностей кроме алгебраических, [13, стр. 51].

Теорема 2. *Неприводимое дифференциальное уравнение первого порядка*

$$g(x, \dot{x}) = 0, \quad g \in k[x_1, x_2],$$

вполне совместно над полем $P_a(k)$, где $t = a$ – любая точка области определения поля основных функций, отличная от неподвижных особых точек этого уравнения.

Доказательство дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы, только теперь выражение $f(q)$ обращается в нуль не потому, что при любом фиксированном $\bar{t}$ ряд q принадлежит $S_b(\mathfrak{p})$, а потому, что его можно продолжить в точку $t = a$ и получить ряд из $S_a(\mathfrak{p})$.

К сожалению, уже для известных механических систем алгебраичность подвижных особых точек приходится доказывать особо, например, для задачи трех тел она установлена вдоль вещественной оси и при вещественных начальных данных, не аннулирующих момент импульса системы, [26]. Для систем, разрешенных относительно производных, это свойство удалось установить, потребовав, чтобы их коэффициенты не были подчинены особым условиям, [16].

Приводимые ниже в §4 доказательства выглядят проще для систем, вполне совместных над полем K, но без особых хлопот переносятся на системы, вполне совместные в смысле определения 7.

3.3. Замкнутость дифференциальных уравнений системы. В условиях теоремы 1 нетрудно доказать и замкнутость системы n дифференциальных уравнений на n неизвестных функций (2) в смысле определения 5.

Пусть q – какое угодно решение из $S(\mathfrak{p}/K)$, тогда

$$g_i(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n) = 0,$$

и поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(q) \cdot q_{i+n} + \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(q) \cdot \dot q_i + \frac{\partial g_i}{\partial t}(q) = 0.$$

Если якобиан системы (2) не принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$, то система

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \cdot x_{i+n} + \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \cdot r_i + \frac{\partial g_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \right.$$

имеет решение $(r_1, \dots, r_n)$ в поле рациональных функций $R(\mathfrak{p}/k)$ над полем k. Продолжим дифференцирование по t поля K до дифференцирования D поля $R(\mathfrak{p}/K)$, приняв

$$Dx_i = x_{i+n}, \quad Dx_{i+n} = r_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда в любой точке q из $S(\mathfrak{p}/K)$

$$Dx_i(q) = x_{i+n}(q) = q_{i+n} = \dot q_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и, поскольку система

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(q) \cdot x_{i+n}(q) + \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(q) \cdot z_i + \frac{\partial g_i}{\partial t}(q) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \right.$$

имеет в поле K единственное решение $(z_1, \dots, z_n)$,

$$Dx_{n+i}(q) = z_i = \dot q_{n+i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из $2n$ равенств

$$Dx_i(q) = \dot q_i, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

и правила Лейбница мгновенно следует, что

$$\frac{df(q)}{dt} = Df(q).$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Если якобиан неприводимой системы* (2)

$$j = \frac{\partial g_1, \dots, g_n}{\partial x_{n+1}, \dots, x_{2n}}$$

не принадлежит идеалу

$$\mathfrak{p} = (g_1, \dots, g_n),$$

порожденному левыми частями уравнений этой системы, то эта система замкнута.

§4. Рациональные интегралы системы дифференциальных уравнений

Обратимся теперь к интегралам неприводимой, вполне совместной над K и замкнутой системы (1), правые части которой порождают идеал $\mathfrak{p}$.

4.1. Алгебраические интегралы. В теории дифференциальных уравнений, и в первую очередь в механике, алгебраическим интегралом движения называют алгебраическую функцию переменных x_1, $\dots, x_n$, принимающую постоянное значение на любом решении.

Определение 9. *Скажем, что уравнение*

$$a_0 z^s + \dots a_s = 0, \quad a_i \in K[x_1, \dots, x_n],$$

задает алгебраический интеграл движения, если на любом решении q из $S(\mathfrak{a}/K)$ уравнение

$$a_0(q) z^n + \dots a_n(q) = 0$$

имеет корень в поле констант поля K. Этот корень будем далее называть неподвижным корнем.

Непостоянную функцию f, рациональную на $V(\mathfrak{p}/K)$, будем называть рациональным интегралом движения, если на любом решении $q \in S(\mathfrak{p}/K)$ выражение $f(\dot{q})$ принадлежит полю констант.

Теорема 4. *Если неприводимая система вполне совместна и замкнута над расширением K поля функций k, то всякое уравнение*

$$a_0 z^s + \dots a_s = 0, \quad a_i \in K[x_1, \dots, x_n],$$

задающее алгебраический интеграл, над полем $R(\mathfrak{p}/K)$ распадается на несколько уравнений, причем коэффициентами хотя бы в одном из них служат рациональные интегралы системы.

Замечание 4.1. Подобного рода утверждения используются при изысканиях алгебраических интегралов динамических систем и потому обычно доказываются специально для гамильтоновых систем, см., например, [21].

Доказательство. Когда уравнение

$$a_0 z^s + \dots a_s = 0, \quad a_i \in K[x_1, \dots, x_n],$$

распадается в поле $R(\mathfrak{p}/K)$ на несколько уравнений, одно из них, скажем

$$z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m = 0, \quad b_i \in R(\mathfrak{p}/K),$$

имеет неподвижный корень $z = c$. Тогда для любого решения $q \in S(\mathfrak{p}/K)$, на котором знаменатели b_i не обращаются в нуль, верно равенство

$$c^m + b_1(\dot q) c^{m-1} + \dots + b_m(\dot q) = 0;$$

дифференцируя его по t, получим

$$\frac{db_1(\dot q)}{dt} c^{m-1} + \dots + \frac{db_1(\dot q)}{dt}(dq) = 0.$$

Поскольку рассматриваемая система дифференциальных уравнений замкнута, это соотношение можно переписать так:

$$Db_1(\dot q) c^{m-1} + \dots + Db_m(\dot q) = 0.$$

Это означает, что результант r системы

$$\{z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m = 0, \quad Db_1 z^{m-1} + \dots + Db_m = 0\}$$

равен нулю в любой точке $\dot q$. По предположению теоремы система дифференциальных уравнений вполне совместна над K, поэтому отсюда следует, что результант равен нулю во всех точках многообразия $V(\mathfrak{p}/K)$. Но тогда неприводимое уравнение степени m имеет общие корни с уравнением меньшей степени, что возможно лишь тогда, когда все коэффициенты этого уравнения равны нулю, то есть когда

$$Db_1 = \dots Db_m = 0,$$

или

$$\frac{db_1(\dot{q})}{dt} = \dots = \frac{db_1(\dot{q})}{dt} = 0$$

в любой точке $q \in S(\mathfrak{p}/K)$. □

Доказанная теорема показывает, что при интегрировании системы дифференциальных уравнений достаточно ограничиться рациональными интегралами движения. Ее нетрудно распространить и на семейства расширений Пюизё, о которых идет речь в определении 7.

4.2. Поле рациональных интегралов и его коэффициенты. Если добавить к рациональным интегралам системы (1) числа из $\mathbb{C}$, получится подполе в поле рациональных функций на $V(\mathfrak{p}/K)$, которое мы будем называть *полем рациональных интегралов* и обозначать $I(\mathfrak{p}/K)$.

Теорема 5. *Любую рациональную функцию на многообразии $V(\mathfrak{p}/K)$ можно задать парой $g : h$ многочленов из $K[x_1, \dots, x_{2n}]$, коэффициенты которых принадлежат полю, порожденному над k значениями этой функции в надлежащим образом подобранном конечном наборе точек многообразия*

$$V(\mathfrak{p}/K) \cap A_k^{2n} = V(\mathfrak{p}/k).$$

Доказательство. Возьмем какое-нибудь представление рассматриваемой функции r в виде отношения многочленов $g : h$, выберем из содержащихся в них мономов $x_1^{n_1} \dots x_{2n}^{n_{2n}}$ линейно свободные по модулю $\mathfrak{p}^K$ над K и обозначим их $m_1, \dots, m_u$. Любой элемент кольца $K[x_1, \dots, x_{2n}]/\mathfrak{p}^K$ если и можно представить в виде линейной комбинации этих мономов с коэффициентам из K, то единственным образом. В частности,

$$g = \sum g_i m_i, \quad h = \sum h_i m_i.$$

Мы докажем теорему, если выразим g_i и h_i через значения функции r в точках многообразия $V(\mathfrak{p}/k)$.

Возьмем наудачу точку q_1 из $V(\mathfrak{p}/k)$, тогда

$$\sum (g_i - r(q_1)h_i) \cdot m_i(q_1) = 0,$$

откуда получаются линейные однородные уравнения на коэффициенты g_i и h_i. Затем возьмем точку q_2 и добавим к этой системе еще несколько уравнений, не являющихся следствием остальных. Двигаться так дальше до бесконечности невозможно, поскольку иначе получится линейная однородная система, в которой уравнений больше неизвестных, и, следовательно, $h = 0$, что невозможно. Значит, на j-м шаге мы получаем такую систему линейных однородных уравнений, подчинив которой коэффициенты, уже нельзя указать точку q_{j+1}, в которой бы не выполнялось соотношение

$$\sum (g_i - r(q_{j+1})h_i) \cdot m_i(q_{j+1}) = 0.$$

Иными словами, если коэффициенты g_i, h_i удовлетворяют так построенной системе линейных однородных уравнений, то функция g/h совпадает с r во всех точках многообразия $V(\mathfrak{p}/k)$.

Если эти функции не совпадают в некоторой точке q из $V(\mathfrak{p}/K)$, то имеется такое значение $t = b$, что

$$\left. \frac{g(q)}{h(q)} - r(q) \right|_{t=b} \neq 0.$$

Но тогда эти функции не могут совпадать и в той точке p из $V(\mathfrak{p}/k)$, в которой

$$p|_{t=b} = q|_{t=b},$$

что невозможно. Следовательно, g/h совпадает с r во всех точках многообразия $V(\mathfrak{p}/K)$, где они определены.

Остается заметить, что коэффициентами системы линейных однородных уравнений для g_i, h_i служат значения мономов в точках многообразия $V(\mathfrak{p}/k)$, то есть элементы поля k, или произведения таких мономов на значение функции в точках $q_1, \dots, q_j$. Поэтому можно подобрать ее решение в поле, порожденном над k элементами $r(q_1), ..., r(q_j)$. □

Определение 10. *Будем говорить, что коэффициенты элементов (функций) подполя P поля $R(\mathfrak{p}/K)$ лежат в поле k', если это поле заключено между k и K и всякая функция r из P принимает на некотором открытом множестве многообразия $V(\mathfrak{p}/k)$ значения в поле k'. Наименьшее поле, которому принадлежат коэффициенты подполя P, будем называть* полем коэффициентов *поля P и обозначать* $\mathrm{coef}(P)$.

Определение 11. *Поле коэффициентов интегралов системы дифференциальных уравнений будем называть* полем трансцендент, вводимых интегрированием этой системы. *Элементы базиса трансцендентности этого поля над полем основных функций будем называть* трансцендентами, вводимыми интегрированием, *а степень трансцендентности – числом трансцендент, вводимых интегрированием.*

Это определение позволяет строго сформулировать задачу 2.

Задача 3. *Перечислить все трансценденты, вводимые интегрированием систем дифференциальных уравнений.*

4.3. Свойства поля интегралов. Если рациональные интегралы вполне совместной замкнутой системы дифференциальных уравнений алгебраически зависимы над полем K, то они зависимы и над полем констант поля K. В самом деле, если интегралы $r_1, \ldots, r_s$ системы связаны неприводимым над полем K соотношением

$$\sum a_{n_1,\ldots,n_s} r_1^{n_1} \ldots r_s^{n_s} = 0, \quad a_{n_1,\ldots,n_s} \in K,$$

то верно и равенство

$$\sum \frac{da_{n_1,\ldots,n_s}}{dt} r_1^{n_1} \ldots r_s^{n_s} = 0,$$

поэтому все коэффициенты $a_{n_1,\ldots,n_s}$ неизбежно принадлежат полю констант.

Это наблюдение позволяет охарактеризовать поле интегралов как классический объект алгебраической геометрии:

Теорема 6. *Если вполне совместная замкнутая система дифференциальных уравнений допускает m рациональных интегралов, то ее поле интегралов изоморфно полю рациональных функций на гиперповерхности в аффинном пространстве над полем $\mathbb{C}$ размерности m.*

Под числом рациональных интегралов, которые допускает система (1), будем понимать, конечно, степень трансцендентности поля интегралов над полем $\mathbb{C}$.

Доказательство. Степень трансцендентности поля $R(\mathfrak{p}/K)$ над K конечна, она совпадает с порядком системы (1). Поэтому имеется конечное число алгебраически независимых над K интегралов, скажем $r_1, \ldots, r_s$, а всякий прочий интеграл r связан с ними алгебраическим соотношением, коэффициенты которого лежат в K, а следовательно, и в $\mathbb{C}$. Поэтому поле интегралов $I(\mathfrak{p}/K)$ является алгебраическим расширением поля $\mathbb{C}(r_1, \ldots, r_s)$.

Поскольку поле $R(\mathfrak{p}/K)$ конечно порождено над K, композит K и $I(\mathfrak{p}/K)$, лежащий между K и $R(\mathfrak{p}/K)$, тоже конечно порожден над

K. Если интегралы $r', r'', \ldots$ линейно свободны над $\mathbb{C}(r_1, \ldots, r_s)$, то они линейно свободны и над композитом $\mathbb{C}(r_1, \ldots, r_s)$ и K. Поскольку композит K и $I(\mathfrak{p}/K)$ конечно порожден над K, таких элементов не может быть бесконечно много, следовательно, поле $I(\mathfrak{p}/K)$ конечно над $\mathbb{C}(r_1, \ldots, r_s)$, и по теореме о примитивном элементе в поле $I(\mathfrak{p}/K)$ можно найти такой элемент r_{s+1}, присоединение которого к полю $\mathbb{C}(r_1, \ldots, r_s)$ дает все поле $I(\mathfrak{p}/K)$. □

Замечание 4.2. Для доказательства существенно, что мы работаем с полями, а не с кольцами; в противном случае мы уперлись бы в 14-ю проблему Гильберта.

Как следствие теорем 5 и 6 имеем:

Теорема 7. *Поле трансцендент, вводимых интегрированием вполне совместной и замкнутой системы дифференциальных уравнений, конечно порождено над полем k. Его базисом трансцендентности служат значения надлежащим образом выбранных интегралов $r_1, \ldots$ в надлежащим образом выбранных точках $q', \ldots$ многообразия $V(\mathfrak{p}/k)$.*

Из равенства $Dr = 0$ следует, что в любой точке $q \in V(\mathfrak{p}/k)$

$$\frac{dr(q)}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t}(q) + \sum_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(q) = -\sum \frac{\partial r}{\partial m_j} Dm_j + \sum_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(q).$$

По определению 5 для любого монома m

$$Dm_j \in R(\mathfrak{p}/k),$$

поэтому функция $r(q)$ и ее производная принадлежат полю коэффициентов интегралов системы. Таким образом, из теоремы 7 получается и следующая теорема:

Теорема 8. *Поле трансцендент, вводимых интегрированием вполне совместной и замкнутой системы дифференциальных уравнений, замкнуто относительно дифференцирования по t.*

4.4. Автоморфизмы поля трансцендент, вводимых интегрированием. Обратимся теперь к автоморфизмам поля трансцендент, для чего используем конструкции, обычные для всех лиувиллиевых теорий, восходящих к статье Лиувилля об интегрировании в элементарных функциях [27], см. также [28–30].

Теорема 9. *Группа дифференциальных k-автоморфизмов поля трансцендент, вводимых интегрированием вполне совместной и замкнутой над K системы дифференциальных уравнений* (1), *вложена в группу $\mathbb{C}$-автоморфизмов поля интегралов.*

Доказательство. (i) Всякий дифференциальный k-автоморфизм поля k', лежащего между k и K, можно продолжить до автоморфизма поля рациональных на $V(\mathfrak{p}/K)$ функций, коэффициенты которых принадлежат полю k'.

Пусть T – дифференциальный k-автоморфизм поля k', то есть автоморфизм, коммутирующий с дифференцированием поля k'

$$T\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dT\alpha}{dt}$$

и оставляющий элементы поля k на месте. Этот автоморфизм продолжается на $k'[x_1, \ldots, x_{2n}]$. Образующие идеала $\mathfrak{p}$ имеют коэффициенты в k и поэтому остаются на месте, отсюда $T\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$.

Автоморфизм T можно продолжить до автоморфизма поля рациональных на $V(\mathfrak{p}/K)$ функций, коэффициенты которых принадлежат полю k', следующим образом. В силу теоремы 5 рациональную функцию r можно представить как отношение $g : h$ многочленов из $k'[x_1, \ldots, x_{2n}]$. Поскольку из $h \notin \mathfrak{p}$ следует $Th \notin T\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, отношение $Tg : Th$ тоже задает некоторую функцию, рациональную на $V(\mathfrak{p}/K)$ и имеющую коэффициенты в поле k'. Прежде чем назвать ее образом Tr, следует доказать, что эта функция не меняется при выборе другого представления функции r в виде отношения многочленов. Поскольку T оставляет на месте элементы поля k, в точке q многообразия $V(\mathfrak{p}/k)$ функция, заданная отношением $Tg : Th$, принимает значение $T(r(q))$, а в силу теоремы 5 эти значения однозначно определяют рациональную функцию.

(ii) Построенное выше продолжение автоморфизма T коммутирует с дифференцированием D поля $R(\mathfrak{p}/K)$.

Воспользуемся опять той же конструкцией, что и в доказательстве теоремы 8: если рациональную функцию представить как отношение

$$r = \frac{g_1 m_1 + \ldots}{h_1 m_1 + \ldots},$$

где $m_1, \ldots$ – мономы, линейно свободные над K по модулю $\mathfrak{p}$, то

$$Dr = \frac{\partial r}{\partial m_1} Dm_1 + \cdots + \frac{\partial r}{\partial t}.$$

Поскольку T оставляет на месте элементы поля k,

$$TDm_i = DTm_i = Dm_i.$$

Поскольку T коммутирует с дифференцированием по t,

$$T\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial Tr}{\partial t}.$$

Поэтому продолжение автоморфизма T на рациональные функции, коэффициенты которых лежат в поле k', коммутирует с D.

(iii) Если T_1 и T_2 – два автоморфизма поля k', то, как видно из построения в (i), продолжение их произведения T_1T_2 совпадает с произведением продолжений.

(iv) Если k' – поле трансцендент, то продолжение, описанное в (i), задает гомоморфизм φ группы дифференциальных k-автоморфизмов поля k в группу $\mathbb{C}$-автоморфизмов поля интегралов.

Всякий дифференциальный автоморфизм T поля трансцендент k' продолжается до автоморфизма поля рациональных функций, коэффициенты которых лежат в k'. Все интегралы системы лежат в этом поле, и автоморфизм переводит интегралы в интегралы, поскольку равенство $Dr = 0$ влечет и равенство $DTr = TDr = 0$. Таким образом, T продолжается до автоморфизма поля $I(\mathfrak{p}/K)$. По условию $\mathbb{C}$ – поле констант поля k, следовательно, T оставляет на месте константы и переставляет интегралы системы.

(v) Гомоморфизм, построенный в (iv), является мономорфизмом.

Автоморфизм поля трансцендент T, отличный от единичного, сдвигает хотя бы один элемент этого поля, следовательно, хотя бы один из элементов

$$\alpha_1 = r_1(q_1), \dots,$$

порождающих его над полем k, меняется под действием T. Это означает, что значение хотя бы одного интеграла хотя бы в одной точке многообразия $V(\mathfrak{p}/k)$ меняется под действием T. $\square$

Поле k' трансцендент, вводимых интегрированием систем, конечно порождено над полем основных функций k. Обозначим его базис трансцендентности через $\alpha_1, \dots, \alpha_u$; все поле k' можно получить из $k(\alpha_1, \dots, \alpha_u)$, прибавив один примитивный элемент α_{u+1}, связанный с $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ неприводимым над k соотношением

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_{u+1}) = 0, \quad g \in k[y_1, \dots, y_{u+1}].$$

Простой идеал, порожденный левой частью этого уравнения, обозначим через $\mathfrak{q}$. Поскольку поле k' замкнуто относительно дифференцирования по t, найдутся такие элементы f_i кольца $k(y_1, \ldots, y_u)[y_{u+1}]$, что

$$\dot{\alpha}_i = f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{u+1}).$$

Дифференциальный k-автоморфизм T переводит эти соотношения в равенства

$$\frac{dT\alpha_i}{dt} = f_i(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_{u+1}).$$

Иными словами, дифференциальные k-автоморфизмы переводят решения системы дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, \ldots, y_{u+1}) \tag{3}$$

на многообразии $V(\mathfrak{q}/K)$ в решения. Среди координат точки на $V(\mathfrak{q}/K)$ не более u могут быть алгебраически независимы над k. Рассматриваемое решение

$$y_1 = \alpha_1, \ldots, y_{u+1} = \alpha_{u+1}$$

системы (3) обладает весьма приметным свойством: его координаты имеют наибольшую из возможных степень трансцендентности над k. Такое решение будем называть *вполне трансцендентным решением* системы.

Определение 12. *Расширение k' поля k основных функций будем называть нормальным в поле K, если*

(1) *это поле порождено над k вполне трансцендентным решением некоторой системы дифференциальных уравнений над k,*
(2) *все вполне трансцендентные решения этого уравнения в поле K принадлежат и полю k'.*

Это определение дано по аналогии с определением нормального расширения в теории Галуа; путаницы возникнуть не может, поскольку k' не является алгебраическим расширением поля k.

Теорема 10. *Поле трансцендент, вводимых интегрированием вполне совместной и замкнутой системы дифференциальных уравнений, является нормальным расширением поля основных функций.*

Доказательство. Рассмотрим два вполне трансцендентных решения

$$y_1 = \alpha_1, \ldots, y_{u+1} = \alpha_{u+1} \quad \text{и} \quad y_1 = \beta_1, \ldots, y_{u+1} = \beta_{u+1}$$

системы (3), из которых первое порождает поле $k' = \operatorname{coef}(I(\mathfrak{p}/k))$, а второе – некоторое поле k''. Обозначим через T гомоморфизм $k' \to k''$, переводящий α_i в β_i. Коммутационные соотношения, установленные в доказательстве теоремы 9, остаются в силе, поэтому продолжение гомоморфизма T переводит интегралы в интегралы. Поле коэффициентов этих интегралов во всяком случае принадлежит полю коэффициентов всех интегралов, то есть k' и k'' удовлетворяют соотношению $k'' \subseteq k'$ как подполя в K.

С другой стороны, $\beta_1, \dots, \beta_{u+1}$ заведомо связаны соотношением

$$g(\beta_1, \dots, \beta_{u+1}) = 0$$

над k, поэтому $\beta_1, \dots, \beta_u$ не могут быть связаны еще каким-то дополнительным соотношением и, следовательно, составляют базис трансцендентности поля k''. Поскольку g неприводимо над k,

$$k' = k(\alpha_1, \dots, \alpha_u)[\alpha_{u+1}], \quad k'' = k(\beta_1, \dots, \beta_u)[\beta_{u+1}],$$

а гомоморфизм T – естественный изоморфизм этих полей. □

Теорема 11. *Если интегрирование вполне совместной и замкнутой над расширениями Пюизё системы дифференциальных уравнений вводит и трансцендент, то поле ее интегралов допускает и-параметрическую группу $\mathbb{C}$-автоморфизмов, которая продолжает группу дифференциальных автоморфизмов поля коэффициентов поля интегралов системы.*

Доказательство. Поскольку поле трансцендент является нормальным расширением поля основных функций, всякое решение системы (3) в поле Пюизё порождает дифференциальный k-автоморфизм этого поля. В силу теоремы 9 всякий такой автоморфизм поля трансцендент порождает автоморфизм поля интегралов.

Поскольку точка $(\alpha_1, \dots, \alpha_{u+1})$ принадлежит области определения правых частей системы (3), можно указать такое значение $t = b$, при котором

$$f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{u+1})|_{t=b} \in \mathbb{C}$$

для всех i. Но тогда задача Коши для системы (3) с начальными условиями

$$y_1 - \alpha_1|_{t=b} = c_1, \dots, y_u - \alpha_u|_{t=b} = c_u$$

имеет решение в поле Пюизё, зависящее от u параметров, меняющихся в окрестности нуля. При

$$c_1 = \cdots = c_u = 0$$

это решение совпадет с $\alpha_1, \ldots, \alpha_{u+1}$, и поэтому его координаты не могут быть связаны никаким другим соотношением кроме соотношения $g = 0$ и его следствий. Поэтому теорема Коши не даст вполне трансцендентное решение лишь при таких значениях параметров $c_1, \ldots, c_u$, которые не имеют точки сгущения в нуле. Отбросив их, имеем u-параметрическое семейство вполне трансцендентных решений задачи (3). $\square$

Подобно тому, как в теории Галуа исследование разрешимости алгебраических уравнений n-го порядка сводят к исследованию подгрупп конечной группы перестановок n элементов, доказанная теорема сводит исследование разрешимости системы дифференциальных уравнений к исследованию бесконечных групп автоморфизмов алгебраических многообразий.

§5. Заключение

Суммируя вместе теоремы 6 и 11, мы видим, что *поле интегралов системы дифференциальных уравнений эквивалентно полю рациональных функций на гиперповерхности, допускающей непрерывную группу бирациональных $\mathbb{C}$-автоморфизмов, размерность которой совпадает с числом трансцендент, вводимых интегрированием системы.*

Как известно, группа автоморфизмов произвольной алгебраической кривой порядка n конечна (см., например, [31]); таким образом, в предложенной версии теории Галуа аналогом разрешимой группы среди конечных групп выступает непрерывная группа автоморфизмов среди автоморфизмов алгебраических многообразий. Описание многообразий над $\mathbb{C}$, допускающих бесконечные группы бирациональных автоморфизмов, было предметом многочисленных изысканий итальянских геометров [32, no. 39], [33, 34], путь к приложению которых в теории дифференциальных уравнений открывает доказанная теорема.

Литература

1. J. M. Borwein, R. E. Crandall, *Closed forms: what they are and why we care.* — Notices Amer. Math. Soc. **60**, No. 1 (2013), 50–65.

2. M. F. Singer, *Liouvillian first integral of differential equations.* — Trans. Amer. Math. Soc. **333**, No. 2 (1992), 673–688.
3. G. Casale, *Liouvillian first integrals of differential equations.* — Banach Center Publ. **94** (2011), 153–161.
4. J. Moses, *Symbolic integration.* AI Technical Reports, 1967.
5. E. S. Cheb-Terrab, L. G. S. Duarte, L.A.C.P. da Mota, *Computer algebra solving of first order ODEs using symmetry methods.* — Comput. Phys. Commun. **101** (1997), 254–268.
6. E. S. Cheb-Terrab, A. D. Roche, *Symmetries and first order ODE patterns.* — Comput. Phys. Commun. **113** (1998), 239–260.
7. E. S. Cheb-Terrab, A. D. Roche, *Integrating factors for second order ODEs.* — J. Symb. Comput. **27**, No. 5 (1999), 501–519.
8. E. S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov, *First order ODEs, symmetries and linear transformations.* — Europ. J. Appl. Math. **14**, No. 2 (2003), 231–246.
9. Д. Д. Мордухай-Болтовской, *Комментарии к Евклиду.* В кн.: Начала Евклида. Книги 1–6. М., ГТТИ, 1955.
10. Н. А. Кудряшов, *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.* Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
11. А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана.* М.-Ижевск, Рациональная и хаотическая динамика, 2005.
12. С. Л. Соболевский, *Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* Минск, БГУ, 2006.
13. В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* М.-Л., ГИТТЛ, 1950.
14. L. Schlesinger, *Einfuhrung in die Theorie der gewohnlichen Differentialgleichungen.* Leipzig, VWV, 1922.
15. Н. Н. Парфентьев, *Отзыв о работе проф. Шлезингера из Гиссена.* — Известия физ.-мат. общества при имп. казанском университете, 2-я сер., т. XVIII, 4, 1912.
16. P. Painlevé, *Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles.* Paris, 1897. Œuvres. T. 1. Paris, 1971.
17. P. Painlevé, *Memoire sur les equations differentielles du premier ordre.* — In: Œuvres. T. 2. Paris, 1974, pp. 237–461.
18. P. Painlevé, Приложение к книге P. Boutroux. Œuvres. T. 2. Paris, 1974, pp. 767–813.
19. А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, *Трансцендентные функции, вводимые интегрированием дифференциальных уравнений.* — Динамика сложных систем – XXI век, вып. 3 (2010).
20. L. Koenigsberger, *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhägigen Variabeln.* Leipzig, Tuebner, 1889.
21. L. Koenigsberger, *Die Principien der Mechanik.* Leipzig, Tuebner, 1901.
22. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.* М., Факториал, 1997.
23. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* М., Мир, 1981.
24. О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра.* М., ИЛ, 1963.

25. D. Maclagan, B. Sturmfels, *Introduction to Tropical Geometry*, `http://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/TropicalBook.html`.
26. К. Зигель, *Лекции по небесной механике.* М., ИЛ, 1959.
27. J. Liouville, *Memoire sur l'integration d'une classe de fonctions transcendantes.* — J. Reine Angew. Math. **13** (1835), 93–118.
28. J. F. Ritt, *Integration in Finite Terms: Liouville's Theory of Elementary Methods.* New York, Columbia Univ. Press, 1949.
29. А. Г. Хованский, *Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде.* М., Изд-во МЦНМО, 2008.
30. M. Bronstein, *Symbolic Integration I: Transcendental Functions.* Berlin, Springer, 1999.
31. Н. Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций.* М., УРСС, 2013.
32. G. Castelnuovo, F. Enriques, *Die algebraischen Flachen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus.* — Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band III, 2. Teil. C. Algebraische Geometrie. Leipzig, Teubner, 1903–1932.
33. F. Enriques, *Le superficie algebriche.* Bologna, 1946.
34. Ю. Г. Прохоров, *Группа Кремоны и ее подгруппы.* — Заседания Московского математического общества, 26 марта 2013 г.

Факультет наук о материалах,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Ленинские Горы, МГУ, д. 1,
Москва, Россия, 119991;
Кафедра прикладной информатики
и теории вероятностей,
Российский университет
дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
Москва, Россия, 117198
E-mail: `malykhmd@yandex.ru`

Поступило 22 ноября 2014 г.