Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 432, 2015 г.

П. Б. Затицкий

МАСШТАБИРУЮЩАЯ ЭНТРОПИЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ: ИНВАРИАНТНОСТЬ И ПРИМЕРЫ

§1. Введение

Энтропийная теория метрических динамических систем, начало которой положили пионерские статьи А. Н. Колмогорова [1,2] и Я. Г. Синая [3], является важным разделом эргодической теории. Своим дальнейшим развитием она обязана многим математикам: В. А. Рохлину, Я. Г. Синаю, Д. Орнстейну, Б. Вейсу и др. (см., например, обзор [4], монографию [5], учебник [6]).

В данной работе развивается предложенный А. М. Вершиком (см., например, [7–9]) подход к исследованию метрических динамических систем путем изучения динамики метрик (или полуметрик) на пространстве с мерой. Классический подход Колмогорова–Синая–Рохлина основан на изучении взаимного расположения измеримого разбиения и его сдвигов. Основная идея, предложенная Вершиком, заключается в том, чтобы перейти от измеримых разбиений к более богатой структуре – полуметрикам (измеримые разбиения можно рассматривать как частные случаи полуметрик, сопоставляя им соответствующие блок-полуметрики). Естественными объектами, описывающими взаимное расположение нескольких полуметрик, являются супремум-полуметрика и усредненная полуметрика. Супремум сдвигов блок-полуметрики, построенной по измеримому разбиению, совпадает с

Ключевые слова: динамическая система, энтропия, масштабирующая последовательность, полуметрика, подстановка.

Исследования общего случая (п. 1–4.3) выполнены при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026), ОАО “Газпром нефть”, гранта СПбГУ 6.38.223.2014, грантов РФФИ 13-01-12422 офи_м2 и 14-01-00373_А, гранта Президента РФ МК-6133.2013.1, фонда Дмитрия Зимина “Династия”. Исследования подстановочных систем (п. 4.4) выполнены при поддержке гранта РНФ 14-11-00581.

блок-полуметрикой, построенной по произведению сдвигов этого разбиения. Таким образом, классическая энтропия может быть выражена в терминах таких супремум-метрик. В работах С. Ференци [10] и Катка–Тувено [11] для изучения автоморфизмов с нулевой колмогоровской энтропией был предложен числовой инвариант, по сути основанный на изучении усреднений блок-полуметрик, соответствующих измеримым разбиениям. Мы же, следуя подходу Вершика, будем изучать динамику полуметрик общего вида.

Одной из простейших характеристик полуметрики на пространстве с мерой является эпсилон-энтропия (см. определение 2 ниже). Асимптотика эпсилон-энтропий, усредненных под действием автоморфизма полуметрик, определяется масштабирующей последовательностью (см. определение 11 ниже) и в некоторых случаях приводит к числовому инварианту, названному масштабированной энтропией. Данная работа посвящена изучению свойств масштабирующих энтропийных последовательностей. Она существенно опирается на методы и результаты статьи [12], а также статей [13, 14]. Большая часть результатов данной работы анонсирована в работе [15], однако доказательства приведены именно здесь.

§2. Необходимые сведения и вспомогательные результаты

На протяжении работы все встречающиеся пространства с мерой будут стандартными вероятностными пространствами (пространствами Лебега–Рохлина). Основной интерес для нас будут представлять пространства с непрерывной мерой, однако все определения даются для произвольного пространства Лебега, т.е. пространства, в котором мера может содержать атомы. Говоря о вероятностном пространстве, мы чаще всего позволим себе опускать обозначение сигма-алгебры. В тех редких случаях, когда нам потребуется обозначение сигма-алгебры вероятностного пространства, скажем (X, μ), мы будем обозначать ее $\mathfrak{A}(X, \mu)$.

2.1. Допустимость, эпсилон-энтропия, измеримые разбиения. Напомним определение допустимой полуметрики и ее ε-энтропии (см., например, работы [12, 13]):

Определение 1. *Полуметрику ρ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) назовем* измеримой, *если она измерима на*

(X^2, μ^2) *как функция двух переменных, и* допустимой, *если она сепарабельна на некотором подмножестве* $X_1 \subset X$ *полной меры. Тройку* (X, μ, ρ) *будем называть* полуметрической *и* допустимой полуметрической *соответственно. Измеримую (допустимую) полуметрику* ρ *на пространстве* (X, μ) *будем называть* измеримой (*соответственно* допустимой) метрикой, *если найдется некоторое подмножество* $X_2 \subset X$ *полной меры, такое, что* ρ *задает метрику на* X_2.

Следующее определение восходит к А. Н. Колмогорову.

Определение 2. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ ε-энтропия $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ *полуметрической тройки* (X, μ, ρ) *определяется по следующему правилу. Рассмотрим наименьшее натуральное* k, *для которого пространство* X *можно представить в виде объединения множеств* $X_0, X_1, \dots, X_k$, *таких, что* $\mu(X_0) < \varepsilon$ *и при* $j = 1, \dots, k$ *диаметр множества* X_j *в полуметрике* ρ *меньше* ε. *Положим*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \log k$$

(*здесь и далее* $\log = \log_2$). *Если такого* k *не существует, положим* $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = +\infty$. *В то же время* эпсилон-энтропией *называют и функцию* $\varepsilon \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$.

Следующее утверждение проясняет связь между допустимостью и эпсилон-энтропией.

Предложение 1 (см. [12])**.** *Измеримая полуметрика* ρ *на стандартном вероятностном пространстве* (X, μ) *допустима тогда и только тогда, когда* $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) < +\infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Нам понадобятся следующие классические понятия (см. работу В. А. Рохлина [16]):

Определение 3. *Разбиение* ξ *пространства* (X, μ) *на конечное или бесконечное количество непересекающихся элементов называется* измеримым, *если найдется измеримая функция* $f\colon (X, \mu) \to \mathbb{R}$, *такая, что любой элемент разбиения* ξ *есть полный прообраз* $f^{-1}(y)$ *какой-то точки* $y \in \mathbb{R}$. Энтропией *разбиения* ξ *называется число* $H(\xi) = -\sum \mu(A_i) \log \mu(A_i)$, *если найдутся попарно дизъюнктные элементы разбиения* $\{A_1, A_2, \dots\}$, *такие, что* $\mu(\cup A_i) = 1$. *В противном случае полагают* $H(\xi) = +\infty$. *Множество всех измеримых разбиений стандартного вероятностного пространства* (X, μ) *с конечной энтропией обозначается символом* $Z(X, \mu)$. Энтропией *вероятностного пространства считается энтропия разбиения на точки.*

Произведением $\vee\xi_i$ нескольких измеримых разбиений ξ_i называется измеримое разбиение, элементы которого суть пересечения элементов исходных разбиений ξ_i.

Важным примером измеримых полуметрик являются блок-полуметрики, построенные по измеримым разбиениям.

Определение 4. *Пусть ξ – измеримое разбиение пространства (X,μ). Для $x \in X$ пусть $\xi(x)$ – элемент разбиения ξ, содержащий x.* Блок-полуметрикой, *соответствующей разбиению ξ, называется полуметрика ρ_ξ, определенная равенствами $\rho_\xi(x,y) = 0$, если $\xi(x) = \xi(y)$, и $\rho_\xi(x,y) = 1$ в противном случае. Если ξ является разбиением на два множества, полуметрика ρ_ξ называется* разрезной (*или просто* разрезом).

2.2. Почти метрики и теорема об исправлении. Полезно также дать формально менее ограничительные, но по сути эквивалетные определения.

Определение 5. *Пусть (X,μ) – стандартное вероятностное пространство, а $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ – измеримая по мере μ^2 неотрицательная функция. Будем называть ρ* почти метрикой, *если $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для μ^2-почти всех пар $(x,y) \in X^2$ и $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ для μ^3-почти всех троек $(x,y,z) \in X^3$.*

Определение 6. *Пусть ρ – почти метрика на пространстве (X,μ). Пусть $A \subset X$ – некоторое μ-измеримое подмножество. Символом $\mathrm{dm}_\rho(A)$ будем обозначать диаметр множества A в полуметрике ρ:*

$$\mathrm{dm}_\rho(A) = \sup\{\rho(x,y)\colon x,y \in A\}.$$

Символом $\mathrm{essdm}_\rho(A)$ будем обозначать его существенный диаметр:

$$\mathrm{essdm}_\rho(A) = \inf\{d \in \mathbb{R}\colon \rho(x,y) \leqslant d \text{ для } \mu^2\text{-п. в. } (x,y) \in A^2\}.$$

Из определения ясно, что $\mathrm{dm}_\rho(A) \geqslant \mathrm{essdm}_\rho(A)$. Обращение этого неравенства устанавливается следующей простой леммой, вытекающей непосредственно из неравенства треугольника.

Лемма 1. *Пусть ρ – измеримая полуметрика на (X,μ) и $A \subset X$ – измеримое подмножество. Тогда найдется μ-измеримое подмножество $B \subset A$, такое, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\mathrm{dm}_\rho(B) \leqslant 2\mathrm{essdm}_\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $d = \mathrm{essdm}_\rho(A)$. Мы можем считать, что $\mu(A) > 0$. Так как $\rho(x,y) \leqslant d$ для μ^2-почти всех пар $(x,y) \in A^2$, найдется точка $x \in A$, такая, что $\rho(x,y) \leqslant d$ для μ-почти всех $y \in A$.

Пусть $B = \{y \in A\colon \rho(x,y) \leqslant d\}$. Тогда $\mu(A \setminus B) = 0$ и для $y_1, y_2 \in B$ по неравенству треугольника имеем $\rho(y_1, y_2) \leqslant \rho(x, y_1) + \rho(x, y_2) \leqslant 2d$. $\square$

Следующее определение вводит естественный аналог понятия допустимости для почти метрик.

Определение 7. *Почти метрику ρ на пространстве (X, μ) будем называть* существенно сепарабельной, *если для любого $\varepsilon > 0$ пространство X может быть покрыто счетным семейством измеримых множеств, существенный диаметр каждого из которых меньше ε.*

Определение 8. *Две почти метрики ρ_1, ρ_2 на пространстве (X, μ) назовем μ-*эквивалентными, *если $\mu^2(\{(x,y) \in X^2\colon \rho_1(x,y) \neq \rho_2(x,y)\}) = 0$. Также будем иногда говорить, что одна из двух μ-эквивалентных почти метрик является* исправлением *другой (обычно исправленная почти метрика будет обладать какими-то лучшими свойствами по сравнению с исходной).*

В работе [13] доказана следующая теорема исправления для почти метрик.

Теорема 1. 1. *Пусть (X, μ) – стандартное вероятностное пространство, ρ – почти метрика на (X, μ). Тогда ρ можно исправить до всюду конечной полуметрики на X, то есть найдется μ-эквивалентная ей полуметрика $\tilde{\rho}$ на (X, μ).*

2. *Если при этом почти метрика ρ была существенно сепарабельной, то исправленную полуметрику $\tilde{\rho}$ можно выбрать допустимой.*

Замечание 1. Если последовательность полуметрик (или почти метрик) на (X, μ) сходится к некоторой функции ρ по мере μ^2, или μ^2-почти всюду, то функция ρ может не быть полуметрикой, но почти метрикой она является. В силу теоремы 1 об исправлении она μ-эквивалентна некоторой полуметрике. Пользуясь этой теоремой, мы в будущем всегда будем исправлять встречающиеся после предельных переходов почти метрики до полуметрик. Таким образом, предел последовательности полуметрик на (X, μ) относительно сходимости μ^2-почти всюду, по мере μ^2 или в $L^1(X^2, \mu^2)$ мы будем считать полуметрикой.

2.3. Теоремы о сигма-алгебрах. Обычно, когда говорят о связи меры и метрики, основной структурой считают метрическое пространство, а на меру накладываются условия, такие, как борелевость,

регулярность. Мы же, следуя подходу, предложенному А. М. Вершиком, действуем наоборот: в качестве основного объекта берем вероятностное пространство (X, μ), а на полуметрику ρ накладываем условие измеримости. Теоремы, обсуждаемые в данном разделе, в некоторой степени проясняют связь между этими подходами.

Если (X, ρ) – некоторое полуметрическое пространство, а μ – борелевская мера на нем, то функция ρ, рассматриваемая как функция двух переменных, тривиальным образом непрерывна в топологии, задаваемой ей самой, поэтому она является борелевски измеримой, стало быть, измеримой по мере μ. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако для допустимых полуметрик выполняется следующая теорема, доказанная в работе [13].

Теорема 2. *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – некоторое полное вероятностное пространство (не обязательно стандартное), а ρ – допустимая полуметрика на нем. Тогда мера μ является борелевской относительно топологии, задаваемой полуметрикой ρ. Иными словами, борелевская сигма-алгебра, порожденная полуметрикой ρ, является подалгеброй сигма-алгебры $\mathfrak{A}$ пространства (X, μ).*

Оказывается, для стандартного вероятностного пространства и допустимой метрики на нем верно более сильное утверждение (доказательство см. в работе [14]).

Теорема 3. *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – стандартное вероятностное пространство, а ρ – допустимая метрика на нем. Тогда пополненная по мере μ борелевская сигма-алгебра $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\rho)$, порожденная метрикой ρ, совпадает с сигма-алгеброй $\mathfrak{A}$ пространства (X, μ).*

2.4. Оценки эпсилон-энтропии. В этом разделе мы приведем серию неравенств для эпсилон-энтропии. Следующее утверждение моментально следует из неравенства Чебышева.

Лемма 2 (см. работу [12])**.** *Если ρ – суммируемая полуметрика на (X, μ), такая, что $\|\rho\|_{L^1(X^2, \mu^2)} < \frac{\varepsilon^2}{2}$, то $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = 0$. Иными словами, найдется разбиение пространства X на два непересекающихся измеримых множества X_0, X_1, такое, что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\mathrm{dm}_p(X_1) < \varepsilon$.*

Следующая простая лемма дает оценку энтропий суммы полуметрик через энтропии слагаемых.

Лемма 3. *Пусть ρ, ρ_1, ρ_2 – три измеримые полуметрики на стандартном вероятностном пространстве (X, μ), такие, что μ^2-п. в. выполнено неравенство $\rho \leqslant \rho_1 + \rho_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X, \mu, \rho) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_1) + \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_2). \tag{1}$$

Доказательство. Если правая часть неравенства (1) бесконечна, то оно тривиально выполнено. В противном случае для $i = 1, 2$ найдем $k_i \in \mathbb{N}$ и подмножества $X_0^i, \ldots, X_{k_i}^i \subset X$, такие, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i) = \log(k_i)$, $X = \bigcup\limits_{j=0}^{k_i} X_j^i$, $\mu(X_0^i) < \varepsilon$, $\mathrm{dm}_{\rho_i}(X_j^i) < \varepsilon$ при $j = 1, \ldots, k_i$. Возьмем $Y_0 = X_0^1 \cup X_0^2$, $Y_{j_1, j_2} = X_{j_1}^1 \cap X_{j_2}^2$, где $j_1 = 1, \ldots, k_1$ и $j_2 = 1, \ldots, k_2$. Тогда $X = Y_0 \cup \bigcup\limits_{j_1=1}^{k_1} \bigcup\limits_{j_2=1}^{k_2} Y_{j_1, j_2}$, $\mu(Y_0) < 2\varepsilon$ и

$$\begin{aligned} \mathrm{essdm}_\rho(Y_{j_1, j_2}) &\leqslant \mathrm{dm}_{\rho_1}(Y_{j_1, j_2}) + \mathrm{dm}_{\rho_2}(Y_{j_1, j_2}) \\ &\leqslant \mathrm{dm}_{\rho_1}(X_{j_1}^1) + \mathrm{dm}_{\rho_2}(X_{j_2}^2) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 1, найдем множества $X_{j_1, j_2} \subset Y_{j_1, j_2}$, такие, что $\mu(Y_{j_1, j_2} \setminus X_{j_1, j_2}) = 0$, $\mathrm{dm}_\rho(X_{j_1, j_2}) < 4\varepsilon$. Пусть $X_0 = Y_0 \cup \bigcup\limits_{j_1=1}^{k_1} \bigcup\limits_{j_2=1}^{k_2} (Y_{j_1, j_2} \setminus X_{j_1, j_2})$. Тогда имеем $X = X_0 \cup \bigcup\limits_{j_1=1}^{k_1} \bigcup\limits_{j_2=1}^{k_2} X_{j_1, j_2}$, $\mu(X_0) < 2\varepsilon$ и $\mathrm{dm}_\rho(X_{j_1, j_2}) < 4\varepsilon$. По определению это означает, что

$$\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X, \mu, \rho) \leqslant \log(k_1 k_2) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_1) + \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_2). \qquad \square$$

Следующие леммы связывают энтропии измеримых разбиений с ε-энтропиями соответствующих полуметрик.

Лемма 4. *Для любого измеримого разбиения $\xi \in Z(X, \mu)$ стандартного вероятностного пространства (X, μ) и любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_\xi) \leqslant \frac{H(\xi)}{\varepsilon}, \tag{2}$$

где ρ_ξ – соответствующая разбиению ξ полуметрика.

Доказательство. Пусть $f(x) = -\log(\mu(\xi(x)))$, где $\xi(x)$ – элемент разбиения ξ, содержащий точку x. Тогда $H(\xi) = \int\limits_X f(x) d\mu(x)$. Рассмотрим множество $X_0 = \{x \in X \colon f(x) > \frac{H(\xi)}{\varepsilon}\}$. По неравенству Чебышева имеем $\mu(X_0) < \varepsilon$. Для любой точки $x \notin X_0$ выполнено неравенство $\mu(\xi(x)) \geqslant 2^{-\frac{H(\xi)}{\varepsilon}}$, поэтому количество k различных элементов

разбиения ξ, пересекающихся с $X \setminus X_0$, не превосходит $2^{\frac{H(\xi)}{\varepsilon}}$. Пусть это элементы $c_1, \ldots, c_k$. Возьмем $X_j = c_j \setminus X_0$ для $j = 1, \ldots, k$. Тогда, очевидно, $X = \bigcup\limits_{j=0}^{k} X_j$ и $\mathrm{dm}_{\rho_\xi}(X_j) = 0$ при $j = 1, \ldots, k$. По определению ε-энтропии имеем

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_\xi) \leqslant \log k \leqslant \frac{H(\xi)}{\varepsilon}. \qquad \square$$

Лемма 5. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, и пусть $\xi_i \in Z(X, \mu)$, $i = 1, \ldots, n$, – некоторые измеримые разбиения пространства (X, μ), каждое из которых состоит не более чем из m элементов. Пусть $\xi = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ – произведение этих разбиений, а $\rho = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{\xi_i}$ – усреднение соответствующих разбиениям полуметрик. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ имеет место оценка*

$$\frac{H(\xi)}{n} < \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)}{n} + 2\varepsilon \log m - \varepsilon \log \varepsilon - (1 - \varepsilon) \log(1 - \varepsilon) + \frac{1}{n}. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$ таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \log k$. Пусть $X_0, \ldots, X_k \subset X$ – непересекающиеся измеримые подмножества, такие, что $X = \bigcup\limits_{j=0}^{k} X_j$, $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\mathrm{dm}_\rho(X_j) < \varepsilon$ при $j = 1, \ldots, k$. Для каждого $j = 1, \ldots, k$ зафиксируем произвольную точку $x_j \in X_j$.

Зафиксируем произвольный индекс $j \in 1, \ldots, k$. Каждой точке $y \in X_j$ сопоставим множество $S(y) = \{i \in \{0, \ldots, n-1\} \colon \rho_{\xi_i}(x_j, y) > 0\}$. Тогда $|S(y)| \leqslant n\rho(x_j, y) < \varepsilon n$. Зафиксируем некоторое подмножество $S \subset \{0, \ldots, n-1\}$ и рассмотрим множество $\tilde{X}_S = \{y \in X_j \colon S(y) = S\}$. Тогда при $i \notin S$ множество $\tilde{X}_S$ содержится целиком в каком-то элементе разбиения ξ_i. Отсюда следует, что разбиение ξ индуцирует на множестве $\tilde{X}_S$ разбиение на не более чем $m^{|S|}$ частей. Перебирая всевозможные подмножества $S \subset \{0, \ldots, n-1\}$ мощности не более εn, получим, что разбиение ξ_n индуцирует на множестве X_j разбиение с количеством частей, не превышающим

$$
\begin{aligned}
m^{n\varepsilon}\sum_{\ell=0}^{\varepsilon n} C_n^\ell &\leqslant \frac{m^{n\varepsilon}}{\varepsilon^{\varepsilon n}(1-\varepsilon)^{n-\varepsilon n}}\sum_{\ell=0}^{\varepsilon n} C_n^\ell \varepsilon^\ell (1-\varepsilon)^{n-\ell} \\
&\leqslant \frac{m^{n\varepsilon}}{\varepsilon^{\varepsilon n}(1-\varepsilon)^{n-\varepsilon n}}\sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell \varepsilon^\ell (1-\varepsilon)^{n-\ell} = \frac{m^{n\varepsilon}}{\varepsilon^{\varepsilon n}(1-\varepsilon)^{n-\varepsilon n}} \\
&= 2^{n(\varepsilon\log m-\varepsilon\log\varepsilon-(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon))}.
\end{aligned}
$$

Применяя приведенное рассуждение для каждого $j \in 1,\dots,k$, получим, что количество N элементов разбиения ξ, пересекающихся с $X \setminus X_0$, не превосходит $k2^{n(\varepsilon\log m-\varepsilon\log\varepsilon-(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon))}$. Пусть это элементы $c_1, c_2, \dots c_N \in \xi$. Тогда в силу неравенства Йенсена для вогнутой функции $-s\log s$ имеем

$$
\sum_{i=1}^{N} -\mu(c_i)\log\mu(c_i) \leqslant -N\Big(\sum_{i=1}^{N}\mu(c_i)/N\Big)\log\Big(\sum_{i=1}^{N}\mu(c_i)/N\Big). \tag{4}
$$

Правая часть неравенства (4) при $N = 1$ не превосходит $\frac{1}{2}$, а при $N > 1$ оценивается через $\log N$. Итого, имеем

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} -\mu(c_i)\log\mu(c_i) &\leqslant \log N + \frac{1}{2} \\
&\leqslant \log k + n(\varepsilon\log m - \varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)) + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Количество N_0 элементов разбиения ξ, содержащихся в X_0, очевидно, не превосходит m^n. Применяя опять же неравенство Йенсена для вогнутой функции $-s\log s$, в силу монотонности последней на интервале $(0,\varepsilon)$ получаем оценку

$$
\sum_{c\in\xi, c\subset X_0} -\mu(c)\log\mu(c) \leqslant -N_0\frac{\varepsilon}{N_0}\log\frac{\varepsilon}{N_0} \leqslant \varepsilon n\log m + \frac{1}{2}. \tag{6}
$$

Суммируя оценки (5), (6), получаем

$$
H(\xi) < \log k + n(2\varepsilon\log m - \varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)) + 1,
$$

откуда в силу определения числа k следует утверждение леммы. $\square$

2.5. Пространство допустимых полуметрик. Определение и свойства m-нормы. В дальнейшем мы будем работать в основном с суммируемыми допустимыми полуметриками на фиксированном стандартном вероятностном пространстве (X, μ). Из леммы 3 очевидно, что суммируемые допустимые полуметрики образуют выпуклый конус в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$, обозначенный в работе [12] символом $\mathcal{A}\mathrm{dm}(X, \mu)$.

Для работы с допустимыми полуметриками в работе [12] введена специальная норма, названная m-нормой, и изучены ее свойства. Эта норма определена и конечна на конусе $\mathcal{A}\mathrm{dm}(X, \mu)$ и даже на некотором более широком подпространстве пространства $L^1(X^2, \mu^2)$.

Определение 9. *Для функции $f \in L^1(X^2, \mu^2)$ m-норма (конечная или бесконечная) определяется равенством*

$$\|f\|_m = \inf\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} : \rho - \textit{измеримая полуметрика на } (X, \mu), \\ \rho(x, y) \geqslant |f(x, y)| \textit{ для } \mu^2\textit{-п. в. } (x, y) \in X^2\}.$$

Легко проверить, что m-норма действительно является нормой в том смысле, что она однородна и удовлетворяет неравенству треугольника. При этом если f – измеримая полуметрика на (X, μ), то $\|f\|_m = \|f\|_{L^1(X^2,\mu^2)}$. Для любой функции $f \in L^1(X^2, \mu^2)$ выполнено неравенство $\|f\|_m \geqslant \|f\|_{L^1(X^2,\mu^2)}$, поэтому сходимость в m-норме влечет сходимость в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. Линейное подпространство пространства $L^1(X^2, \mu^2)$, состоящее из всех функций с конечной m-нормой, обозначим символом $\mathbb{M}$. В работе [12] доказаны следующие утверждения:

Теорема 4 (см. работу [12]). *Пространство $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$ является банаховым пространством, конус $\mathcal{A}\mathrm{dm}$ замкнут в $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$. На этом конусе нормы $\|\cdot\|_m$ и $\|\cdot\|_{L^1(X^2,\mu^2)}$ задают одинаковые топологии.*

Кроме того, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6 (см. работу [12]). *Суммируемая полуметрика ρ на пространстве (X, μ) аппроксимируется в m-норме своими срезками, то есть $\|\rho - \min(\rho, R)\|_m \to 0$ при $R \to +\infty$.*

§3. Масштабирующая энтропийная последовательность

3.1. Порождающие полуметрики. Пусть T – автоморфизм стандартного вероятностного пространства (X, μ). Пусть ρ – измеримая полуметрика на (X, μ). Сдвиги $T^k\rho(x, y) = \rho(T^k x, T^k y)$, очевидно, также являются измеримыми полуметриками на (X, μ), причем для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^k\rho).$$

Определим конечные усреднения полуметрики ρ под действием оператора T формулой $T^n_{\mathrm{av}}\rho = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k\rho$.

Наибольший интерес в контексте динамических систем представляют порождающие полуметрики.

Определение 10. *Измеримая на (X, μ) полуметрика ρ называется (двусторонней)* порождающей *для метрической динамической системы (X, μ, T), если ее сдвиги $T^k\rho, k \in \mathbb{Z}$, в совокупности разделяют точки с точностью до множества меры нуль, то есть существует некоторое множество $X' \subset X$ полной меры, такое, что для любых различных $x, y \in X'$ найдется $k \in \mathbb{Z}$, такое, что $T^k\rho(x, y) > 0$.*

Отметим, что измеримая метрика является порождающей для любого автоморфизма T, так как уже она сама разделяет точки.

Пусть $\rho \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$ – допустимая полуметрика. Для $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим борелевскую сигма-алгебру $\mathfrak{B}(T^n\rho)$ на X, порожденную полуметрикой $T^n\rho$. В соответствии с теоремой 2 такие сигма-алгебры являются подалгебрами сигма-алгебры $\mathfrak{A}(X, \mu)$ пространства (X, μ).

Лемма 7. *Если допустимая полуметрика $\rho \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$ является порождающей для динамической системы (X, μ, T), то минимальная сигма-алгебра, содержащая все сигма-алгебры $\mathfrak{B}(T^n\rho)$, $n \in \mathbb{Z}$, плотна в сигма-алгебре $\mathfrak{A}(X, \mu)$ пространства (X, μ).*

Доказательство. Во-первых, мы можем считать, что полуметрика ρ не превосходит 1 всюду. В противном случае можно рассматривать вместо нее срезку $\min(\rho, 1)$.

Для $n \in \mathbb{N}$ поточечно определим ограниченные функции

$$d_n = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \frac{1}{2^{|k|}} T^k\rho, \qquad d = \lim_n d_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|k|}} T^k\rho.$$

Отметим, что $d_n \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X),\mu)$, $\|d-d_n\|_m \to 0$, поэтому $d \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X),\mu)$ в силу теоремы 4. Из того, что полуметрика ρ является порождающей, следует, что d – допустимая метрика.

Для каждого $n \geqslant 0$ борелевская сигма-алгебра $\mathfrak{B}(d_n)$ на пространстве X, задаваемая полуметрикой d_n, совпадает с сигма-алгеброй, порожденной сигма-алгебрами $\mathfrak{B}(T^k\rho)$, $1-n \leqslant k \leqslant n-1$. Из построения метрики d очевидно, что ее борелевская сигма-алгебра $\mathfrak{B}(d)$ содержит все сигма-алгебры $\mathfrak{B}(d_n)$ и, более того, является их сигма-оболочкой. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 3, примененной к допустимой метрике d. □

3.2. Определение масштабирующей энтропийной последовательности и главная теорема. Напомним определение, предложенное А. М. Вершиком в работах [7–9, 17].

Определение 11. *Пусть (X,μ,T) – метрическая динамическая система, а ρ – допустимая полуметрика на (X,μ). Последовательность положительных чисел $\{h_n\}$ называется* масштабирующей *для полуметрики ρ, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_n} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho)}{h_n} < +\infty, \tag{7}$$

а при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$0 < \underline{\lim_n} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho)}{h_n}. \tag{8}$$

Класс всех масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ обозначим символом $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$.

Замечание 2. Если ρ – допустимая полуметрика,

$$h = \{h_n\} \in \mathcal{H}(X,\mu,T,\rho),$$

а $h' = \{h'_n\}$ – последовательность положительных чисел, то

$$h' \in \mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$$

тогда и только тогда, когда $0 < \underline{\lim} \frac{h'_n}{h_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{h'_n}{h_n} < \infty$.

Следующая теорема проясняет зависимость класса $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ масштабирующих последовательностей от полуметрики ρ.

Теорема 5. *Пусть $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$ – суммируемые допустимые порождающие полуметрики на (X, μ). Тогда*

$$\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho) = \mathcal{H}(X, \mu, T, \tilde{\rho}).$$

Лемма 8. *Если последовательность суммируемых допустимых полуметрик $\rho_k \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$ сходится к суммируемой допустимой полуметрике $\tilde{\rho} \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$ в m-норме, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших k для любого $n \geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} \tilde{\rho}) \leqslant \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} \rho_k).$$

Доказательство. Выберем k настолько большим, что $\|\rho_k - \tilde{\rho}\|_m < \varepsilon^2/32$. По определению m-нормы найдется измеримая полуметрика d на (X, μ), такая, что $\|d\|_{L^1(X^2, \mu^2)} < \varepsilon^2/32$ и $|\rho_k - \tilde{\rho}| \leqslant d$ почти всюду по мере μ^2. Для любого $n \geqslant 1$ имеем $T^n_{\mathrm{av}} \tilde{\rho} \leqslant T^n_{\mathrm{av}} \rho_k + T^n_{\mathrm{av}} d$ почти всюду по мере μ^2, при этом

$$\|T^n_{\mathrm{av}} d\|_{L^1(X^2, \mu^2)} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|T^j d\|_{L^1(X^2, \mu^2)} < \frac{\varepsilon^2}{32}.$$

Лемма 2 утверждает, что в этом случае $\mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} d) = 0$. Но тогда в силу выполненного почти всюду неравенства $T^n_{\mathrm{av}} \tilde{\rho} \leqslant T^n_{\mathrm{av}} \rho_k + T^n_{\mathrm{av}} d$ и леммы 3 очевидно, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} \tilde{\rho}) \leqslant \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} \rho_k) + \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} d) = \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} \rho_k).$$

□

Следующая лемма является ключевой в доказательстве теоремы 5.

Лемма 9. *Пусть $\rho \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$ – суммируемая допустимая полуметрика, порождающая для (X, μ, T). Тогда для любой суммируемой допустимой полуметрики $\tilde{\rho} \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $c_1, \varepsilon_1 > 0$, такие, что для любого $n \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} \tilde{\rho}) \leqslant c_1 \mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}} \rho). \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$ всех суммируемых допустимых полуметрик $\tilde{\rho}$ на (X, μ), для которых выполнено заключение леммы. Очевидно, $\rho \in \mathcal{M}_\rho$. В силу леммы 8 множество $\mathcal{M}_\rho$ замкнуто по m-норме в $\mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$, поэтому нам достаточно доказать его плотность в этом множестве.

Воспользовавшись леммой 3, несложно понять, что множество $\mathcal{M}_\rho$ является выпуклым конусом в $\mathcal{A}\mathrm{dm}((X), \mu)$. Множество $\mathcal{M}_\rho$ замкнуто

относительно перехода к мажорируемой полуметрике, то есть если $\rho_1 \in \mathcal{M}_\rho$ и $\rho_2 \leqslant \rho_1$ почти всюду по мере μ^2, то $\rho_2 \in \mathcal{M}_\rho$. Кроме того, оно инвариантно относительно действия преобразования T^k, $k \in \mathbb{Z}$, то есть если $\rho_1 \in \mathcal{M}_\rho$, то $T^k\rho_1 \in \mathcal{M}_\rho$, потому что

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}(T^k\rho_1)) &= \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^k(T^n_{\mathrm{av}}\rho_1))\\ &= \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho_1) \leqslant c_1\mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho).\end{aligned}$$

Отсюда следует, в частности, что $T^k(T^n_{\mathrm{av}}\rho) \in \mathcal{M}_\rho$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Каждой функции $f \in L^1(X,\mu)$ сопоставим суммируемую допустимую полуметрику $d[f]$ на X, задаваемую равенством $d[f](x,y) = |f(x) - f(y)|$. Отметим, что если $f, g \in L^1(X,\mu)$, то для любых $x, y \in X$ имеет место неравенство

$$|d[f](x,y) - d[g](x,y)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |f(y) - g(y)|,$$

при этом функция, стоящая в его правой части, является полуметрикой. Интегрируя это неравенство, мы получаем

$$\|d[f] - d[g]\|_m \leqslant 2\|f - g\|_{L^1(X,\mu)}. \tag{10}$$

Если для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ функция $f \in L^1(X,\mu)$ является липшицевой по полуметрике $T^k(T^n_{\mathrm{av}}\rho)$ с константой Липшица $l(f)$, то $d[f] \leqslant l(f)T^k(T^n_{\mathrm{av}}\rho)$, поэтому $d[f] \in \mathcal{M}_\rho$. Пусть $\mathfrak{B}_n$ – борелевская сигма-алгебра полуметрического пространства $(X, T^{-n}(T^{2n}_{\mathrm{av}}\rho))$. В соответствии с теоремой 2 она является подалгеброй сигма-алгебры $\mathfrak{A}(X,\mu)$ пространства (X,μ). Отметим, что липшицевы по полуметрике $T^{-n}(T^{2n}_{\mathrm{av}}\rho)$ функции плотны в $L^1(X,\mathfrak{B}_n,\mu)$. Таким образом, для любой функции $f \in L^1(X,\mathfrak{B}_n,\mu)$ в силу неравенства (10) и замкнутости множества $\mathcal{M}_\rho$ в m-норме имеем $d[f] \in \mathcal{M}_\rho$. Но полуметрика ρ порождающая, поэтому по лемме 7 сигма-алгебра на X, порожденная сигма-алгебрами $\mathfrak{B}_n$, $n \geqslant 1$, плотна в сигма-алгебре $\mathfrak{A}(X,\mu)$ пространства (X,μ). Отсюда следует, что объединение $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} L^1(X,\mathfrak{B}_n,\mu)$ плотно в $L^1(X,\mu)$. Еще раз воспользовавшись неравенством (10) и замкнутостью множества $\mathcal{M}_\rho$ в m-норме, получаем, что $d[f] \in \mathcal{M}_\rho$ для любой функции $f \in L^1(X,\mu)$. В частности, если $A \subset X$ – измеримое множество, то $d[\chi_A]$ – разрезная полуметрика, соответствующая разбиению пространства X на A и $X \setminus A$. Следовательно, в множестве $\mathcal{M}_\rho$ лежат все разрезные полуметрики и, более того, любые полуметрики, мажорируемые конечной суммой разрезных.

Из леммы 6 следует, что любая суммируемая допустимая полуметрика аппроксимируется в m-норме своими срезками, поэтому достаточно доказать, что любая ограниченная допустимая полуметрика лежит в $\mathcal{M}_\rho$. Покажем, что ограниченная допустимая полуметрика $\tilde\rho$ аппроксимируется в m-норме полуметриками, мажорируемыми конечными суммами разрезных. Пусть $M = \|\tilde\rho\|_{L^\infty(X^2,\mu^2)}$ – существенный супремум метрики $\tilde\rho$. Возьмем достаточно малое $\delta > 0$. Так как полуметрика $\tilde\rho$ допустима, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ мы можем найти измеримое разбиение $X = \bigsqcup\limits_{j=0}^{n} X_j$, такое, что $\mu(X_0) < \delta$ и $\mathrm{dm}_{\tilde\rho}(X_j) < \delta$ при $j > 0$. Для каждого $j \geqslant 0$ зафиксируем произвольную точку $a_j \in X_j$. Зададим полуметрику d_1 равенством $d_1(x,y) = \tilde\rho(a_i,a_j)$, где i,j таковы, что $x \in X_i$ и $y \in X_j$. Зададим полуметрику d_2 равенством $d_2(x,y) = 2\delta$, если $x,y \notin X_0$, и равенством $d_2(x,y) = M + 2\delta$ в противном случае. Легко проверить, что $|\tilde\rho(x,y) - d_1(x,y)| \leqslant d_2(x,y)$ для μ^2-почти всех $(x,y) \in X^2$, поэтому

$$\|\tilde\rho - d_1\|_m \leqslant \|d_2\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \leqslant 2\delta(1+M),$$

где правая часть может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора малого δ. При этом полуметрика d_1 мажорируется конечной суммой разрезных полуметрик, стало быть, $d_1 \in \mathcal{M}_\rho$. Следовательно, ограниченная полуметрика $\tilde\rho$ аппроксимируется в m-норме полуметриками из множества $\mathcal{M}_\rho$. Но множество $\mathcal{M}_\rho$ замкнуто в m-норме, стало быть, $\tilde\rho \in \mathcal{M}_\rho$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Достаточно показать, что множество $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ содержится в $\mathcal{H}(X,\mu,T,\tilde\rho)$. Возьмем произвольную последовательность $h = \{h_n\} \in \mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ и проверим, что h принадлежит классу $\mathcal{H}(X,\mu,T,\tilde\rho)$. Оценка сверху (7) для $\tilde\rho$ сразу следует из леммы 9. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $c_1, \varepsilon_1 > 0$, такие, что для любого n выполнено неравенство (9), поэтому

$$\varlimsup_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\tilde\rho)}{h_n} \leqslant c_1 \varlimsup_n \frac{\mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho)}{h_n} < +\infty.$$

Перейдем к доказательству оценки снизу (8) для полуметрики $\tilde\rho$. Выберем достаточно малое $\varepsilon_2 > 0$, такое, что неравенство (8) выполнено для ρ. Воспользуемся леммой 9, поменяв ролями полуметрики ρ и $\tilde\rho$, и найдем $c_1, \varepsilon_1 > 0$, такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_{\varepsilon_2}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho) \leqslant c_1 \mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\tilde\rho).$$

Тогда имеем

$$\varliminf_n \frac{\mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\tilde{\rho})}{h_n} \geqslant \frac{1}{c_1}\varliminf_n \frac{\mathbb{H}_{\varepsilon_2}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho)}{h_n} > 0.$$

Но если $\varepsilon < \varepsilon_1$, то $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\tilde{\rho}) \geqslant \mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\tilde{\rho})$, поэтому неравенство (8) для $\tilde{\rho}$ выполнено. Теорема доказана. □

Теорема 5 приводит к следующему определению.

Определение 12. *Последовательность $h = \{h_n\}$ положительных чисел называется* масштабирующей энтропийной последовательностью *метрической динамической системы (X,μ,T), если h принадлежит классу $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ для некоторой (а тогда и любой) суммируемой допустимой порождающей полуметрики $\rho \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X),\mu)$. Класс масштабирующих энтропийных последовательностей динамической системы (X,μ,T) обозначим $\mathcal{H}(X,\mu,T)$.*

Следствие 1. *Класс масштабирующих энтропийных последовательностей является метрическим инвариантом динамических систем.*

Из леммы 9 и определения 12 очевидно следствие.

Следствие 2. *Если последовательность $h = \{h_n\}$ является масштабирующей энтропийной последовательностью динамической системы (X,μ,T), а $\rho \in \mathcal{A}\mathrm{dm}((X),\mu)$ – суммируемая допустимая полуметрика, то для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho) = O(h_n)$ при $n \to +\infty$.*

В свою очередь, отсюда следует "монотонность" масштабирующей энтропийной последовательности:

Следствие 3. *Пусть динамическая система (X_2,μ_2,T_2) является фактором системы (X_1,μ_1,T_1), а $h^1 = \{h^1_n\}$, $h^2 = \{h^2_n\}$ – их масштабирующие энтропийные последовательности соответственно. Тогда $h^2_n = O(h^1_n)$ при $n \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть $T\colon (X_1,\mu_1) \to (X_2,\mu_2)$ – факторотображение. Возьмем любую суммируемую допустимую метрику

$$\rho_2 \in \mathcal{A}\mathrm{dm}(X_2,\mu_2)$$

и зададим полуметрику ρ_1 на (X_1,μ_1) формулой $\rho_1(x,y) = \rho_2(Tx,Ty)$. Ясно, что ρ_1 — допустимая полуметрика на (X_1,μ_1) и что для любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X_1,\mu_1,(T_1)^n_{\mathrm{av}}\rho_1) = \mathbb{H}_\varepsilon(X_2,\mu_2,(T_2)^n_{\mathrm{av}}\rho_2).$$

Отсюда в силу определений 12, 11 и следствия 2 имеем $h_n^2 = O(h_n^1)$ при $n \to +\infty$. $\square$

Однако открытым остается вопрос о том, для каких динамических систем масштабирующая энтропийная последовательность существует, то есть множество $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ не пусто.

§4. Примеры

В этом разделе мы приведем несколько примеров вычисления масштабирующей энтропийной последовательности.

4.1. Масштабирующая энтропийная последовательность динамической системы с чисто точечным спектром. В начале 30-х годов XX века в фундаментальных работах Дж. фон Неймана и Б. Купмана были предложены спектральные инварианты метрических динамических систем, основанные на спектральной теории унитарных операторов в гильбертовом пространстве. Автоморфизму T пространства с мерой (X, μ) каноническим образом ставится в соответствие унитарный оператор U_T гильбертова пространства $L^2(X, \mu)$, который каждой функции f сопоставляет функцию $U_T f$, заданную формулой $(U_T f)(x) = f(T(x))$. Спектральные характеристики (спектральная мера и функция кратности) оператора U_T приписываются динамической системе (X, μ, T).

Метрическая динамическая система (X, μ, T) имеет чисто точечный спектр, если собственные функции оператора U_T образуют полную систему в $L^2(X, \mu)$.

В работе [12] доказана следующая теорема, дающая характеризацию динамических систем с чисто точечным спектром в терминах масштабирующей энтропийной последовательности.

Теорема 6 (см. работу [12])**.** *Пусть T – автоморфизм пространства (X, μ). Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Спектр системы (X, μ, T) чисто точечный.*
2. *Множество $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ состоит из положительных ограниченных отделенных от нуля последовательностей.*

4.2. Сравнение с колмогоровской энтропией. В фундаментальной работе 1958 года [1] А. Н. Колмогоров определил простой числовой метрический инвариант динамических систем – энтропию. Напомним

необходимые определения для случая стандартного вероятностного пространства (X, μ) с непрерывной мерой.

Пусть (X, μ, T) – метрическая динамическая система. Сдвигом $T^{-1}\xi$ измеримого разбиения ξ называется измеримое разбиение, элементы которого суть полные прообразы элементов разбиения ξ под действием отображения T. Наиболее удобная форма определения энтропии динамических систем была предложена Я. Г. Синаем в работе 1959 года [3] (см. также обзор В. А. Рохлина [4]).

Определение 13. Энтропией *измеримого разбиения ξ под действием отображения T называется число*

$$h_\mu(T, \xi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee T^{-2}\xi \vee \dots \vee T^{-n+1}\xi).$$

Метрической (колмогоровской) энтропией *динамической системы (X, μ, T) называется точная верхняя грань этих чисел, взятая по всевозможным измеримым разбиениям с конечной энтропией*:

$$h_\mu(T) = \sup\{h_\mu(T, \xi) \colon \xi \in Z(X, \mu)\}. \tag{11}$$

Теорема Колмогорова–Синая (см. [3]) утверждает, что если разбиение ξ порождающее (то есть его сдвиги $T^n\xi, n \in \mathbb{Z}$, в совокупности порождают всю сигма-алгебру $\mathfrak{A}$ пространства (X, μ)), то энтропия вычисляется по формуле $h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi)$.

В этом пункте мы докажем теорему, связывающую масштабирующую энтропийную последовательность с колмогоровской энтропией.

Сначала отметим такое элементарное следствие лемм 4 и 5.

Следствие 4. *Пусть (X, μ, T) – метрическая динамическая система, $\xi \in Z(X, \mu)$ – измеримое разбиение с конечной энтропией, ρ_ξ — соответствующая полуметрика. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_n} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}}\rho_\xi)}{n} \leqslant \frac{h_\mu(T, \xi)}{\varepsilon}. \tag{12}$$

Если разбиение ξ состоит из $|\xi|$ элементов (с точностью до множества меры нуль), то

$$\underline{\lim_n} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}}\rho_\xi)}{n} \geqslant h_\mu(T, \xi) - (2\varepsilon \log|\xi| - \varepsilon \log\varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)). \tag{13}$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ применим лемму 4 к разбиению $\zeta_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi$, воспользуемся тривиальным неравенством $\rho_{\zeta_n} \geqslant T^n_{\mathrm{av}}\rho_\xi$ и получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{\mathrm{av}}\rho_\xi) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_{\zeta_n}) \leqslant \frac{H(\zeta_n)}{\varepsilon},$$

откуда моментально следует оценка (12).

Оценка (13) столь же элементарно следует из леммы 5, примененной к разбиениям $\xi_i = T^{-i}\xi$, $i \in \mathbb{N}$. □

Теорема 7. *Пусть T – апериодический автоморфизм пространства (X, μ).*

1. *Если колмогоровская энтропия $h_\mu(T)$ конечна и положительна, то последовательность $h_n = n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью системы (X, μ, T).*
2. *Если h_n – масштабирующая энтропийная последовательность системы (X, μ, T), то $h_\mu(T) = 0$ тогда и только тогда, когда $h_n = o(n)$ при $n \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть сначала $h_\mu(T) < +\infty$. Найдем разбиение $\zeta \in Z(X, \mu)$ с конечной энтропией, такое, что его сдвиги $T^n\zeta$, $n \in \mathbb{Z}$, порождают сигма-алгебру $\mathcal{A}(X, \mu)$ (доказательство существования такого разбиения см., например, в пункте 10 работы [4] В. А. Рохлина). В таком случае в силу теоремы Колмогорова–Синая $h_\mu(T) = h_\mu(T, \zeta)$. Ясно, что соответствующая этому разбиению полуметрика ρ_ζ является суммируемой допустимой порождающей.

Неравенство (7) для последовательности $h_n = n$ и полуметрики ρ_ζ следует из неравенства (12). Более того, если $h_\mu(T) = 0$ и h_n – масштабирующая энтропийная последовательность системы (X, μ, T), то $h_n = o(n)$ при $n \to +\infty$.

Если $h_\mu(T) > 0$, то, воспользовавшись непрерывностью функции $h_\mu(T, \cdot)$ по разбиению (см., например, пункт 8 работы [4] В. А. Рохлина), найдем конечное разбиение ξ, являющееся укрупнением разбиения ζ (что означает, что элементы разбиения ξ составлены из элементов разбиения ζ), такое, что $h_\mu(T, \xi) > 0$. Выбрав достаточно малое $\varepsilon > 0$, из неравенства (13) получим оценку (8) для последовательности $h_n = n$ и полуметрики ρ_ξ. Но по построению очевидно неравенство $\rho_\zeta \geqslant \rho_\xi$, поэтому при достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенство (8) выполнено для последовательности $h_n = n$ и полуметрики ρ_ζ. Так как полуметрика

ρ_ζ является суммируемой допустимой порождающей, по определению последовательность $h_n = n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью системы (X, μ, T).

Для окончательного доказательства пункта 2 теоремы нам осталось показать, что если h_n – масштабирующая последовательность и $h_n = o(n)$ при $n \to +\infty$, то $h_\mu(T) = 0$. В силу следствия 2 для любого конечного разбиения $\xi \in Z(X, \mu)$ левая часть неравенства (13) равна нулю. Устремив в нем ε к нулю, получим $h_\mu(T, \xi) = 0$. В силу произвольности ξ это означает, что $h_\mu(T) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Как показывает результат следующего пункта, обращение утверждения 1 теоремы 7 неверно.

4.3. Масштабирующая энтропийная последовательность сдвига Бернулли. Приведем вычисление масштабирующей энтропийной последовательности сдвига Бернулли. Пусть (A, ν) – стандартное вероятностное пространство (мера ν может иметь точечные нагрузки). Пусть $X = A^{\mathbb{Z}}$ – пространство двусторонних последовательностей, $\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$ – продакт-мера на X, а $T\colon X \to X$ – левый сдвиг.

Теорема 8. *Если мера ν не сосредоточена в одной точке, то последовательность $h_n = n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью сдвига Бернулли (X, μ, T).*

Если мера ν непрерывна, то энтропия пространства (A, ν) бесконечна. При этом в соответствии с теоремой Колмогорова (см. [1, 2]) энтропия $h_\mu(T)$ будет бесконечной. Таким образом, обращение утверждения 1 теоремы 7 неверно.

Доказательство теоремы 8. Выберем произвольное измеримое разбиение ζ пространства (A, ν) на два множества положительной меры. Пусть ρ_ζ – соответствующая разрезная полуметрика на (A, ν). Зададим измеримое разбиение ξ пространства (X, μ) на два множества и соответствующую ему разрезную полуметрику равенством $\rho_\xi(x, y) = \rho_\zeta(x_0, y_0)$. Зафиксируем некоторую допустимую метрику d на пространстве (A, ν), такую, что $\rho_\zeta \leqslant d \leqslant 1$. Зададим полуметрику ρ на X равенством $\rho(x, y) = d(x_0, y_0)$. Ясно, что полуметрика ρ допустимая, суммируемая и порождающая для (X, μ, T). Покажем, что последовательность $h_n = n$ является масштабирующей для полуметрики ρ.

Сначала докажем неравенство (8). Отметим, что по теореме Колмогорова $h_\mu(T, \xi) = H(\zeta) > 0$. Кроме того, $\rho \geqslant \rho_\xi$ по построению,

поэтому для достаточно малых $\varepsilon > 0$ в силу неравенства (13) имеем

$$\begin{aligned}\varliminf_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho)}{n} &\geqslant \varliminf_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho_\xi)}{n}\\ &\geqslant h_\mu(T,\xi) + \varepsilon\log\varepsilon + (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) > 0.\end{aligned}$$

Перейдем к доказательству оценки (7). Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись допустимостью метрики d на (A,ν), найдем $m \in \mathbb{N}$ и измеримые дизъюнктные подмножества $A_0,\dots,A_m \subset A$, такие, что $A = \bigcup\limits_{j=0}^{m} A_j$, $\nu(A_0) < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\mathrm{dm}_d(A_j) < \frac{\varepsilon}{4}$ при $j = 1,\dots,m$. Для $j = 0,\dots,m$ выберем и зафиксируем по одной точке $a_j \in A_j$, и пусть $\tilde{A} = \{a_j\}_{j=0}^m \subset A$. Зададим отображение $\pi\colon A \to \tilde{A}$ равенством $\pi(x) = a_j$ для $x \in A_j$ и продолжим его покоординатно до отображения из $X = A^{\mathbb{Z}}$ в $\tilde{X} = \tilde{A}^{\mathbb{Z}} \subset X$.

Рассмотрим последовательность случайных величин f_n, $n \geqslant 0$, на X, заданных равенствами $f_n(x) = 1$, если $x_n \in A_0$, и $f_n(x) = 0$ в противном случае. Отметим, что, так как мера $\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$ – продакт-мера на X, эти случайные величины независимы и одинаково распределены, причем $f_n = 1$ с вероятностью $\nu(A_0)$. Тогда математическое ожидание $\mathbb{E}[f_n]$ равно $\nu(A_0)$, а дисперсия $\mathbb{D}[f_n]$ равна $\nu(A_0)(1-\nu(A_0))$. Тогда по неравенству Чебышева для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем оценку

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{x \in X\colon \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) > \frac{\varepsilon}{2}n\right\}\right) &\leqslant \frac{\mathbb{D}\Big[\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k\Big]}{(\frac{\varepsilon}{2} - \mathbb{E}[f_n])^2 n^2}\\ &= \frac{\nu(A_0)(1-\nu(A_0))}{(\frac{\varepsilon}{2} - \nu(A_0))^2 n} < \frac{4}{\varepsilon n},\end{aligned} \tag{14}$$

что не превосходит ε при $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$. Отметим, что если для $x \in X$ выполнено неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}n$, то $\sum\limits_{k=0}^{n-1} d(x_k,\pi(x_k)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}n + \frac{\varepsilon}{4}n = \frac{3\varepsilon}{4}n$, поэтому $T^n_{\mathrm{av}}\rho(x,\pi(x)) \leqslant \frac{3\varepsilon}{4}$. Но на множестве $\pi(X) = \tilde{A}^{\mathbb{Z}}$ полуметрика $T^n_{\mathrm{av}}\rho$ различает не более чем $(m+1)^n$ точек. Таким образом, при $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$ имеем оценку

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho) \leqslant n\log(m+1),$$

откуда следует оценка (7). $\square$

4.4. Масштабирующая энтропийная последовательность подстановочной динамической системы. Продемонстрируем вычисление масштабирующей энтропийной последовательности подстановочной динамической системы постоянной длины. Приведем необходимые сведения из теории подстановочных динамических систем (подробности см., например, в монографии [18]). Стоит отметить, что схожие вопросы обсуждались в работе [10].

4.4.1. Подстановочные динамические системы. Пусть A – некоторое конечное множество. Мы будем называть его алфавитом, а его элементы буквами. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим набор A^n всевозможных слов длины n из букв алфавита A. Рассмотрим также множество $A^* = \bigsqcup\limits_{n \geqslant 0} A^n$ всевозможных конечных слов и множество бесконечных в одну сторону слов $A^{\mathbb{N}_0}$, где $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел. На множестве $A^{\mathbb{N}_0}$ стандартным образом задана топология произведения; пространство $A^{\mathbb{N}_0}$ с этой топологией является компактным. Для слова $w \in A^*$ обозначим его длину $|w|$, а символом w_j, $j = 0, \ldots, |w| - 1$, обозначим букву алфавита A, стоящую на j-м месте в слове w (нумерация мест при этом начинается с нуля). Аналогично, если $w \in A^{\mathbb{N}_0}$ – бесконечное слово и $j \geqslant 0$, то w_j – буква, стоящая на j-м месте. Если $0 \leqslant i \leqslant j < |w|$, то символом $w_{[i,j]}$ обозначается подслово слова w, образованное буквами, стоящими на местах от i до j. Слову $w \in A^*$ сопоставим множество слов $[w] = \{\tilde{w} \in A^{\mathbb{N}_0} \colon \tilde{w}_j = w_j, j < |w|\} \subset A^{\mathbb{N}_0}$, начинающихся с него.

Подстановкой на A называется отображение $\xi \colon A \to A^*$, сопоставляющее каждой букве некоторое конечное слово. Подстановка ξ называется подстановкой постоянной длины, если существует некоторое $q \in \mathbb{N}$, называемое длиной подстановки, такое, что $\xi \colon A \to A^q$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь подстановки ξ постоянной длины $q > 1$.

Образом $\xi(w)$ слова $w \in A^*$ называется слово длины $q|w|$, такое, что $\xi(w)_{[qj,q(j+1)-1]} = \xi(w_j)$ при $j = 0, \ldots, |w| - 1$. Аналогично определяется образ бесконечного слова при подстановке. Таким образом, подстановка ξ задает отображение из A^n в A^{qn} при каждом n и отображение из $A^{\mathbb{N}_0}$ в $A^{\mathbb{N}_0}$. Степень ξ^k подстановки ξ определяется как композиция отображений. Подстановка ξ называется инъективной, если она инъективна как отображение из A в A^*.

Подстановка $\zeta\colon B \to B^*$ на алфавите B называется фактором подстановки $\xi\colon A \to A^*$, если существует сюръективное отображение $\pi\colon A \to B$ (продолженное покоординатно до отображения из A^* в B^*), такое, что $\zeta(\pi(\alpha)) = \pi(\xi(\alpha))$ для любого $\alpha \in A$.

В дальнейшем мы будем считать, что для некоторого $\alpha_0 \in A$ выполнено соотношение $\xi(\alpha_0)_0 = \alpha_0$ (этого можно с легкостью добиться, возведя подстановку в степень). В этом случае для каждого $k \geqslant 0$ слово $\xi^k(\alpha_0)$ является началом слова $\xi^{k+1}(\alpha_0)$, поэтому можно определить бесконечное слово $u = u^\xi = \lim \xi^k(\alpha_0)$, инвариантное относительно подстановки ξ, т.е. удовлетворяющее равенству $\xi(u) = u$. Для $n \geqslant 1$ символом $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_n^\xi$ обозначим набор слов длины n, которые являются подсловами инвариантного слова u. Для каждой подстановки ξ существует некоторая константа $C > 0$, такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|\mathrm{V}_n^\xi| \leqslant Cn. \tag{15}$$

Пусть $T\colon A^{\mathbb{N}_0} \to A^{\mathbb{N}_0}$ – левый сдвиг. Подстановочной динамической системой, отвечающей подстановке ξ, называется пара (X_ξ, T), где $X_\xi = \mathrm{cl}\{T^n u\}$ – замыкание орбиты слова u под действием T в топологии пространства $A^{\mathbb{N}_0}$. Подстановка ξ называется примитивной, если существует некоторое $n \in \mathbb{N}$, такое, что для любых $\alpha, \beta \in A$ буква β встречается в слове $\xi^n(\alpha)$. В этом случае топологическая динамическая система (X_ξ, T) является минимальной, то есть в X_ξ не существует нетривиальных собственных T-инвариантных компактных подмножеств. Подстановка ξ называется периодической, если все элементы множества X_ξ являются периодическими относительно T, и апериодической в противном случае. В нашем случае периодичность подстановки ξ с периодом p равносильна периодичности инвариантного слова u^ξ с периодом p и тому, что $|X_\xi| = p$.

Если подстановка ξ примитивна, то на топологическом компакте X_ξ существует единственная T-инвариантная борелевская вероятностная мера μ^ξ. Значение этой единственной меры μ^ξ на цилиндре $[w] \subset A^{\mathbb{N}_0}$, $w \in A^*$, совпадает с частотой появления слова w в ξ-инвариантном слове u:

$$\mu^\xi([w]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \in \{0, \dots, n-1\}\colon u_{[k,k+|w|-1]} = w\}\right|. \tag{16}$$

Таким образом, примитивной подстановке канонически соответствует метрическая динамическая система (X_ξ, μ^ξ, T). Говоря про спектральные свойства подстановки, имеют в виду спектральные свойства

именно этой метрической динамической системы. Если подстановка ξ примитивна, то преобразование T на (X_ξ, μ^ξ) является автоморфизмом. Для любого $n \geqslant 1$ мера μ^ξ естественным образом задает меру μ_n^ξ на конечном множестве V_n равенством $\mu_n^\xi(w) = \mu^\xi([w])$, при этом для любого $w \in \mathrm{V}_n$ выполнено неравенство $\mu_n^\xi(w) > 0$.

Высота $h(\xi)$ подстановки ξ определяется как наибольшее натуральное k, взаимно простое с q, такое, что если $u_n = u_0$, то $k|n$. Для любого $m \geqslant 0$ число $h(\xi)$ есть наибольшее натуральное k, взаимно простое с q, такое, что если $u_{n+m} = u_m$, то $k|n$. Если подстановка ξ на алфавите A примитивная инъективная периодическая с периодом p, то $p = |A| = h(\xi)$ и числа p и q взаимно просты (см., например, лемму 5 работы [19]). Если подстановка ζ на некотором алфавите B является фактором подстановки ξ, то $h(\zeta)|h(\xi)$. Кроме того, существует периодическая подстановка ζ с периодом $h(\xi)$, являющаяся фактором подстановки ξ.

Важным свойством подстановки является распознаваемость. Для подстановок постоянной длины q оно означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется число $M \in \mathbb{N}$, такое, что если для некоторых $i, j \geqslant 0$ выполнено равенство $u_{[i,i+M]} = u_{[j,j+M]}$, то $q^n|(i-j)$. Инъективная примитивная апериодическая подстановка постоянной длины является распознаваемой (см., например, [20]).

Для подстановки ξ на алфавите A определяется "столбцовое число"

$$\mathrm{c}(\xi) = \min\{|\{\xi^k(\alpha)_i \colon \alpha \in A\}| \colon k \in \mathbb{N}, i < q^k\}.$$

Ясно, что $\mathrm{c}(\xi)$ не увеличивается при переходе к фактору. Если ζ – периодическая примитивная подстановка с периодом p на алфавите B, то $\mathrm{c}(\zeta) = |B| = p = h(\zeta)$. Так как у любой подстановки ξ существует инъективный периодический фактор ζ с периодом $p = h(\xi)$, имеем $\mathrm{c}(\xi) \geqslant h(\xi)$.

Для $w \in A^*$ и $k = 0, \ldots, q-1$ введем обозначение

$$P_k(w) = \xi(w)_{[k, q|w|-q+k]}.$$

Слова $P_0(w), \ldots, P_{q-1}(w)$ – все подслова длины $q|w| - q + 1$ слова $\xi(w)$. Формула (16), описание меры μ в терминах частоты появления слова в инвариантном слове u, позволяет написать очевидную оценку $\mu([P_k(w)]) \geqslant \frac{1}{q}\mu([w])$ для любого $k < q$.

Для конечного множества A введем обозначение ρ^A для метрики, заданной равенством $\rho^A(\alpha, \beta) = 1$ при $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$. Если ρ – некоторая полуметрика на множестве A, а n – натуральное число, то

символом ρ_n условимся обозначать соответствующую ей нормированную метрику Хемминга на A^n, заданную равенством

$$\rho_n(v,w) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(v_i,w_i), \quad v,w \in A^n.$$

4.4.2. Вычисление масштабирующей энтропийной последовательности подстановочной динамической системы. Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть ξ – инъективная примитивная подстановка постоянной длины на алфавите A, где $|A| > 1$. Тогда последовательность $h_n = 1 + (\mathrm{c}(\xi) - h(\xi))\log n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью динамической системы (X_ξ, μ^ξ, T).*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 9, сделаем одно замечание, которое является тривиальным следствием неравенства (15).

Замечание 3. Пусть $\xi\colon A \to A^q$ – некоторая подстановка, а ρ – некоторая полуметрика на алфавите A. Рассмотрим полуметрику $\tilde\rho$ на $A^{\mathbb{N}_0}$, заданную равенством $\tilde\rho(v,w) = \rho(v_0,w_0)$, и ее конечные усреднения $T^n_{\mathrm{av}}\tilde\rho$, $n \in \mathbb{N}$, под действием оператора сдвига T. Тогда существует $C > 0$, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X_\xi, \mu^\xi, T^n_{\mathrm{av}}\tilde\rho) \leqslant \log n + C.$$

Доказательство теоремы 9 существенно опирается на следующее понятие.

Определение 14. *Пусть $\zeta\colon B \to B^q$ – некоторая подстановка длины q. Полуметрику ρ на алфавите B мы будем называть ζ-инвариантной, если для любых $\alpha, \beta \in B$ выполнено равенство*

$$\rho(\alpha,\beta) = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\rho(\zeta(\alpha)_i, \zeta(\beta)_i).$$

Лемма 10. *Пусть $\zeta\colon B \to B^q$ – апериодическая инъективная примитивная подстановка. Пусть ρ – ζ-инвариантная метрика на B, а ρ_n – соответствующая ей метрика на B^n. Тогда найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $n > n_0$ в метрическом пространстве $(\mathrm{V}^\zeta_{q^n+1}, \rho_{q^n+1})$ найдется хотя бы $2q^{n-n_0}$ элементов v^i, таких, что $\mu^\zeta_{q^n+1}(v^i) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{q^{n-n_0}}$ и $\rho_{q^n+1}(v^i, v^j) \geqslant \varepsilon_0$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Заменив, если потребуется, метрику ρ на пропорциональную, мы можем считать, что

$$\max\{\rho(\alpha,\beta)\colon \alpha,\beta\in B\}=1.$$

Пусть

$$\delta_1=\min\{\rho(\alpha,\beta)\colon \alpha,\beta\in B,\alpha\neq\beta\}.$$

Рассмотрим метрики $d_n=n\rho_n$ на V_n. Из ζ-инвариантности метрики ρ следует, что для любых $v^1,v^2\in B^n$ выполнено равенство

$$d_{qn}(\zeta(v^1),\zeta(v^2))=qd_n(v^1,v^2). \tag{17}$$

Подстановка ζ – апериодическая инъективная примитивная, поэтому она распознаваема. Пусть $M\in\mathbb{N}$ таково, что если $u^\zeta_{[i,i+M-1]}=u^\zeta_{[j,j+M-1]}$, то $q|(i-j)$. Пусть n достаточно большое, $v^1,v^2\in\mathrm{V}_{q^n+1}$ и $k_1,k_2<q$, $k_1\neq k_2$. В таком случае слова $P_{k_1}(v^1)$ и $P_{k_2}(v^2)$ встречаются в инвариантном слове u^ζ в местах, различающихся по модулю q, поэтому в силу распознаваемости для любого $i\leqslant q^{n+1}+1-M$ слова $P_{k_1}(v^1)_{[i,i+M-1]}$ и $P_{k_2}(v^2)_{[i,i+M-1]}$ различны. Таким образом, мы имеем оценку

$$d_{q^{n+1}+1}(P_{k_1}(v^1),P_{k_2}(v^2))\geqslant\frac{q^{n+1}+1-M}{M}\delta_1>\frac{q^{n+1}}{2M}\delta_1 \tag{18}$$

при $q^{n+1}>2M$. Если $v^1\neq v^2$ и $k<q$, то в силу (17) имеем

$$\begin{aligned}d_{q^{n+1}+1}(P_k(v^1),P_k(v^2))&\geqslant d_{q^{n+1}+q}(\zeta(v^1),\zeta(v^2))-(q-1)\\&=qd_{q^n+1}(v^1,v^2)-(q-1).\end{aligned} \tag{19}$$

Найдем $\alpha,\beta\in B$, такие, что $\rho(\alpha,\beta)=1$. Возьмем n_0, такое, что

$$q^{n_0}>2M\left(q+\frac{1}{\delta_1}\right). \tag{20}$$

Найдем два слова $\tilde w^1,\tilde w^2\in\mathrm{V}_{q^{n_0-1}+1}$, такие, что $\tilde w^1_0=\alpha$, $\tilde w^2_0=\beta$. Тогда слова $w^1=P_0(\tilde w^1)$ и $w^2=P_0(\tilde w^2)$ начинаются со слов $\zeta(\alpha)$ и $\zeta(\beta)$ соответственно. Следовательно, $d_{q^{n_0}+1}(w^1,w^2)\geqslant d_q(\zeta(\alpha),\zeta(\beta))=q$. Возьмем $\delta_2=\min(\mu([w^1]),\mu([w^2]))>0$. Зададим последовательность чисел

$$c_n=\delta_1(q-1)q^{n-n_0}+1. \tag{21}$$

По индукции по n докажем, что при $n \geqslant n_0$ в множестве V_{q^n+1} найдется подмножество G_n, состоящее из $2q^{n-n_0}$ слов, таких, что если $v^1, v^2 \in G_n$, то $\mu([v^1]) \geqslant \frac{\delta_2}{q^{n-n_0}}$, и при $v^1 \neq v^2$ выполнено неравенство $d_{q^n+1}(v^1, v^2) \geqslant c_n$. Базу индукции, утверждение для $n = n_0$, дают построенные нами слова $w^1, w^2 \in \mathrm{V}_{q^{n_0}+1}$, $G_{n_0} = \{w^1, w^2\}$. Переход осуществляется следующим образом. Пусть утверждение выполнено для n и G_n – множество с указанными свойствами. Положим $G_{n+1} = \{P_k(v)\colon v \in G_n, k < q\}$. Ясно, что $|G_{n+1}| = 2q^{n-n_0}$, $\mu([P_k(v)]) \geqslant \mu([v])/q \geqslant \frac{\delta_2}{q^{n+1-n_0}}$ для любого $v \in G_n$ и любого $k < q$. Осталось проверить, что для любых $v^1, v^2 \in G_n$, $k_1, k_2 < q$ если $(v^1, k_1) \neq (v^2, k_2)$, то $d_{q^{n+1}+1}(P_{k_1}(v^1), P_{k_2}(v^2)) \geqslant c_{n+1}$. В случае $k_1 \neq k_2$ это неравенство следует из неравенств (18), (20) и равенства (21), а в случае $k_1 = k_2$ и $v^1 \neq v^2$ оно следует из неравенства (19), предположения индукции и рекуррентного соотношения $c_{n+1} = qc_n - (q-1)$.

Последовательность чисел $\{\frac{c_n}{q^n+1}\}_{n \geqslant n_0}$ отделена от нуля, поэтому можно найти $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $\varepsilon_0 < \frac{c_n}{q^n+1}$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon_0 < \delta_2$. Лемма доказана. □

Следствие 5. *Если для апериодической инъективной примитивной подстановки $\zeta\colon B \to B^q$ существует ζ-инвариантная метрика ρ на B, то последовательность $h_n = \log n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью динамической системы (X_ζ, μ^ζ, T).*

Доказательство. Воспользуемся леммой 10 и найдем соответствующие n_0 и $\varepsilon_0 > 0$. Ясно, что в таком случае при $n \geqslant n_0$ имеем

$$\mathbb{H}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\mathrm{V}^\zeta_{q^n+1}, \mu^\zeta_{q^n+1}, \rho_{q^n+1}) \geqslant (n - n_0)\log q.$$

С помощью метрики ρ на алфавите B зададим порождающую полуметрику $\tilde\rho$ на $B^{\mathbb{N}_0}$ формулой $\tilde\rho(v, w) = \rho(v_0, w_0)$. Тогда, очевидно, для любого $n \geqslant n_0$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$ имеем

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X^\zeta, \mu^\zeta, T^{q^n+1}_{\mathrm{av}}\tilde\rho) = \mathbb{H}_\varepsilon(\mathrm{V}^\zeta_{q^n+1}, \mu^\zeta_{q^n+1}, \rho_{q^n+1}) \geqslant (n - n_0)\log q.$$

Для каждого большого m найдем наибольшее n, такое, что $m \geqslant q^n + 1$. Тогда $\frac{q^n+1}{m} > \frac{1}{q}$, поэтому $T^m_{\mathrm{av}}\tilde\rho \geqslant \frac{q^n+1}{m} T^{q^n+1}_{\mathrm{av}}\tilde\rho \geqslant \frac{1}{q} T^{q^n+1}_{\mathrm{av}}\tilde\rho$, откуда для $\varepsilon \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2q})$ следует оценка

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\varepsilon(X^\zeta, \mu^\zeta, T^m_{\mathrm{av}}\tilde\rho) &\geqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X^\zeta, \mu^\zeta, \frac{1}{q} T^{q^n+1}_{\mathrm{av}}\tilde\rho)\\ &\geqslant \mathbb{H}_{q\varepsilon}(X^\zeta, \mu^\zeta, T^{q^n+1}_{\mathrm{av}}\tilde\rho) \geqslant (n - n_0)\log q \geqslant C\log m,\end{aligned}$$

доказывающая неравенство (8). Оценка (7) уже обсуждалась в замечании 3. Стало быть, $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\zeta, \mu^\zeta, T, \tilde{\rho})$. Полуметрика $\tilde{\rho}$ является суммируемой порождающей допустимой, стало быть,

$$\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\zeta, \mu^\zeta, T). \qquad \square$$

Оказывается, найти ξ-инвариантную метрику на алфавите A удается не всегда. Простейший пример ξ-инвариантной полуметрики на A можно построить при помощи поднятия. Найдем периодическую подстановку ζ на некотором алфавите B, являющуюся фактором подстановки ξ при некотором отображении π. На алфавите B возьмем произвольную ζ-инвариантную метрику ρ (например, ρ^B) и определим ξ-инвариантную полуметрику $\pi^{-1}[\rho]$ на A формулой $\pi^{-1}[\rho](\alpha, \beta) = \rho(\pi(\alpha), \pi(\beta))$. Построенные таким способом ξ-инвариантные полуметрики будем называть поднятыми. Они в некотором смысле тривиальны. Например, в случае $h(\xi) = 1$ все поднятые полуметрики тождественно равны нулю.

Приведем конструкцию, дающую не столь тривиальный, и в некотором смысле главный пример ξ-инвариантной полуметрики на A.

Определение 15. *Назовем две буквы $\alpha, \beta \in A$ существенно различными (относительно подстановки ξ), если для любого $k \in \mathbb{N}$ и $i \leqslant q^k - 1$ символы $\xi^k(\alpha)_i$ и $\xi^k(\beta)_i$ различны.*

Лемма 11. *Найдутся попарно существенно различные символы $\alpha^1, \ldots, \alpha^{\mathrm{c}(\xi)} \in A$.*

Доказательство. Выберем $k \in \mathbb{N}$ и $i < q^k$ так, что $\mathrm{c}(\xi) = |\{\xi^k(\alpha)_i \colon \alpha \in A\}|$. Пусть $\{\xi^k(\alpha)_i \colon \alpha \in A\} = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^{\mathrm{c}(\xi)}\}$. Покажем, что все эти буквы попарно существенно различны. Действительно, для любого $\alpha \in A$ найдется $j \leqslant \mathrm{c}(\xi)$, такое, что $\xi^k(\alpha)_i = \alpha^j$, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $m < q^n$ имеем $\xi^{k+n}(\alpha)_{iq^n+m} = \xi^n(\alpha^j)_m$. Таким образом, количество различных символов вида $\xi^{k+n}(\alpha)_{iq^n+m}, \alpha \in A$, не превосходит $\mathrm{c}(\xi)$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $m < q^n$. С другой стороны, их количество не может быть меньше $\mathrm{c}(\xi)$ в силу определения $\mathrm{c}(\xi)$. Следовательно, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $m < q^n$ все символы $\xi^n(\alpha^j)_m, j \leqslant \mathrm{c}(\xi)$, попарно различны. Это по определению означает, что буквы $\alpha^j, j \leqslant \mathrm{c}(\xi)$, попарно существенно различны. Лемма доказана. $\square$

Из определения ясно, что если буквы α и β существенно различны, то для любого $k \in \mathbb{N}$ и $i < q^k$ буквы $\xi^k(\alpha)_i$ и $\xi^k(\beta)_i$ также существенно различны.

Определим последовательность полуметрик r_n на A следующим образом. Возьмем $\mathrm{r}_0 = \rho^A$, а последующие полуметрики определим рекуррентным соотношением

$$\mathrm{r}_{n+1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \mathrm{r}_n(\xi(\alpha)_i, \xi(\beta)_i). \tag{22}$$

По индукции по n очевидно, что а) $\mathrm{r}_n \leqslant 1$; б) $\mathrm{r}_{n+1} \leqslant \mathrm{r}_n$; в) если $\alpha, \beta \in A$ существенно различны, то $\mathrm{r}_n(\alpha, \beta) = 1$. В силу монотонности и неотрицательности существует предел $\rho^\xi = \lim \mathrm{r}_n$, который, очевидно, является полуметрикой на A.

Определение 16. *Построенная полуметрика ρ^ξ на алфавите A называется главной ξ-инвариантной полуметрикой.*

Замечание 4. Полуметрика ρ^ξ является ξ-инвариантной, $\rho^\xi(\alpha, \beta) = 1$ для существенно различных $\alpha, \beta \in A$. Кроме того, если ρ – ξ-инвариантная полуметрика на A, то найдется $C > 0$, такое, что $\rho \leqslant C\rho^\xi$.

Доказательство. Первые два утверждения очевидны из определения полуметрики ρ^ξ. Докажем последнее. Возьмем $C = \max \rho$. Тогда по индукции по n легко показать, что $\rho \leqslant C\mathrm{r}_n$. Переходя к пределу, получаем требуемое. □

Доказательство теоремы 9. Возьмем метрику $\rho = \rho^A$ на A, соответствующие метрики ρ_n на A^n, а также соответствующую ей порождающую суммируемую допустимую полуметрику $\tilde{\rho}$ на $A^{\mathbb{N}_0}$, заданную равенством $\tilde{\rho}(v, w) = \rho(v_0, w_0)$.

Сначала разберем случай, когда $\mathrm{c}(\xi) > h(\xi)$. Пусть ρ^ξ – главная ξ-инвариантная полуметрика на A, а $\tilde{\rho}^\xi$ – полуметрика на $A^{\mathbb{N}_0}$, определенная равенством $\tilde{\rho}^\xi(v, w) = \rho^\xi(v_0, w_0)$. Покажем, что

$$\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T, \tilde{\rho}^\xi).$$

Полуметрика ρ^ξ естественным образом задает отношение эквивалентности на A (буквы $\alpha, \beta \in A$ эквивалентны, если $\rho^\xi(\alpha, \beta) = 0$). Пусть $\pi\colon A \to B$ — факторотображение, а d — факторметрика на B. В силу ξ-инвариантности полуметрики ρ^ξ равенство $\zeta(\pi(\alpha)) = \pi(\xi(\alpha))$ корректно определяет подстановку ζ на алфавите B. Подстановка ζ

– подстановка длины q, факторподстановка подстановки ξ – наследует от подстановки ξ примитивность. Метрика d на B является ζ-инвариантной, откуда следует инъективность подстановки ζ. Единственная T-инвариантная мера μ^ζ на компактном топологическом пространстве $X_\zeta \subset B^{\mathbb{N}_0}$ является образом меры μ^ξ при отображении π, а ζ-инвариантное слово u^ζ есть образ ξ-инвариантного слова u^ξ.

Заметим, что если $\alpha, \beta \in A$ – существенно различные буквы (относительно ξ), то $d(\pi(\alpha), \pi(\beta)) = \rho^\xi(\alpha, \beta) = 1$ в соответствии с замечанием 4. Но по лемме 11 в алфавите A можно найти как минимум $\mathrm{c}(\xi)$ попарно существенно различных букв, поэтому $|B| \geqslant \mathrm{c}(\xi) > h(\xi) \geqslant h(\zeta)$. Отсюда следует, что подстановка ζ апериодическая. Пусть $\tilde{d}$ – порождающая допустимая суммируемая полуметрика на $B^{\mathbb{N}_0}$, определенная равенством $\tilde{d}(v, w) = d(v_0, w_0)$. Подстановка ζ с ζ-инвариантной метрикой d на алфавите B удовлетворяет условиям следствия 5, поэтому $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\zeta, \mu^\zeta, T, \tilde{d})$. Но по построению для любого $\varepsilon > 0$ и любого n имеем

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X^\xi, \mu^\xi, T^n_{\mathrm{av}} \tilde{\rho}^\xi) = \mathbb{H}_\varepsilon(X^\zeta, \mu^\zeta, T^n_{\mathrm{av}} \tilde{d}),$$

поэтому $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T, \tilde{\rho}^\xi)$.

Отметим, что полуметрика $\tilde{\rho}^\xi$ на $A^{\mathbb{N}_0}$ может быть, вообще говоря, не порождающей. Но имеет место неравенство $\tilde{\rho}^\xi \leqslant \tilde{\rho}$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X^\xi, \mu^\xi, T^n_{\mathrm{av}} \tilde{\rho}) \geqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X^\xi, \mu^\xi, T^n_{\mathrm{av}} \tilde{\rho}^\xi),$$

откуда следует оценка (8) для полуметрики $\tilde{\rho}$ и последовательности h_n. Оценка (7) следует из замечания 3. Таким образом,

$$\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T, \tilde{\rho}) = \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T).$$

Разберем теперь оставшийся случай, когда $\mathrm{c}(\xi) = h(\xi)$. В этом случае $h_n = 1$ для любого n. Покажем, что $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T, \tilde{\rho})$. Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ и $i_0 < q^{k_0}$ так, что $\mathrm{c}(\xi) = |\{\xi^{k_0}(\alpha)_{i_0} : \alpha \in A\}|$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $k_0 = 1$ (если это не так, заменим подстановку ξ на ξ^{k_0}).

Пусть $\zeta\colon B \to B^q$ – инъективная периодическая подстановка, являющаяся фактором подстановки ξ, такая, что $h(\zeta) = h(\xi)$, а $\pi\colon A \to B$ – соответствующая проекция. Отметим, что если $\alpha, \beta \in A$ таковы, что $\pi(\alpha) \neq \pi(\beta)$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ и $i < q^k$ имеем $\pi(\xi^k(\alpha)_i) = \zeta^k(\pi(\alpha))_i \neq \zeta^k(\pi(\beta))_i = \pi(\xi^k(\beta)_i)$, поэтому $\xi^k(\alpha)_i \neq \xi^k(\beta)_i$, то есть α и β существенно различны. С другой стороны, $|\{\pi(\alpha)\colon \alpha \in A\}| = |B| =$

$h(\zeta) = h(\xi) = \mathrm{c}(\xi) = |\{\xi(\alpha)_{i_0} : \alpha \in A\}|$, поэтому для $\alpha, \beta \in A$ равенство $\xi(\alpha)_{i_0} = \xi(\beta)_{i_0}$ выполнено тогда и только тогда, когда $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$.

Пусть $d = \max\{\rho^\xi(\alpha,\beta) \colon \alpha, \beta \in A, \pi(\alpha) = \pi(\beta)\}$. Пусть $\alpha, \beta \in A$ таковы, что $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда для любого $i < q$ выполнено равенство $\pi(\xi(\alpha)_i) = \pi(\xi(\beta)_i)$, поэтому $\rho^\xi(\xi(\alpha)_i, \xi(\beta)_i) \leqslant d$. Кроме того, $\rho^\xi(\xi(\alpha)_{i_0}, \xi(\beta)_{i_0}) = 0$. Воспользовавшись ξ-инвариантностью полуметрики ρ^ξ, получаем

$$\rho^\xi(\alpha,\beta) = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} \rho^\xi(\xi(\alpha)_i, \xi(\beta)_i) = \frac{1}{q}\sum_{i<q, i\neq i_0} \rho^\xi(\xi(\alpha)_i, \xi(\beta)_i) \leqslant \frac{q-1}{q} d.$$

Переходя к супремуму по всем $\alpha, \beta \in A$, таким, что $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$, получаем неравенство $d \leqslant \frac{q-1}{q} d$, откуда следует, что $d = 0$.

Итого, если $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$, то $\rho^\xi(\alpha,\beta) = 0$, а если $\pi(\alpha) \neq \pi(\beta)$, то α и β существенно различны, поэтому $\rho^\xi(\alpha,\beta) = 1$ по замечанию 4. Таким образом, полуметрика ρ^ξ является поднятой с алфавита B при помощи отображения π, т.е. $\rho^\xi = \pi^{-1}[\rho^B]$. Напомним, что для $n \in \mathbb{N}$ символом ρ^ξ_n обозначена соответствующая полуметрика на A^n, а символом ρ^B_n – соответствующая полуметрика на B^n. Тогда $\rho^\xi_n(v,w) = \rho^B_n(\pi(v), \pi(w))$.

Вспомним, что полуметрика ρ^ξ является пределом последовательности полуметрик r_n, задаваемых равенством $\mathrm{r}_0 = \rho$ и рекуррентной формулой (22), из которой следует явное представление

$$\mathrm{r}_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{q^n}\sum_{i=0}^{q^n-1} \rho(\xi^n(\alpha)_i, \xi^n(\beta)_i) = \rho_{q^n}(\xi^n(\alpha), \xi^n(\beta)).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем n_0 настолько большим, что $\mathrm{r}_{n_0} < \rho^\xi + \varepsilon/2$. Зафиксируем любое отображение $\hat\pi \colon B^* \to A^*$, такое, что $\pi(\hat\pi(\cdot))$ тождественно на B^*. Покажем, что для $n > 0$ множество $N_n = \{\xi^{n_0}(\hat\pi(\hat v))_{[k,k+q^{n+n_0}]} \colon \hat v \in \mathrm{V}^B_{q^n+1}, k < q^{n_0}\}$ образует ε-сеть в метрическом пространстве $(\mathrm{V}^A_{q^{n+n_0}+1}, \rho_{q^{n+n_0}+1})$.

Если $w \in \mathrm{V}^A_{q^{n+n_0}+1}$, то найдутся $v \in \mathrm{V}^A_{q^n+1}$ и $k < q^{n_0}$, такие, что $w = \xi^{n_0}(v)_{[k,k+q^{n+n_0}]}$. Возьмем $\hat v = \pi(v)$, $v^1 = \hat\pi(\hat v), w^1 = \xi^{n_0}(v^1)_{[k,k+q^{n+n_0}]}$. Тогда имеем

$$\rho_{q^{n+n_0}+1}(w^1, w) = \frac{1}{q^{n+n_0}+1}\sum_{i=0}^{q^{n+n_0}} \rho(w^1_i, w_i)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{q^{n+n_0}+1} \sum_{i=0}^{q^{n_0}(1+q^n)-1} \rho(\xi^{n_0}(v^1)_i, \xi^{n_0}(v)_i) \\
&= \frac{q^{n_0}}{q^{n+n_0}+1} \sum_{i=0}^{q^n} \mathrm{r}_{n_0}(v_i^1, v_i) \\
&< \frac{q^{n_0}}{q^{n+n_0}+1} \sum_{i=0}^{q^n} \rho^{\xi}(v_i^1, v_i) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{q^{n_0}(q^n+1)}{q^{n+n_0}+1} \\
&= \frac{q^{n_0}(q^n+1)}{q^{n+n_0}+1} \left(\rho^{\xi}_{q^n+1}(v^1, v) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&= \frac{q^{n_0}(q^n+1)}{q^{n+n_0}+1} \left(\rho^{B}_{q^n+1}(\pi(v^1), \pi(v)) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&= \frac{q^{n_0}(q^n+1)}{q^{n+n_0}+1} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Осталось лишь заметить, что $|\mathrm{V}^B_{q^n+1}| = |B|$, поэтому

$$
\mathbb{H}_\varepsilon(\mathrm{V}^A_{q^{n+n_0}+1}, \mu^{\xi}_{q^{n+n_0}+1}, \rho_{q^{n+n_0}+1}) \leqslant \log(|N_n|) \leqslant \log(|B| q^{n_0}).
$$

Для каждого большого m найдем наименьшее n, такое, что $m < q^{n+n_0}+1$. Тогда $q^{n+n_0}+1 < mq$, поэтому выполнено неравенство $mT^m_{\mathrm{av}}\tilde{\rho} \leqslant (q^{n+n_0}+1)T^{q^{n+n_0}+1}_{\mathrm{av}}\tilde{\rho} < qmT^{q^{n+n_0}+1}_{\mathrm{av}}\tilde{\rho}$, откуда следует оценка (7):

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{H}_{q\varepsilon}(X^{\xi}, \mu^{\xi}, T^m_{\mathrm{av}}\tilde{\rho}) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X^{\xi}, \mu^{\xi}, T^{q^{n+n_0}+1}_{\mathrm{av}}\tilde{\rho}) \\
=&\mathbb{H}_\varepsilon(\mathrm{V}^A_{q^{n+n_0}+1}, \mu^{\xi}_{q^{n+n_0}+1}, \rho_{q^{n+n_0}+1}) \leqslant \log(|B| q^{n_0}).
\end{aligned}
$$

Значит, в этом случае также имеем

$$
\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi, \mu^{\xi}, T, \tilde{\rho}) = \mathcal{H}(X_\xi, \mu^{\xi}, T). \qquad \square
$$

Из теорем 9 и 6 получаем следствие.

Следствие 6. *Пусть ξ – инъективная примитивная подстановка постоянной длины на алфавите A, где $|A| > 1$. Тогда спектр соответствующей ей динамической системы (X_ξ, μ^{ξ}, T) чисто точечный тогда и только тогда, когда $c(\xi) = h(\xi)$.*

Отметим, что похожий критерий впервые был получен в работах Т. Камае (см. [19]) и Ф. М. Деккинга (см. [21]), однако там он сформулирован несколько иначе. Отличие заключается в том, что для подстановок, высота которых больше единицы, параметр $\mathrm{c}(\xi)$ определяется не так, как у нас, а путем рассмотрения некоторой модифицированной подстановки. Для случая $h(\xi) = 1$ результат следствия 6 совпадает с критерием из указанных работ: спектр чисто точечный тогда и только тогда, когда $\mathrm{c}(\xi) = 1$. Однако для случая $h(\xi) > 1$ критерий 6, в отличие от критерия упомянутых авторов, не требует перехода к модифицированной подстановке.

Благодарности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Федору Владимировичу Петрову и Анатолию Моисеевичу Вершику за постановку задач, помощь и внимание к работе, многочисленные полезные советы и обсуждения.

Литература

1. А. Н. Колмогоров, *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега.* — ДАН СССР **119** (1958), 861–864.
2. А. Н. Колмогоров, *Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов.* — ДАН СССР **124** (1959), 754–755.
3. Я. Г. Синай, *О понятии энтропии динамической системы.* — ДАН СССР **124** (1959), 768–771.
4. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* — УМН **22**, вып. 5 (137) (1967), 3–56.
5. S. D. Ornstein, *Ergodic Theory, Randomness, and Dynamical Systems.* Yale University Press, New Haven–London, 1974.
6. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория.* М.: Наука, 1980.
7. А. М. Вершик, *Информация, энтропия, динамика.* В сб.: Математика XX века. Взгляд из Петербурга. М.: МЦНМО, 2010.
8. A. M. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants.* — Markov Process. Related Fields **16**, No. 1 (2010), 169–184.
9. А. М. Вершик, *Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром.* — Алгебра и анализ **23**, вып. 1 (2011), 111–135.
10. S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems.* — Israel J. Math. **100** (1997), 189–207.
11. A. Katok, J.-P. Thouvenot, *Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **33**, No. 3 (1997), 323–338.

12. A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov, *Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces.* — Cent. Eur. J. Math. **11**, No. 3 (2013), 379–400.
13. П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *Об исправлении метрик.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **390** (2011), 201–209.
14. А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *Виртуальная непрерывность функций многих переменных и её приложения.* — Успехи мат. наук (в печати).
15. П. Б. Затицкий, *О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы.* — Функц. анал. и его прил. **48**, вып. 4 (2014), 70–74.
16. В. А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры.* — Мат. сб. **25**, вып. 67 (1949), 107–150.
17. А. М. Вершик, А. Д. Горбульский, *Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр.* — Теор. вероятн. и ее примен. **52**, вып. 3 (2007), 446–467.
18. M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems. Spectral Analysis*, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
19. K. Teturo, *A topological invariant of substitution minimal sets.* — J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 285–306.
20. J. C. Martin, *Substitution minimal flows.* — Amer. J. Math. **93** (1971), 503–526.
21. F. M. Dekking, *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **41**, No. 3 (1977/78), 221–239.

Zatitskiy P. B. Scaling entropy sequence: invariance and examples.

A scaling entropy sequence of an automorphism is an entropy-type metric invariant suggested by A. M. Vershik. We confirm his conjecture that it does not depend on the choice of a semimetric. This means that it is indeed a metric invariant. We also calculate this invariant for several classical dynamical systems.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ,
14-я линия В.О., д. 29Б,
199178 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: paxa239@yandex.ru

Поступило 27 октября 2014 г.